Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Ф. Молчанов, Преобразования Пуассона и Фурье для тензорных произведений, *Функц. анализ и его прил.*, 2015, том 49, выпуск 4, 50–60

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa3211>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.89.56.158

26 апреля 2023 г., 13:53:44

Преобразования Пуассона и Фурье для тензорных произведений*

© 2015. В. Ф. Молчанов

Для группы $G = \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ мы выписываем в явном виде дифференциальные операторы, сплетающие неприводимые конечномерные представления T_k группы G с тензорными произведениями $T_l \otimes T_m$ (преобразования Пуассона и Фурье), указываем некоторый аналог гармонического анализа и приводим явные формулы для композиций этих преобразований с операторами Ли надгруппы $G \times G$. Эти построения основаны на дифференциально-разностном соотношении для ядра Пуассона.

В настоящей работе мы сообщаем несколько результатов о тензорных произведениях неприводимых конечномерных представлений группы $G = \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$. Хорошо известно, что тензорное произведение $T_l \otimes T_m$ раскладывается в прямую однократную сумму:

$$T_l \otimes T_m = T_{|l-m|} + T_{|l-m|+1} + \cdots + T_{l+m-1} + T_{l+m}.$$

Мы выписываем в явном виде операторы, сплетающие представление $T_l \otimes T_m$ и слагаемые T_k , и называем их преобразованиями Пуассона и Фурье; они двойственны друг другу. Эти преобразования оказываются дифференциальными операторами. Для преобразования Пуассона мы даем три варианта. Преобразование Фурье с точностью до множителя совпадает со скобками Ранкина–Коэна ([10], [5]).

Далее, мы записываем в явном виде формулы для композиций преобразований Пуассона и Фурье с операторами Ли надгруппы $\tilde{G} = G \times G$ (с представлениями надалгебры). Это продолжает тематику, начатую в нашей работе [6]; см. также статьи [2], [7], [8] и библиографию в них. В этих работах мы рассматривали представления в *бесконечномерных* пространствах функций на однородных пространствах, сейчас мы имеем дело с *конечномерными* представлениями.

Побуждающим толчком для этой деятельности была работа Неретина [3] (давняя работа Мукунды [9] осталась незамеченной) для плоскости Лобачевского $\mathrm{SU}(1, 1)/K$, где K — диагональная подгруппа. В ней он нашел явные формулы для взаимодействия надалгебры Ли с разложением Планшереля канонического представления группы $\mathrm{SU}(1, 1)$.

Мы используем другой подход к таким задачам, он не требует никакой формулы Планшереля. Для вычислений более удобным оказывается преобразование Пуассона, чем преобразование Фурье. Более того, сейчас мы видим, что в основе всей теории здесь лежит некоторое дифференциально-разностное уравнение для ядра Пуассона.

*Работа поддержана грантом РФФИ 13-01-00952-а, Госзаданием Министерства образования и науки 2014/285, проект №2476, и Региональным общественным фондом содействия отечественной науке.

Тензорное произведение $T_l \otimes T_m$ эквивалентно представлению группы $G = \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ в функциях на однополостном гиперboloиде G/H в $\mathbb{R}^3$, индуцированному характером диагональной подгруппы H . Однако сейчас мы не будем использовать эту реализацию представления $T_l \otimes T_m$. С другой стороны, нам кажется полезным проявить параллели с гармоническим анализом на однородных пространствах, в частности, мы вводим сферические функции.

Автор благодарит Ю. А. Неретина за полезные обсуждения.

Мы будем использовать следующие обозначения для «обобщенных степеней»:

$$a^{[s]} = a(a+1) \cdots (a+s-1), \quad a^{(s)} = a(a-1) \cdots (a-s+1);$$

здесь a — число или оператор, $s \in \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$.

§1. Группа $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$, ее представления

Группа $G = \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ состоит из вещественных матриц второго порядка с определителем единица:

$$g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}, \quad \alpha\delta - \beta\gamma = 1.$$

Всякое конечномерное неприводимое представление T_k группы G задается числом k (*старшим весом*), таким, что $2k \in \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$. Оно действует в пространстве V_k многочленов $\varphi(x)$ от x степени $\leq 2k$ (так что $\dim V_k = 2k+1$) по формуле

$$(T_k(g)\varphi)(x) = \varphi(x \cdot g)(\beta x + \delta)^{2k}, \quad x \cdot g = \frac{\alpha x + \gamma}{\beta x + \delta};$$

мы считаем, что G действует справа.

Алгебра Ли $\mathfrak{g}$ группы G состоит из вещественных матриц второго порядка со следом 0. Базис в ней состоит из матриц

$$L_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad L_1 = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 \end{pmatrix}, \quad L_+ = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.1)$$

Соотношения коммутации таковы:

$$[L_+, L_-] = -2L_1, \quad [L_+, L_1] = -L_+, \quad [L_1, L_-] = -L_-. \quad (1.2)$$

Представление алгебры Ли $\mathfrak{g}$, порождаемое представлением группы G , мы обозначаем тем же символом, что и само исходное представление группы G . Для базисных элементов (1.1) из $\mathfrak{g}$ имеем

$$T_k(L_-) = \frac{d}{dx}, \quad T_k(L_1) = x \frac{d}{dx} - k, \quad T_k(L_+) = x^2 \frac{d}{dx} - 2kx.$$

На пространстве V_k существует единственная с точностью до множителя билинейная инвариантная невырожденная форма. В качестве таковой возьмем форму

$$\langle \psi, \varphi \rangle_k = \frac{1}{(2k)!} \sum_{p=0}^{2k} (-1)^p \cdot \psi^{(p)}(0) \cdot \varphi^{(2k-p)}(0), \quad (1.3)$$

где в правой части стоят производные. Она симметрична при четном $2k$ и косимметрична при нечетном $2k$:

$$\langle \psi, \varphi \rangle_k = (-1)^{2k} \langle \varphi, \psi \rangle_k. \quad (1.4)$$

Инвариантность означает, что

$$\langle T_k(X)\psi, \varphi \rangle_k = -\langle \psi, T_k(X)\varphi \rangle_k, \quad X \in \mathfrak{g}. \quad (1.5)$$

Для элементов базиса $\{x^s\}$, $s = 0, 1, \dots, 2k$, пространства V_k эта форма отлична от нуля только на парах x^s, x^{2k-s} :

$$\langle x^s, x^{2k-s} \rangle_k = (-1)^s \binom{2k}{s}^{-1}. \quad (1.6)$$

Мы будем использовать аргументные обозначения для многочленов, находящихся внутри билинейных форм $\langle \cdot, \cdot \rangle$: повторяющийся аргумент является немым. Например, вместо $\langle \psi, \varphi \rangle_k$ мы можем написать $\langle \psi(x), \varphi(x) \rangle_k$.

Функция $(x - \xi)^{2k}$ есть воспроизводящее ядро (играет роль дельта-функции), а именно, для всякого многочлена $\varphi \in V_k$ имеет место равенство

$$\langle (x - \xi)^{2k}, \varphi(\xi) \rangle_k = \varphi(x), \quad (1.7)$$

так что $(x - \xi)^{2k}$ есть аналог ядра Бергмана для базиса $\{x^s\}$, $s = 0, 1, \dots, 2k$, пространства V_k . Дифференцируя (1.7), получаем

$$\langle (x - \xi)^{2k-b}, \varphi(\xi) \rangle_k = \frac{1}{(2k)^{(b)}} \cdot \frac{d^b \varphi(x)}{dx^b}. \quad (1.8)$$

§2. Тензорные произведения

Тензорное произведение $V_l \otimes V_m$ состоит из многочленов $f(x, y)$ от x, y степени $\leq 2l$ по x и степени $\leq 2m$ по y . В этом пространстве действует представление $T_{lm} = T_l \times T_m$ группы («надгруппы») $\tilde{G} = G \times G$:

$$(T_{lm}(g_1, g_2)f)(x, y) = f(x \cdot g_1, y \cdot g_2) \cdot (\beta_1 x + \delta_1)^{2l} (\beta_2 y + \delta_2)^{2m}.$$

В группе $\tilde{G}$ естественно выделяются три подгруппы, изоморфные G . Первая из них, обозначим ее через G^d , есть диагональ, состоящая из пар (g, g) , $g \in G$. Далее, имеются две компонентные подгруппы, обозначим их через G_1 и G_2 , состоящие соответственно из пар (g, E) и (E, g) , где E — единичная матрица, $g \in G$.

Ограничение представления T_{lm} на группу G^d есть тензорное произведение $T_l \otimes T_m$ представлений T_l и T_m группы G :

$$((T_l \otimes T_m)(g)f)(x, y) = f(x \cdot g, y \cdot g) \cdot (\beta x + \delta)^{2l} (\beta y + \delta)^{2m}.$$

Положим

$$r = m - l. \quad (2.1)$$

Известно, что тензорное произведение $T_l \otimes T_m$ раскладывается в прямую однократную сумму:

$$T_l \otimes T_m = \sum_k T_k,$$

где k пробегает множество чисел

$$|r|, |r| + 1, \dots, l + m - 1, l + m. \quad (2.2)$$

Соответственно этому $V_l \otimes V_m$ разлагается в сумму подпространств:

$$V_l \otimes V_m = \sum_k W_k,$$

инвариантных и неприводимых относительно $T_l \otimes T_m$. Для облегчения записи мы не будем явно указывать зависимость от l, m как здесь в правой части, так и ниже. Ограничение представления $T_l \otimes T_m$ на W_k эквивалентно T_k .

Билинейные формы на V_l и V_m порождают билинейную форму $\langle f, h \rangle_{lm}$ на $V_l \otimes V_m$:

$$\langle f, h \rangle_{lm} = \frac{1}{(2l)!(2m)!} \sum_{p,q} (-1)^{p+q} \cdot f^{(p,q)}(0,0) h^{(2l-p, 2m-q)}(0,0).$$

Она инвариантна относительно представления $T_{lm} = T_l \times T_m$ надгруппы $\tilde{G}$. Подпространства W_k ортогональны относительно билинейной формы $\langle f, h \rangle_{lm}$.

§3. Преобразования Пуассона и Фурье

Пусть k принадлежит множеству (2.2). Положим

$$j = l + m - k, \quad (3.1)$$

так что $2l - j = k - r$, $2m - j = k + r$, см. (2.1). Назовем *ядром Пуассона* следующий многочлен из $V_l \otimes V_m \otimes V_k$:

$$P_k(x, y; t) = (y - t)^{2m-j} (x - t)^{2l-j} (y - x)^j = (y - t)^{k+r} (x - t)^{k-r} (y - x)^j. \quad (3.2)$$

Он инвариантен относительно представления $T_l \otimes T_m \otimes T_k$ группы G :

$$((T_l(g) \otimes T_m(g) \otimes T_k(g) P_k)(x, y; t) = P_k(x, y; t), \quad g \in G. \quad (3.3)$$

С помощью ядра Пуассона P_k определим два отображения: *преобразование Пуассона* $M_k: V_k \rightarrow V_l \otimes V_m$ и *преобразование Фурье* $F_k: V_l \otimes V_m \rightarrow V_k$. А именно,

$$(M_k \varphi)(x, y) = \langle P_k(x, y; t), \varphi(t) \rangle_k, \quad (3.4)$$

$$(F_k f)(t) = \langle f(x, y), P_k(x, y; t) \rangle_{lm}. \quad (3.5)$$

В силу (3.3) операторы M_k и F_k сплетают представления $T_l \otimes T_m$ и T_k группы G , а именно,

$$M_k T_k(g) = (T_l \otimes T_m)(g) M_k,$$

$$T_k(g) F_k = F_k (T_l \otimes T_m)(g).$$

Преобразования Пуассона и Фурье сопряжены друг другу:

$$\langle f, M_k \varphi \rangle_{lm} = \langle F_k f, \varphi \rangle_k.$$

Из (1.7) следует, что эти преобразования переводят воспроизводящие ядра в пространствах V_k и $V_l \otimes V_m$ в ядро Пуассона:

$$(M_k(t - \xi)^{2k})(x, y) = P_k(x, y; \xi),$$

$$(F_k(\xi - x)^{2l}(\eta - y)^{2m})(t) = P_k(\xi, \eta; t).$$

Теорема 3.1. Преобразование Пуассона $M_k: V_k \rightarrow V_l \otimes V_m$ можно записать в одном из следующих трех видов (здесь $\varphi \in V_k$):

$$(M_k \varphi)(x, y) = \sum_{\alpha=0}^{k+r} \binom{k+r}{\alpha} \frac{1}{(2k)^{(\alpha)}} (y-x)^{j+\alpha} \left(\frac{d}{dx}\right)^\alpha \varphi(x), \quad (3.6)$$

$$(M_k \varphi)(x, y) = c_k \cdot (y-x)^j \left\{ (y-x) \frac{d}{dx} + k-r+1 \right\}^{[k+r]} \varphi(x), \quad (3.7)$$

$$(M_k \varphi)(x, y) = c_k \cdot (y-x)^{l+m+k+1} \left(\frac{d}{dx}\right)^{k+r} (y-x)^{-k+r-1} \varphi(x), \quad (3.8)$$

где r и j даются формулами (2.1) и (3.1), а $c_k = 1/(2k)^{(k+r)}$.

Доказательство. Докажем сначала (3.6). Заменив $y-t$ на $(y-x) + (x-t)$ в ядре Пуассона (3.2) и применив формулу бинома Ньютона, приведем это ядро к виду

$$P_k(x, y; t) = (y-x)^j \sum_{\alpha=0}^{k+r} \binom{k+r}{\alpha} (y-x)^\alpha (x-t)^{2k-\alpha}.$$

Подставив это в (3.4) и используя (1.8), мы получим (3.6). После этого формулы (3.7) и (3.8) доказываются непосредственной проверкой. $\square$

Теорема 3.2. Преобразование Фурье $F_k: V_l \otimes V_m \rightarrow V_k$ дается следующей формулой ($f(x, y)$ — многочлен из $V_l \otimes V_m$):

$$(F_k f)(t) = \sum_{\alpha=0}^j \binom{j}{\alpha} (-1)^{j-\alpha} \frac{1}{(2l)^{(j-\alpha)} (2m)^{(\alpha)}} \cdot f^{(j-\alpha, \alpha)}(t, t), \quad (3.9)$$

где j дается формулой (3.1).

Доказательство. Теперь в ядре Пуассона (3.2) заменим $y-x$ на $(y-t) - (x-t)$ и применим формулу бинома Ньютона; тогда это ядро приведет к виду

$$P_k(x, y; t) = \sum_{\alpha=0}^j \binom{j}{\alpha} (-1)^\alpha (y-t)^{2m-\alpha} (x-t)^{2l-(j-\alpha)}.$$

Подставив это в (3.5) и используя (1.4) и (1.8), мы получим (3.9). $\square$

Разложим ядро Пуассона $P_k(x, y; t)$ по степеням t :

$$P_k(x, y; t) = (y-x)^j \sum_{p=0}^{2k} N_{k, 2k-p}(x, y) (-t)^p, \quad (3.10)$$

где

$$N_{k,p}(x, y) = \sum_{\alpha+\beta=p} \binom{k+r}{\alpha} \binom{k-r}{\beta} y^\alpha x^\beta.$$

Преобразование Пуассона M_k переводит базис $\{t^b\}$, $b = 0, 1, \dots, 2k$, в пространстве V_k в базис $\{M_k t^b\}$ в пространстве W_k . Из (3.4), (1.6), (3.10) получаем, что

$$(M_k t^b)(x, y) = \binom{2k}{b}^{-1} (y-x)^j N_{k,b}(x, y). \quad (3.11)$$

Таким образом, ядро Пуассона $P_k(x, y; t)$ служит производящей функцией для коэффициентов Клебша–Гордана (мы не заботимся о нормировке). Аналогичную производящую функцию для коэффициентов Клебша–Гордана для группы $SU(2)$ можно найти, например, в [4].

Композиция $F_k M_k$ преобразований Пуассона и Фурье есть скалярный оператор в пространстве V_k :

$$F_k M_k \varphi = \omega_k \varphi, \quad \varphi \in V_k,$$

где

$$\omega_k = \frac{j! (l + m + k + 1)^{(j)}}{(2l)^{(j)} (2m)^{(j)}}.$$

Следовательно, обратная композиция (с множителем) $\omega_k^{-1} M_k F_k$ проектирует $V_l \otimes V_m$ на W_k . Отсюда следует *формула обращения*:

$$f = \sum_k \frac{1}{\omega_k} M_k (F_k f), \quad (3.12)$$

восстанавливающая функцию $f \in V_l \otimes V_m$ по ее компонентам Фурье $F_k f$, и *формула Планишереля* для функций $f, h \in V_l \otimes V_m$:

$$\langle f, h \rangle_{lm} = \sum_k \frac{1}{\omega_k} \langle F_k f, F_k h \rangle_k,$$

а также «унитарность» преобразования Пуассона:

$$\langle M_k \varphi, M_k \psi \rangle_{lm} = \omega_k \langle \varphi, \psi \rangle_k.$$

Функция

$$\Pi_k(u, v; x, y) = \langle P_k(u, v; t), P_k(x, y; t) \rangle_k \quad (3.13)$$

служит ядром оператора $M_k F_k$:

$$(M_k F_k f)(x, y) = \langle \Pi_k(u, v; x, y), f(u, v) \rangle_{lm}.$$

Формула обращения означает (см. (3.13) и (3.12)), что

$$\sum_k \frac{1}{\omega_k} \Pi_k(u, v; x, y) = (x - u)^{2l} (y - v)^{2m}. \quad (3.14)$$

Пусть H обозначает подгруппу диагональных матриц

$$h = \begin{pmatrix} \lambda^{-1} & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Возьмем в G матрицу g_{xy} , зависящую от x, y ,

$$g_{xy} = \begin{pmatrix} 1 & -1/(y - x) \\ -x & y/(y - x) \end{pmatrix}.$$

Одночлены $\theta_k^{(-)}(t) = (-t)^{k-r}$ и $\theta_k^{(+)}(t) = (-1)^{2r} t^{k+r}$ из V_k являются собственными векторами для операторов $T_k(h)$, $h \in H$, с собственными значениями λ^{2r} , λ^{-2r} соответственно. Сдвиг этих одночленов с помощью матриц g_{xy} и g_{yx} соответственно дает ядро Пуассона $P_k(x, y; t)$, а именно,

$$P_k(x, y; t) = (y - x)^{2m} (T_k(g_{xy}) \theta_k^{(-)})(t) = (y - x)^{2l} (T_k(g_{yx}) \theta_k^{(+)})(t).$$

Преобразование Пуассона переводит $\theta_k^{(\pm)}$ в некоторый многочлен $\Psi_k^{(\pm)}(x, y)$,

$$\Psi_k^{(\pm)} = M_k \theta_k^{(\pm)}.$$

Мы назовем многочлены $\Psi_k^{(\pm)}(x, y)$ *сферическими функциями*. Для каждого k обе функции $\Psi_k^{(-)}(x, y)$ и $\Psi_k^{(+)}(x, y)$ принадлежат W_k и являются собственными для $T_{lm}(h)$, $h \in H$, с собственными значениями λ^{2r} , λ^{-2r} , а следовательно, однородными многочленами степеней $2l$ и $2m$ соответственно. Из (3.11) получаем

$$\Psi_k^{(-)}(x, y) = (-1)^{k-r} d_k \cdot (y-x)^j N_{k, k-r}(x, y),$$

$$\Psi_k^{(+)}(x, y) = (-1)^{2r} d_k \cdot (y-x)^j N_{k, k+r}(x, y),$$

где

$$d_k = \binom{2k}{k-r}^{-1} = \binom{2k}{k+r}^{-1}.$$

Функции $\Psi_k^{(\pm)}$ можно выразить через многочлены Якоби $P_n^{(\alpha, \beta)}(z)$, см. [1, 10.8], где $z = (y+x)/(y-x)$:

$$\Psi_k^{(-)}(x, y) = (-1)^{k-r} d_k \cdot (y-x)^{2l} P_{k-r}^{(2r, 0)}(z),$$

$$\Psi_k^{(+)}(x, y) = (-1)^{2r} d_k \cdot (y-x)^{2m} P_{k+r}^{(0, -2r)}(z).$$

В частности, при $r = 0$, т. е. при $l = m$, обе эти функции совпадают с точностью до знака. Тогда их можно выразить через многочлены Лежандра $P_k(z)$, см. [1, 10.10]:

$$\Psi_k^{(+)}(x, y) = d_k \cdot (y-x)^{2m} P_k(z).$$

Сферическую функцию $\Psi_k^{(\pm)}$ можно рассматривать как обобщенную функцию на $V_l \otimes V_m$ с помощью билинейной формы $\langle \cdot, \cdot \rangle_{lm}$. Ее значение на функции $f \in V_l \otimes V_m$ равно значению вектора θ_k на компоненте Фурье этой функции:

$$\langle \Psi_k^{(\pm)}, f \rangle_{lm} = \langle \theta_k^{(\pm)}, F_k f \rangle_k.$$

Ядро $\Pi_k(u, v; x, y)$ получается из сферических функций $\Psi_k^{(-)}$ и $\Psi_k^{(+)}$ сдвигом с помощью матриц g_{xy} и g_{yx} соответственно:

$$\Pi_k(u, v; x, y) = (y-x)^{2m} (T_{lm}(g_{xy}) \Psi_k^{(-)})(u, v), \quad (3.15)$$

$$\Pi_k(u, v; x, y) = (y-x)^{2l} (T_{lm}(g_{yx}) \Psi_k^{(+)})(u, v).$$

Специализация $x = 0$, $y \rightarrow \infty$ превращает матрицу g_{xy} в единичную матрицу E ; поэтому в силу (3.15) и (3.14) сферические функции получаются из ядра Π_k предельным переходом:

$$\lim_{y \rightarrow \infty} y^{-2m} \cdot \Pi_k(u, v; 0, y) = \Psi_k^{(-)}(u, v),$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (-x)^{-2l} \cdot \Pi_k(u, v; x, 0) = \Psi_k^{(+)}(u, v).$$

Таким образом, формула обращения (3.12), или (3.14), равносильна следующим разложениям по сферическим функциям:

$$\sum_k \frac{1}{\omega_k} \Psi_k^{(-)}(x, y) = (-x)^{2l}, \quad \sum_k \frac{1}{\omega_k} \Psi_k^{(+)}(x, y) = (-1)^{2r} y^{2m}.$$

§4. Дифференциально-разностное уравнение для ядра Пуассона

Алгебра Ли надгруппы $\tilde{G}$ (надалгебра) есть прямая сумма $\tilde{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g} + \mathfrak{g}$, а алгебры Ли $\mathfrak{g}^d$, $\mathfrak{g}_1$, $\mathfrak{g}_2$ подгрупп G^d , G_1 , G_2 состоят соответственно из пар (X, X) , $(X, 0)$, $(0, X)$, где $X \in \mathfrak{g}$.

В этом параграфе мы находим действие операторов Ли $T_{lm}(X, Y)$, $X, Y \in \mathfrak{g}$, на ядро Пуассона $P_k(x, y; t)$, см. (3.2), как на функцию от x, y (так что тогда t — параметр). Для пар (X, X) ответ прост:

$$T_{lm}(X, X)P_k = -T_k(X)P_k,$$

в правой части $T_k(X)$ действует на P_k как на функцию от t . Эта формула есть по-другому записанная формула (3.3). Поэтому достаточно брать пары (X, Y) из какого-нибудь подпространства в $\tilde{\mathfrak{g}}$, дополнительного к $\mathfrak{g}^d$. В качестве такового мы возьмем подалгебру $\mathfrak{g}_2$.

Введем следующие дифференциальные операторы $S_k(X)$, $k \in \mathbb{N}$, и $E(X)$ по переменной t , линейно зависящие от $X \in \mathfrak{g}$, которые на базисных элементах (1.1) задаются формулами

$$E(L_-) = 1, \quad S_k(L_-) = \frac{d^2}{dt^2},$$

$$E(L_1) = t, \quad S_k(L_1) = t \frac{d^2}{dt^2} - (2k+1) \frac{d}{dt},$$

$$E(L_+) = t^2, \quad S_k(L_+) = t^2 \frac{d^2}{dt^2} - 2(2k+1)t \frac{d}{dt} + (2k+1)(2k+2).$$

Лемма 4.1. *Справедливы следующие соотношения коммутации:*

$$S_k([X, Y]) = T_k(X)S_k(Y) - S_k(Y)T_{k+1}(X), \quad (4.1)$$

$$E([X, Y]) = T_k(X)E(Y) - E(Y)T_{k-1}(X). \quad (4.2)$$

Лемма доказывается непосредственной проверкой.

Лемма 4.2. *Операторы $S_k(X)$ отображают V_{k+1} в V_k .*

Лемма следует из действия операторов $S_k(X)$ на одночлены:

$$S_k(L_-)t^s = s(s-1) \cdot t^{s-2},$$

$$S_k(L_1)t^s = s[s - (2k+2)] \cdot t^{s-1},$$

$$S_k(L_+)t^s = [s - (2k+1)][s - (2k+2)] \cdot t^s.$$

Лемма 4.3. *Операторы $S_k(X)$ и $E(X)$ сопряжены в следующем смысле:*

$$\langle S_k(X)\psi, \varphi \rangle_k = (2k+2)^{(2)} \cdot \langle \psi, E(X)\varphi \rangle_{k+1}, \quad (4.3)$$

где $\varphi \in V_k \subset V_{k+1}$ и $\psi \in V_{k+1}$.

Доказательство. Для $X = L_-$ равенство (4.3) есть

$$\left\langle \frac{d^2}{dt^2} \psi, \varphi \right\rangle_k = (2k+2)^{(2)} \cdot \langle \psi, \varphi \rangle_{k+1}. \quad (4.4)$$

Оно сразу вытекает из определения (1.3), см. также (1.6). Для оператора $T_k(X)$ сопряженным относительно формы $\langle \cdot, \cdot \rangle_k$ является оператор $(-T_k(X))$,

см. (1.5). Операторы $S_k(X)$ можно выразить через $T_k(X)$:

$$\begin{aligned} S_k(L_-) &= T_k(L_-)^2, \\ S_k(L_1) &= T_k(L_1)T_k(L_-) - (k+1)T_k(L_-), \\ S_k(L_+) &= T_k(L_+)T_k(L_1) - 2(k+1)T_k(L_1) + 2(k+1)^2. \end{aligned}$$

Поэтому для оператора $S_k(X)$ сопряженным является оператор $(d^2/dt^2) \circ E(X)$. Комбинируя это с (4.4), получаем (4.3). $\square$

Приведем еще (хотя нам дальше это не понадобится) сопряженный оператор (один из вариантов) для умножения на произвольную степень переменного t :

$$\langle \psi, t^p \varphi \rangle_{k+p} = \frac{1}{(2k+2p)^{(2p)}} \left\langle \left(\frac{d}{dt} \right)^p \left(t \frac{d}{dt} - (2k+p+1) \right)^{(p)} \psi, \varphi \right\rangle_k.$$

Далее, введем следующие коэффициенты $\alpha_k, \beta_k, \gamma_k$ (для облегчения записи мы не будем явно указывать зависимость от l, m):

$$\alpha_k = \frac{l+m-k}{(2k+2)(2k+1)}, \quad (4.5)$$

$$\beta_k = -\frac{k(k+1) + (m-l)(l+m+1)}{2k(k+1)}, \quad (4.6)$$

$$\gamma_k = -\frac{(l+m+k+1)(k+m-l)(k-m+l)}{2k(2k+1)}. \quad (4.7)$$

Теорема 4.4. Пусть $X \in \mathfrak{g}$. Оператор $T_{lm}(0, X)$ действует на ядро Пуассона $P_k(x, y; t)$ следующим образом:

$$T_{lm}(0, X)P_k = \alpha_k \cdot S_k(X)P_{k+1} + \beta_k \cdot T_k(X)P_k + \gamma_k \cdot E(X)P_{k-1}; \quad (4.8)$$

в левой части оператор действует на функцию от x, y , а в правой части операторы действуют на функции от t .

Доказательство. Сначала возьмем $X = L_-$. Тогда равенство (4.8) имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial y} P_k = \alpha_k \cdot \frac{\partial^2}{\partial t^2} P_{k+1} + \beta_k \cdot \frac{\partial}{\partial t} P_k + \gamma_k \cdot P_{k-1}. \quad (4.9)$$

Докажем, что это равенство справедливо с коэффициентами (4.5)–(4.7). Напомним, что P_k дается формулой (3.2). Положим для краткости

$$a = 2l - j + 1, \quad b = 2m - j + 1, \quad \xi = x - t, \quad \eta = y - t. \quad (4.10)$$

Вычисляя в (4.9) частные производные и производя сокращения, получаем равенство двух однородных многочленов от ξ, η степени 2:

$$\begin{aligned} &\xi\{(b-1)(\eta-\xi) + j\eta\} \\ &= \alpha_k \cdot \{b^{(2)}\xi^2 + 2ab\xi\eta + a^{(2)}\} - \beta_k \cdot (\eta-\xi)\{(a-1)\eta + (b-1)\xi\} + \gamma_k \cdot (\eta-\xi)^2. \end{aligned}$$

Из него последовательно находим $\alpha_k, \beta_k, \gamma_k$:

$$\alpha_k = \frac{j}{(a+b)(a+b-1)}, \quad \beta_k = -\frac{(a+b)b-2a}{(a+b)(a+b-2)},$$

$$\gamma_k = -\frac{(a-1)(b-1)(a+b-1+j)}{(a+b-1)(a+b-2)}.$$

Подставляя сюда (4.10), получаем (4.5)–(4.7).

Для $X = L_1$ и $X = L_+$ используем доказанное равенство (4.8) с $X = L_-$ и соотношения коммутации — последовательно первое и второе из (1.2) и соответствующие соотношения для операторов $S_k(X)$ и $E(X)$ из (4.1) и (4.2). $\square$

§5. Взаимодействие преобразований Пуассона и Фурье с надалгеброй Ли

В этом параграфе мы находим явные выражения для композиций операторов $T_{lm}(X, Y)$ и преобразований Пуассона и Фурье. Как и в §4, мы ограничимся подалгеброй $\mathfrak{g}_2$.

Теорема 5.1. Пусть $X \in \mathfrak{g}$. Оператор $T_{lm}(0, X)$ взаимодействует с преобразованием Пуассона M_k следующим образом:

$$T_{lm}(0, X)M_k = \alpha'_k \cdot M_{k+1}E(X) + \beta'_k \cdot M_k T_k(X) + \gamma'_k \cdot M_{k-1}S_{k-1}(X), \quad (5.1)$$

где

$$\alpha'_k = (2k+2)^{(2)} \cdot \alpha_k, \quad \beta'_k = -\beta_k, \quad \gamma'_k = \frac{1}{(2k)^{(2)}} \cdot \gamma_k.$$

Доказательство. Возьмем $\varphi \in V_k$ и вычислим $T_{lm}(0, X)M_k\varphi$. Используем определение преобразования M_k , см. (3.4), и теорему 4.3:

$$T_{lm}(0, X)M_k\varphi = T_{lm}(0, X)\langle P_k, \varphi \rangle_k$$

$$= \alpha_k \cdot \langle S_k(X)P_{k+1}, \varphi \rangle_k + \beta_k \cdot \langle T_k(X)P_k, \varphi \rangle_k + \gamma_k \cdot \langle E(X)P_{k-1}, \varphi \rangle_k.$$

К первому слагаемому применяем формулу (4.3), к третьему — ее же с заменой k на $k-1$, ко второму — формулу (1.5). В результате получаем

$$T_{lm}(0, X)M_k\varphi = \alpha_k \cdot (2k+2)^{(2)} \langle P_{k+1}, E(X)\varphi \rangle_k - \beta_k \cdot \langle T_k(X)P_k, \varphi \rangle_k$$

$$+ \gamma_k \cdot \frac{1}{(2k)^{(2)}} \langle P_{k-1}, S_{k-1}(X)\varphi \rangle_{k-1},$$

а это есть (5.1). Заметим, что последнее слагаемое здесь корректно, поскольку $S_{k-1}(X)\varphi$ принадлежит V_{k-1} , см. лемму 4.2. $\square$

Применим формулу (5.1) с $X = L_1$ к функции $\theta_k^{(\pm)}$. В левой части мы получим многочлен $T_{lm}(0, L_1)\Psi_k^{(\pm)}$ из $V_l \otimes V_m$, собственный для операторов $T_k(h)$, $h \in H$, с собственным значением $\lambda^{\pm 2r}$, а сама формула (5.1) превращается в разложение этого многочлена по сферическим функциям $\Psi_s^{(\pm)}$:

$$T_{lm}(0, L_1)\Psi_k^{(\pm)} = \pm \{ \alpha'_k \cdot \Psi_{k+1}^{(\pm)} + r\beta'_k \cdot \Psi_k^{(\pm)} + (r^2 - k^2)\gamma'_k \cdot \Psi_{k-1}^{(\pm)} \}.$$

Коэффициенты разложения можно получить, умножая скалярно с помощью $\langle \cdot, \cdot \rangle_{lm}$ эти разложения на функции $\Psi_s^{(\mp)}$.

Теорема 5.2. Пусть $X \in \mathfrak{g}$. Оператор $T_{lm}(0, X)$ взаимодействует с преобразованием Фурье F_k следующим образом:

$$F_k T_{lm}(0, X) = -\alpha_k \cdot S_k(X) F_{k+1} - \beta_k \cdot T_k(X) F_k - \gamma_k \cdot E(X) F_{k-1}. \quad (5.2)$$

Доказательство. Пусть $f \in V_l \otimes V_m$. По формулам (3.5) и (1.5)

$$F_k T_{lm}(0, X) f = \langle T_{lm}(0, X) f, P_k \rangle_{lm} = -\langle f, T_{lm}(0, X) P_k \rangle_{lm}.$$

Подставим сюда (4.8). Операторы $S_k(X)$, $T_k(X)$ и $E(X)$ можно вынести за знак формы $\langle \cdot, \cdot \rangle_{lm}$, поскольку они действуют на переменную t . В результате мы получаем (5.2). $\square$

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Г. Бейтмен, А. Эрдейи, *Высшие трансцендентные функции. Функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены*, Наука, М., 1966.
- [2] В. Ф. Молчанов, *Канонические представления и надгруппы для гиперboloидов*, Функц. анализ и его прил., **39**:4 (2005), 48–61.
- [3] Ю. А. Неретин, *Действие надалгебры в планишерелевском разложении и операторы сдвига в мнимом направлении*, Изв. РАН, сер. матем., **66**:5 (2002), 171–182.
- [4] А. М. Переломов, *Обобщенные когерентные состояния и их применения*, Наука, М., 1987.
- [5] H. Cohen, *Sums involving the values at negative integers of L-functions of quadratic characters*, Math. Ann., **217**:3 (1975), 271–285.
- [6] V. F. Molchanov, *Canonical representations and overgroups*, in: Lie Groups and Symmetric Spaces, Amer. Math. Soc. Transl., Ser. 2, vol. 210, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2003, 213–224.
- [7] V. F. Molchanov, *Canonical representations and overgroups for hyperboloids of one sheet and Lobachevsky spaces*, Acta Appl. Math., **86**:1–2 (2005), 115–129.
- [8] V. F. Molchanov, *Canonical representations on Lobachevsky spaces: an interaction with an overalgebra*, Acta Math. Appl., **99**:3 (2007), 321–337.
- [9] N. Mukunda, *Unitary representations of the homogeneous Lorentz group in an $O(2, 1)$ basis*, J. Math. Phys., **9**:1 (1968), 50–61.
- [10] R. A. Rankin, *The construction of automorphic forms from the derivatives of a given form*, J. Indian Math. Soc., **20** (1956), 103–116.

Тамбовский государственный университет
им. Г. Р. Державина
e-mail: v.molchanov@bk.ru

Поступила в редакцию
31 октября 2014 г.