Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. А. Горин, Некоторые неравенства для положительно определенных функций, *Функц. анализ и его прил.*, 2015, том 49, выпуск 4, 76–78

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa3212>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.172.240.79

26 апреля 2023 г., 14:33:50

Некоторые неравенства для положительно определенных функций

© 2015. Е. А. Горин

1. Пусть X — абелева группа и $f: X \rightarrow \mathbb{C}$ — комплексная функция. Если для каждого конечного набора $\{x_k \in X \mid 1 \leq k \leq n\}$ и аналогичного набора $\{\xi_k \mid 1 \leq k \leq n\}$ комплексных чисел выполняется неравенство

$$\sum_{1 \leq k, l \leq n} f(x_k - x_l) \xi_k \bar{\xi}_l \geq 0, \quad (1)$$

то функция f называется положительно определенной. Класс всех таких функций на X обозначается через $\text{PD}(X)$.

Используя неравенства (1) при $n = 1$ и $n = 2$, легко убедиться, что $f(0) \geq 0$ и что $|f(x)| \leq f(0)$ и $f(-x) = \overline{f(x)}$ при всех $x \in X$. Используя неравенство (1) при $n = 3$, сравнительно просто, выбирая подходящие x_i и ξ_i , получить более деликатное неравенство

$$|f(x) - f(y)|^2 \leq 2f(0)\{f(0) - \text{Re } f(x - y)\}. \quad (2)$$

М. Г. Крейн в работе [1] использовал неравенство (2) для (очевидного) доказательства теоремы А. П. Артеменко: если вещественная часть положительно определенной функции на вещественной оси $\mathbb{R}$ непрерывна в некоторой окрестности нуля, то сама функция равномерно непрерывна на всей оси. Явный намек на такой подход имеется в более ранней его работе [2]. Заметим, что работа [1] открывает первую книгу «Избранных трудов» Крейна [3].

Впервые я познакомился с неравенством (2) по указанным работам 40-х годов и стал называть это неравенство (на любой абелевой группе) неравенством Крейна. В дальнейшем я неоднократно встречался с этим неравенством в многочисленных других работах, почти всегда с тем же доказательством, но без всяких ссылок. Вероятно, довольно давно неравенство (2) считается общим местом.

2. Ниже я приведу общее неравенство, из которого сразу вытекают некоторые известные ранее, в том числе неравенство (2). Доказательство будет основано на теореме Бохнера. Хотя теорема Бохнера в общей форме (т.е. для локально компактных абелевых групп) требует равномерной непрерывности, порочного круга не возникает, так как группу можно объявить дискретной, а в этом случае не только есть равномерная непрерывность у каждой функции (все множества открыты), но и стандартное доказательство теоремы Бохнера (см., например, [4]) заметно укорачивается. Более того, дело сводится к дискретным конечно

порожденным абелевым группам X , и тогда теорема Бохнера по существу совпадает с теоремой Герглотца 1910 г. (X — группа $\mathbb{Z}$ целых чисел).

3. Пусть X — абелева группа, $f \in \text{PD}(X)$ и

$$x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_n \in X.$$

Тогда

$$\left| f\left(\sum_{k=1}^n x_k\right) - f\left(\sum_{k=1}^n y_k\right) \right|^2 \leq 2nf(0) \sum_{k=1}^n \{f(0) - \text{Re } f(x_k - y_k)\}. \quad (3)$$

Неравенство (3) я приводил в нескольких работах (см., в частности, [5]). Это неравенство позволяет получить далеко идущие обобщения теоремы Артеменко. Например, при $X = \mathbb{R}^m$ с обычной топологией окрестность нуля можно заменить компактом с положительной мерой Лебега, гладкой гиперповерхностью положительной гауссовой кривизны, гладкой кривой в общем положении, а при $m = 1$ — классическим канторовым множеством.

4. В работе [6] с прикладными целями для непрерывных $\text{PD}(\mathbb{R})$ -функций при нечетных n было получено следующее неравенство, в некотором смысле симметричное неравенству (3):

$$\left| f\left(\sum_{k=1}^n x_k\right) + f\left(\sum_{k=1}^n y_k\right) \right|^2 \leq 2nf(0) \sum_{k=1}^n \{f(0) + \text{Re } f(x_k - y_k)\}. \quad (4)$$

В доказательстве авторы широко использовали соображения из [5]. Поэтому возникла идея получить неравенство, включающее оба последних, и теперь мы переходим к основной теореме.

5. Мы сохраняем обозначения и для простоты считаем, что X — дискретная группа, порожденная элементами x_k, y_k , где $1 \leq k \leq n$. Двойственная группа Λ тогда топологически изоморфна произведению $\Phi \times \mathbb{T}^m$, где Φ — конечная группа и $\mathbb{T}$ — единичная окружность.

Основная лемма. При $|\zeta| \leq 1$

$$L \stackrel{\text{def}}{=} \left| f\left(\sum_{k=1}^n x_k\right) - \zeta^n f\left(\sum_{k=1}^n y_k\right) \right|^2 \leq 2nf(0) \sum_{k=1}^n \{f(0) - \text{Re}(\bar{\zeta} f(x_k - y_k))\}. \quad (5)$$

Теорема. Если $|\xi|, |\eta| \leq 1$, то

$$\left| \xi^n f\left(\sum_{k=1}^n x_k\right) - \eta^n f\left(\sum_{k=1}^n y_k\right) \right|^2 \leq 2nf(0) \sum_{k=1}^n \{f(0) - \text{Re}(\xi \bar{\eta} f(x_k - y_k))\}. \quad (6)$$

Из неравенства (5) при $\zeta = \pm 1$ вытекают неравенства (3) и (4) (при нечетном n).

Нам потребуется следующее очевидное тождество:

$$1 - \zeta^n c_1 \cdots c_n = (1 - \zeta c_1) + \zeta c_1 (1 - \zeta c_2) + \zeta^2 c_1 c_2 (1 - \zeta c_3) + \cdots + \zeta^{n-1} c_1 \cdots c_{n-1} (1 - \zeta c_n). \quad (7)$$

Это тождество сохраняется в каждом кольце с единицей в предположении, что ζ — элемент центра.

Доказательство леммы. В качестве функции от $\zeta = \sigma + it$ левая часть неравенства (5) является субгармонической функцией, а правая — гармонической. Поэтому неравенство достаточно доказать при $|\zeta| = 1$.

По теореме Бохнера

$$f(x) = \int_{\Lambda} \lambda(x) \mu(d\lambda).$$

Для простоты будем считать, что $f(0) = \mu(\Lambda) = 1$. Пусть

$$a_k = \lambda(x_k), \quad b_k = \lambda(y_k) \quad \text{и} \quad c_k = b_k/a_k.$$

Тогда

$$L = \left| \int_{\Lambda} a_1 \cdots a_n (1 - \zeta^n c_1 \cdots c_n) \mu(d\lambda) \right|^2. \quad (8)$$

Применяя неравенство Коши–Буняковского в L^2 -пространстве по мере μ и тождество (7), мы получим из представления (8) неравенство

$$\begin{aligned} L &\leq \int_{\Lambda} |1 - \zeta^n c_1 \cdots c_n|^2 \mu(d\lambda) \\ &= \int_{\Lambda} \left| \sum_{k=1}^n \zeta^{k-1} c_1 \cdots c_{k-1} (1 - \zeta c_k) \right|^2 \mu(d\lambda). \end{aligned} \quad (9)$$

По неравенству Коши–Буняковского в $\mathbb{C}^n$

$$\left| \sum_{k=1}^n \zeta^{k-1} c_1 \cdots c_{k-1} (1 - \zeta c_k) \right|^2 \leq n \sum_{k=1}^n |1 - \zeta c_k|^2. \quad (10)$$

Так как $|1 - \zeta c_k|^2 = 2(1 - \operatorname{Re}(\zeta c_k))$, то, сопоставляя (9) и (10), мы получим соотношение

$$L \leq 2n \sum_{k=1}^n \int_{\Lambda} (1 - \operatorname{Re}(\zeta c_k)) \mu(d\lambda) = 2n \sum_{k=1}^n \{1 - \operatorname{Re}(\bar{\zeta} f(x_k - y_k))\},$$

и лемма доказана. $\square$

Доказательство теоремы. Будем считать, что $|\eta| \leq |\xi| \leq 1$. Фиксируем η . Если $|\xi| = 1$, то неравенство (6) легко вытекает из неравенства (5). Чтобы перейти к $|\xi| < 1$, достаточно снова воспользоваться субгармоничностью левой части и гармоничностью правой. $\square$

ЛИТЕРАТУРА

- [1] М. Г. Крейн, Уч. зап. Куйбышевск. пед. ин-та, 1943, № 7, 123–148.
 [2] М. Г. Крейн, Докл. АН СССР, **26**:1 (1940), 17–21. [3] М. Г. Крейн, *Избранные труды, книга 1*, Киев, 1993. [4] W. Rudin, *Fourier analysis on groups*, Wiley, New York–London, 1962. [5] Е. А. Горин, Фундамент. и прикл. матем., **17**:7 (2012), 67–95.
 [6] А. Б. Певный, С. М. Ситник, в кн.: Новые информационные технологии в автоматизированных системах: материалы XVIII-го научно-практического семинара, ИПМ им. М. В. Келдыша, М., 2015, 247–254; <http://nps.itas.miem.edu.ru/>.