Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. В. Шульман, Об отображениях, близких к субаддитивным, *Функци. анализ и его прил.*, 2016, том 50, выпуск 1, 93–96

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa3217>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.6.47.48

26 апреля 2023 г., 08:50:25

$-\psi''_{xx} + v(x, \tau)\psi = 0$ ($E = 0$ — край абсолютно непрерывного спектра), равное нулю при $x = 0$.

Наши результаты допускают следующую физическую интерпретацию. При $t < \tau_n/\varepsilon$ квантовая частица, описываемая волновой функцией Ψ_n , находится в состоянии с энергией $E_n(\varepsilon t)$ и локализована в потенциальной яме $0 \leq x \leq \varepsilon t$. При приближении t к τ_n/ε — моменту исчезновения уровня $E_n(\varepsilon t)$ — вероятность найти квантовую частицу в потенциальной яме уменьшается и становится малой при $t > \tau_n/\varepsilon$. Энергия частицы переходит в непрерывный спектр. Далее, с ростом времени при t , близком к $\tau_{n-1}/\varepsilon, \tau_{n-2}/\varepsilon, \dots$ — моментам рождения резонансов, за счет туннелирования снова возникает заметная вероятность найти частицу в потенциальной яме.

Отметим, что в акустике океана при исследовании распространения звука в узком прибрежном водном клине на физическом уровне строгости изучались задачи, похожие на нашу. Например, в [4] автор вывел элегантное уравнение в частных производных для звукового поля в ситуации, аналогичной возникающей при $\tau \sim \tau_n$. Это позволило ему описать поле в старшем порядке в терминах функций Эйри. По-видимому, физикам не удалось обнаружить эффекты, описанные в теореме 3 и связанные с появлением резонансов оператора $H(\tau)$, у них не появлялись и специальные функции, связанные с уравнением $\zeta(z + 1/2) = 1/\sqrt{z} + \zeta(z - 1/2)$ и описывающие Ψ_n «в тени» — при $\varepsilon t > \tau_n$ вне окрестностей чисел $\tau_l, l = n, \dots, 1$.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] J. E. Avron, A. Elgart, *Comm. Math. Phys.*, **203**:2 (1999), 445–463. [2] V. M. Babich, M. A. Lyalinov, V. E. Grikurov, *Diffraction Theory: The Sommerfeld-Malyuzhinets Technique*, Alpha Science International, Oxford, 2007. [3] V. S. Buslaev, C. Sulem, *Asymptot. Anal.*, **58**:1–2 (2008), 17–48. [4] A. D. Pierce, *J. Acoust. Soc. Am.*, **72**:2 (1982), 523–531. [5] V. V. Sukhanov, *Solutions of nonstationary Dirac equations with the potential slowly depending on time*, http://www.ma.utexas.edu/mp_arc-bin/mpa?yn=02-199.

Санкт-Петербургский государственный университет
e-mail: a.smirnov@spbu.ru

Поступила в редакцию
7 января 2015 г.

Санкт-Петербургский государственный университет
e-mail: a.fedotov@spbu.ru

УДК 517.9

Об отображениях, близких к субаддитивным*

© 2016. Е. В. ШУЛЬМАН

1. Введение. Пусть G — группа, а Ω — произвольное множество. Назовем отображение $F: G \rightarrow 2^\Omega$ *субаддитивным*, если

$$F(gh) \subset F(g) \cup F(h) \quad \text{для всех } g, h \in G.$$

*Исследования были поддержаны проектом «Математические методы в экономике», осуществленным в Институте математики Силезского университета в Катовице.

Пусть

$$\nu(F) := \max_{g \in G} |F(g)| < \infty,$$

где через $|A|$ обозначается мощность множества A . В [3, теорема 2.2] показано, что в этих условиях

$$\left| \bigcup_{g \in G} F(g) \right| < 4\nu(F).$$

Понятие субаддитивности естественно переносится на отображения из групп в произвольные решетки. В [3, теорема 4.2] был получен аналог приведенного выше результата для отображений в решетку $\mathcal{S}(X)$ подпространств линейного пространства X ; в этом случае речь идет об оценке размерности подпространства $\sum_{g \in G} F(g)$ через $\sup_{g \in G} \dim(F(g))$. Этот результат позволил получить описание ограниченных решений многопараметрического уравнения Леви-Чивиты на произвольной группе [3, теорема 6.3].

Ориентируясь на приложения к теории устойчивости функциональных уравнений ([1], [2]), мы приводим ниже некоторые результаты об отображениях, близких к субаддитивным.

2. Почти субаддитивные отображения в произвольные множества.

Пусть $k \in \mathbb{N}$; для $A, B \subset \Omega$ мы пишем $A \subset^k B$, если $|A \setminus B| \leq k$.

Будем называть отображение $F: G \rightarrow 2^\Omega$ k -субаддитивным, если

$$F(gh) \subset^k F(g) \cup F(h) \quad \text{для всех } g, h \in G.$$

Теорема 1. Пусть $k \in \mathbb{N}$, $F: G \rightarrow 2^\Omega$ является k -субаддитивным отображением и $n := \sup_{g \in G} |F(g)| \geq 3k$. Тогда существует такое подмножество $M \subset \Omega$, мощность которого не превосходит $6n$, что $F(g) \subset^{8k} M$ для всех $g \in G$.

3. Почти субаддитивные отображения в метрические пространства.

Пусть $(\mathcal{X}, d)$ — метрическое пространство. Для $Y \subset \mathcal{X}$ и $\delta > 0$ через $O_\delta(Y)$ обозначается δ -окрестность множества Y :

$$O_\delta(Y) = \{x \in \mathcal{X} : d(x, Y) < \delta\}.$$

Отображение $F: G \rightarrow 2^\mathcal{X}$ назовем δ -субаддитивным, если

$$F(gh) \subset O_\delta(F(g) \cup F(h)) \quad \text{для всех } g, h \in G.$$

Пусть $\varepsilon > 0$. Назовем ε -мощностью множества $A \subset \mathcal{X}$ число

$$|A|_\varepsilon = \inf\{|B| : A \subset O_\varepsilon(B)\},$$

т. е. мощность минимальной ε -сети.

Теорема 2. Для любых $n \in \mathbb{N}$ и $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta = \delta(n, \varepsilon)$, что если отображение $F: G \rightarrow 2^\mathcal{X}$ δ -субаддитивно и $|F(g)| \leq n$ для всех $g \in G$, то

$$\left| \bigcup_{g \in G} F(g) \right|_\varepsilon \leq n(n+3)/2.$$

В качестве δ можно взять $\varepsilon/(3^n - 1)$.

Приведем также более общее, хотя и более техническое утверждение, часто оказывающееся полезным.

Пусть фиксировано подмножество $S \subset \mathcal{X}$ и число $\delta > 0$; отображение $F: G \rightarrow 2^{\mathcal{X}}$ называется (S, δ) -субаддитивным, если

$$F(gh) \subset O_{\delta}(F(g) \cup F(h) \cup S)$$

для всех $g, h \in G$.

Теорема 3. Для любого $n \in \mathbb{N}$ найдется $k_n > 0$, такое, что если отображение F является (S, δ) -субаддитивным и $|F(g)| \leq n$ для любого $g \in G$, то

$$\bigcup_{g \in G} F(g) \subset O_{k_n \delta}(S \cup P),$$

где P — подмножество в $\mathcal{X}$, мощность которого не превосходит $n(n+3)/2$. В качестве k_n можно взять $3^n - 1$.

Следует отметить, что (в отличие от таких результатов о субаддитивности, как, например, [3, теорема 2.2]) сформулированные выше результаты о почти субаддитивных отображениях не переносятся с групп даже на самые простые полугруппы. Так, взяв в теореме 2 $G = \mathbb{Z}$, $n = 1$ и $\varepsilon = 2$, мы получим следующее простое утверждение: если двусторонняя последовательность $\{a_n : n \in \mathbb{Z}\}$ удовлетворяет условию

$$\min\{|a_{n+m} - a_n|, |a_{n+m} - a_m|\} \leq 1 \quad \text{для всех } n, m \in \mathbb{Z}, \quad (1)$$

то найдутся такие два числа, что каждый член последовательности отстоит не более чем на 2 от какого-нибудь из них. Однако ничего подобного не имеет места для полугруппы $\mathbb{N}$. Например, последовательность $a_n = \log_2 n$ удовлетворяет условию (1), хотя даже не является ограниченной.

4. Почти субаддитивные отображения в решетки подпространств.

Пусть $k \in \mathbb{N}$. Для подпространств Y, Z линейного пространства X будем писать

$$Y \subset_k Z,$$

если найдется такое подпространство V , что

$$Y \subset Z + V, \quad \dim V \leq k.$$

Мы будем рассматривать отображения из групп в решетки подпространств, инвариантных относительно некоторых «конечнократных» представлений.

Представление T группы Γ в линейном пространстве называется *конечнократным* или *fm-представлением*, если все его неприводимые конечномерные подпредставления входят в T с конечными кратностями. Если кратности $m(\pi, T)$ входящих в представление T неприводимых представлений оцениваются через их размерности,

$$m(\pi, T) \leq \phi(\dim \pi),$$

где ϕ — некоторая функция, то мы говорим, что T имеет *равномерную кратность* ϕ .

Теорема 4. Пусть T — равномерно ограниченное fm-представление группы Γ в банаховом пространстве X , а $\mathcal{E}$ — решетка всех конечномерных T -инвариантных подпространств. Зафиксируем числа $k, n \in \mathbb{N}$, такие, что $n \geq 3k$.

Пусть G — группа, а $F: G \rightarrow \mathcal{E}$ — такое отображение, что $\dim F(g) \leq n$ при $g \in G$ и

$$F(gh) \subset_k F(g) + F(h) \quad \text{для всех } g, h \in G.$$

Тогда найдется такое подпространство $E \in \mathcal{E}$, что $F(g) \subset_{sk} E$ при $g \in G$.

Если при этом T имеет равномерную кратность ϕ , то

$$\dim E \leq (5n - 1)n\phi(n).$$

Этот результат существенно усиливает теорему 4.2 из [3], которая соответствует случаю $k = 0$ в теореме 4.

В теории функциональных уравнений оказывается полезным другое обобщение теоремы 4.2, когда условие инвариантности значений субаддитивного отображения заменяется более слабым условием «инвариантности с точностью до фиксированного конечномерного подпространства». То, что от ограничений типа инвариантности нельзя полностью отказаться, показано в [3, пример 4.1].

Пусть по-прежнему $\mathcal{E}$ — решетка всех конечномерных инвариантных подпространств некоторого представления T . Зафиксируем подпространство $L \subset X$. Подпространство E назовем L -инвариантным (относительно T), если

$$E \subset L + W, \quad \text{где } W \in \mathcal{E}.$$

Если при этом выполнено условие $\dim W \leq k$ для некоторого натурального числа k , то будем говорить, что E является (L, k) -инвариантным.

Теорема 5. Пусть T — равномерно ограниченное fm -представление группы Γ в банаховом пространстве X . Зафиксируем $k \in \mathbb{N}$ и конечномерное подпространство $L \subset X$. Если F — такое субаддитивное отображение группы G в решетку подпространств пространства X , что все $F(g)$ являются (L, k) -инвариантными, то пространство $\sum_{g \in G} F(g)$ конечномерно. Более того, если T имеет равномерную кратность ϕ , то

$$\dim \left(\sum_{g \in G} F(g) \right) \leq 3k \dim L + (4k - 1)k\phi(k).$$

Автор выражает искреннюю благодарность рецензенту работы за ряд полезных замечаний.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] D. H. Hyers, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, **27** (1941), 222–224. [2] D. H. Hyers, G. Isac, T. M. Rassias, *Stability of Functional Equations in Several Variables*, Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications, vol. 34, Birkhauser, Boston, MA, 1998. [3] E. Shulman, J. Funct. Anal., **263**:5 (2012), 1468–1484.

Вологодский государственный университет
e-mail: shulmank@yahoo.com

Поступила в редакцию
31 октября 2014 г.

Заведующая редакцией и научный редактор Г. М. Цукерман

Подписано к печати 25.01.2016. Дата выхода в свет 20.02.2016. Формат 70 × 100/16

Печать цифровая. Усл. печ. л. 7,8. Усл. кр.-отт. 1,1 тыс. Бум. л. 3,0

Уч.-изд. л. 8,0. Тираж 131 экз. Заказ 928.

Учредитель: Российская академия наук
Математический институт им. В. А. Стеклова РАН

Адрес редакции: 119991 Москва, ГСП-1, ул. Губкина 8, комн. 624. Тел. (499) 941-01-88

Издатель: Российская академия наук, ФГУП «Академиздатцентр «Наука»,

117997 Москва, Профсоюзная, ул. 90

Отпечатано в ФГУП «Академиздатцентр «Наука» («Типография «Наука»),

121099 Москва, Шубинский пер., 6