Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Ширинкалам, А. Пураббас, М. Амини, Модульные когомологии и когомологии Хохшильда некоторых полугрупповых алгебр, *Функц. анализ и его прил.*, 2015, том 49, выпуск 4, 90–94

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa3218>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.205.225.156

26 апреля 2023 г., 14:25:09

$g \in O(n, \mathbb{R})$ — некоторый фиксированный элемент, коммутирующий с элементами группы Γ . Рассмотрим в $\mathbb{R}^n$ нелокальный оператор типа Каллиаса¹⁾, представляющий собой скрещенное произведение вида $D = \not{D} \# a(r) T_g$, где $\not{D}$ — оператор Дирака, $a(r)$ — гладкая функция от $r = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$, равная в окрестности бесконечности ненулевой постоянной, а T_g — изоморфизм расслоений над отображением $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, коммутирующий с действием группы Γ . Неограниченный оператор D фредгольмов в L^2 , почти коммутирует с действием алгебры A и, следовательно, порождает элемент $[D] \in K^*(A)$. Возьмем два экземпляра пространства $\mathbb{R}^n$ с оператором D и проведем следующую процедуру разрезания и склеивания: разрежем каждое пространство $\mathbb{R}^n$ по сфере S^{n-1} и склеим вырезанные шары по границе в сферу S^n , а оставшиеся некомпактные части — в цилиндр $S^{n-1} \times \mathbb{R}$. Алгебра A естественным образом действует как на шаре, так и на цилиндре, а из двух копий оператора D получается оператор на сфере S^n — дубль оператора D , который мы обозначим через $\mathcal{D}$, и оператор $\mathcal{D}_0$ на цилиндре. Применение теоремы дает $\tau^*[D] + [D] = [\mathcal{D}] + [\mathcal{D}_0]$ в $K^*(A)$, где $\tau^*: K^*(A) \rightarrow K^*(A)$ — инволюция, индуцированная отображением $\tau: x \mapsto x/r^2$ одноточечной компактификации пространства $\mathbb{R}^n$ в себя.

Благодарности. Автор признателен А. Ю. Савину и Б. Ю. Стернину за полезные обсуждения и рецензенту за ценные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] P. B. Gilkey, *Invariance Theory, the Heat Equation, and the Atiyah–Singer Index Theorem*, CRC Press, Boca Raton, FL, 1995. [2] M. Gromov, H. B. Lawson Jr., Publ. Math. IHES, **58**:1 (1983), 295–408. [3] В. Е. Назайкинский, Б. Ю. Стернин, Функциональный анализ и его прил., **35**:2 (2001), 37–52. [4] V. Nazaikinskii, A. Savin, B.-W. Schulze, B. Sternin, *Elliptic Theory on Singular Manifolds*, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2005. [5] U. Bunke, Math. Ann., **303**:2 (1995), 241–279. [6] N. Higson, J. Roe, *Analytic K-Homology*, Oxford University Press, Oxford, 2000.

Институт проблем механики
им. А. Ю. Ишлинского РАН, Москва
Московский физико-технический институт
e-mail: nazaikinskii@yandex.ru

Поступило в редакцию
4 мая 2013 г.

УДК 512.73

Модульные когомологии и когомологии Хохшильда некоторых полугрупповых алгебр

© 2015. А. ШИРИНКАЛАМ, А. ПУРАББАС, М. АМИНИ

1. Введение. Данная статья представляет собой первую попытку систематического изучения взаимосвязи классических и модульных когомологий. Показано, что при определенных условиях, выполненных для некоторого класса примеров, эти когомологии с подходящим образом выбранными коэффициентами совпадают. В частности, это позволяет избавиться от условия коммутативности

¹⁾О классических операторах типа Каллиаса см., например, в [5].

в некоторых результатах из [5] и [6] в случае, когда действие предполагается тривиальным слева.

Пусть $\mathcal{L}^n(X, Y)$ (соответственно $\mathcal{L}_{\mathfrak{A}}^n(X, Y)$) — пространство всех ограниченных n -линейных (соответственно модульных) отображений из X в Y . Через $X^{(n)}$ обозначим n -е сопряженное пространство банахова пространства X . Пусть $\mathcal{A}$ и $\mathfrak{A}$ — банаховы алгебры, и пусть $\mathcal{A}$ — банахов $\mathfrak{A}$ -бимодуль. Говорят, что действие алгебры $\mathfrak{A}$ на $\mathcal{A}$ совместимо, если для любых элементов $\alpha \in \mathfrak{A}$ и $a, b \in \mathcal{A}$ справедливы равенства $\alpha \cdot (ab) = (\alpha \cdot a)b$, $(ab) \cdot \alpha = a(b \cdot \alpha)$. Всюду в работе предполагается, что $\mathcal{A}$ — банахов $\mathfrak{A}$ -бимодуль с совместимым действием. Пусть X является банаховым $\mathcal{A}$ -бимодулем и банаховым $\mathfrak{A}$ -бимодулем, таким, что для любых элементов $\alpha \in \mathfrak{A}$, $a \in \mathcal{A}$ и $x \in X$ выполнены соотношения $\alpha \cdot (a \cdot x) = (\alpha \cdot a) \cdot x$, $a \cdot (\alpha \cdot x) = (a \cdot \alpha) \cdot x$ и $(\alpha \cdot x) \cdot a = \alpha \cdot (x \cdot a)$ и что такие же соотношения выполнены для правых и двусторонних действий. Тогда говорят, что X — банахов $\mathcal{A}$ - $\mathfrak{A}$ -бимодуль. Если, сверх того, $\alpha \cdot x = x \cdot \alpha$ для любых $\alpha \in \mathfrak{A}$ и $x \in X$, то X называется коммутативным банаховым $\mathcal{A}$ - $\mathfrak{A}$ -бимодулем. В этом случае пространство X^* , сопряженное к пространству X , также является коммутативным банаховым $\mathcal{A}$ - $\mathfrak{A}$ -бимодулем с каноническим действием.

Пусть I — замкнутый идеал в проективном тензорном произведении $\mathcal{A} \hat{\otimes} \mathcal{A}$, порожденный элементами вида $a \cdot \alpha \otimes b - a \otimes \alpha \cdot b$, где $\alpha \in \mathfrak{A}$ и $a, b \in \mathcal{A}$. Тогда модульное проективное тензорное произведение $\mathcal{A} \hat{\otimes}_{\mathfrak{A}} \mathcal{A} = (\mathcal{A} \hat{\otimes} \mathcal{A})/I$ [4]. Пусть J — замкнутый идеал в $\mathcal{A}$, порожденный множеством $\pi(I)$, где $\pi: \mathcal{A} \hat{\otimes} \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ — отображение умножения.

Пусть X — банахов $\mathcal{A}$ - $\mathfrak{A}$ -бимодуль. Ограниченное линейное отображение $D: \mathcal{A} \rightarrow X$ называется $\mathfrak{A}$ -модульным дифференцированием, если оно является дифференцированием и отображением $\mathfrak{A}$ -модулей. Если X — коммутативный $\mathcal{A}$ - $\mathfrak{A}$ -бимодуль, то для любого $x \in X$ отображение $\text{ad}_x: \mathcal{A} \rightarrow X$, заданное формулой $\text{ad}_x(a) := a \cdot x - x \cdot a$, является модульным дифференцированием и называется внутренним модульным дифференцированием. Пространство всех $\mathfrak{A}$ -модульных дифференцирований, действующих из $\mathcal{A}$ в X , обозначается через $\mathcal{Z}_{\mathfrak{A}}^1(\mathcal{A}, X)$, а подпространство внутренних модульных дифференцирований обозначается через $\mathcal{B}_{\mathfrak{A}}^1(\mathcal{A}, X)$. Первая группа $\mathfrak{A}$ -модульных когомологий алгебры $\mathcal{A}$ с коэффициентами в X определяется как полунормированное факторпространство $\mathcal{H}_{\mathfrak{A}}^1(\mathcal{A}, X) := \mathcal{Z}_{\mathfrak{A}}^1(\mathcal{A}, X) / \mathcal{B}_{\mathfrak{A}}^1(\mathcal{A}, X)$. Определение высших групп модульных когомологий можно найти в [6].

2. Взаимосвязь модульных когомологий и когомологий Хохшильда. Пусть $\mathcal{A}$, $\mathfrak{A}$ и замкнутый идеал J те же, что и в предыдущем разделе, и пусть X — банахов $\mathcal{A}$ - $\mathfrak{A}$ -бимодуль. В данном разделе мы получим достаточные условия для того, чтобы группы когомологий $\mathcal{H}_{\mathfrak{A}}^1(\mathcal{A}, X)$ и $\mathcal{H}^1(\mathcal{A}/J, X)$ были изоморфны как полунормированные пространства. Будем говорить, что действие алгебры $\mathfrak{A}$ на X тривиально слева, если для любых $\alpha \in \mathfrak{A}$ и $x \in X$ справедливо равенство $\alpha \cdot x = f(\alpha)x$, где f — характер на $\mathfrak{A}$.

Всюду в этом разделе предполагается, что X — коммутативный банахов $\mathcal{A}$ - $\mathfrak{A}$ -бимодуль, причем действие алгебры $\mathfrak{A}$ как на $\mathcal{A}$, так и на X тривиально слева при одном и том же характере f на $\mathfrak{A}$. Мы также предполагаем, что банахова алгебра $\mathcal{A}/J$ унитарна. В следующем разделе представлены примеры, удовлетворяющие всем этим условиям.

Предложение 1. *Банаховы пространства $\mathcal{Z}_{\mathfrak{A}}^1(\mathcal{A}, X)$ и $\mathcal{Z}^1(\mathcal{A}/J, X)$ изометрически изоморфны.*

Доказательство. Отображение $\rho: \mathcal{L}_{\mathfrak{A}}^1(\mathcal{A}, X) \rightarrow \mathcal{L}^1(\mathcal{A}/J, X)$, определенное для каждого $D \in \mathcal{L}_{\mathfrak{A}}^1(\mathcal{A}, X)$ формулой $\rho(D)(a + J) = D(a)$, является сюръективной изометрией. $\square$

Теорема 2. Полунормированные пространства $\mathcal{H}_{\mathfrak{A}}^1(\mathcal{A}, X)$ и $\mathcal{H}^1(\mathcal{A}/J, X)$ изоморфны.

Доказательство. Изоморфизм ρ из предыдущего предложения отображает внутренние модульные дифференцирования на $\mathcal{A}$ во внутренние дифференцирования на $\mathcal{A}/J$ и, следовательно, индуцирует сюръективное отображение

$$\Phi: \mathcal{L}_{\mathfrak{A}}^1(\mathcal{A}, X)/\mathcal{B}_{\mathfrak{A}}^1(\mathcal{A}, X) \rightarrow \mathcal{L}^1(\mathcal{A}/J, X)/\mathcal{B}^1(\mathcal{A}/J, X),$$

задаваемое формулой $\Phi(D + \mathcal{B}_{\mathfrak{A}}^1(\mathcal{A}, X)) := \rho(D) + \mathcal{B}^1(\mathcal{A}/J, X)$. Простая проверка показывает, что Φ — изоморфизм полунормированных пространств. $\square$

В следующей лемме при некоторых условиях отождествляются банаховы пространства $\mathcal{A} \widehat{\otimes}_{\mathfrak{A}} X$ и $\mathcal{A}/J \widehat{\otimes} X$.

Напомним, что J — замкнутый идеал в $\mathcal{A}$, совпадающий с замкнутой линейной оболочкой множества элементов вида $(a \cdot \alpha)b - a(\alpha \cdot b)$, где $\alpha \in \mathfrak{A}$ и $a, b \in \mathcal{A}$. Пусть J_0 — замкнутая линейная оболочка множества элементов вида $a \cdot \alpha - f(\alpha)a$, где $a \in \mathcal{A}$ и $\alpha \in \mathfrak{A}$. Так как предполагается, что алгебра $\mathcal{A}/J$ унитарна, то $J_0 \subseteq J$. На практике в наиболее интересных примерах (см. следующий раздел) оказывается, что $J = J_0$.

Лемма 3. Пусть в предыдущих обозначениях $J = J_0$, а X есть $\mathfrak{L}_1$ -пространство¹⁾. Тогда банаховы пространства $\mathcal{A}/J \widehat{\otimes} X$ и $\mathcal{A} \widehat{\otimes}_{\mathfrak{A}} X$ изометрически изоморфны.

Кратко объясним доказательство леммы. Из определения проективного тензорного произведения модулей следует, что $\mathcal{A} \widehat{\otimes}_{\mathfrak{A}} X \simeq \mathcal{A} \widehat{\otimes} X / I_0$, где I_0 — это замкнутая линейная оболочка множества $\{a \cdot \alpha \otimes x - a \otimes \alpha \cdot x, a \in \mathcal{A}, \alpha \in \mathfrak{A}, x \in X\}$. Рассмотрим естественную проекцию $q: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}/J$. Тогда отображение $\varphi := q \otimes \text{id}: \mathcal{A} \widehat{\otimes} X \rightarrow \mathcal{A}/J \widehat{\otimes} X$, заданное формулой $\varphi(a \otimes x) := (a + J) \otimes x$ для любых $a \in \mathcal{A}$ и $x \in X$, является естественной проекцией на образ, так что в силу предложения 2.5 из [10] получаем изометрический изоморфизм $\mathcal{A} \widehat{\otimes} X / \ker \varphi \simeq \mathcal{A}/J \widehat{\otimes} X$. Теперь из теоремы 2.20 в [10] следует, что $\ker \varphi = J \widehat{\otimes} X$. Наконец, можно показать, что $J \widehat{\otimes} X = I_0$.

Предложение 4 (редукция размерности). Пусть $\mathcal{A}/J$ является $\mathfrak{L}_1$ -пространством. В предположениях леммы 3 справедливы следующие утверждения:

- (i) $\mathcal{L}_{\mathfrak{A}}^k(\mathcal{A}, X^*) \simeq \underbrace{(\mathcal{A} \widehat{\otimes}_{\mathfrak{A}} \cdots \widehat{\otimes}_{\mathfrak{A}} \mathcal{A} \widehat{\otimes}_{\mathfrak{A}} X)^*}_{k \text{ раз}} - \text{коммутирующий банахов } \mathcal{A}\text{-}\mathfrak{A}\text{-бимодуль для каждого } k \in \mathbb{N};$
(ii) имеет место изоморфизм $\mathcal{H}_{\mathfrak{A}}^{n+k}(\mathcal{A}, X) \simeq \mathcal{H}_{\mathfrak{A}}^n(\mathcal{A}, \mathcal{L}_{\mathfrak{A}}^k(\mathcal{A}, X))$ полунормированных пространств для любых $k, n \in \mathbb{N}$.

Изометрический изоморфизм в п. (i) следует из упражнения 5.3.1 в [9]. Аналогичное рассуждение из доказательства теоремы 2.4.6 в [9] с заменой коцпей на модульные коцпи доказывает утверждение п. (ii).

¹⁾За определением $\mathfrak{L}_1$ -пространства мы отсылаем читателя к [10]. Примерами таких пространств являются пространство $L^1(\mu)$ для заданной меры μ и пространство $C(K)^*$ для заданного компактного пространства K .

Следствие 5. При тех же предположениях, что и выше, пространства $\mathcal{H}_{\mathfrak{A}}^k(\mathcal{A}, X^*)$ и $\mathcal{H}^k(\mathcal{A}/J, X^*)$ изометрически изоморфны.

Доказательство. В силу предложения 4 и теоремы 2 имеем

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_{\mathfrak{A}}^k(\mathcal{A}, X^*) &\simeq \mathcal{H}^1(\mathcal{A}/J, \mathcal{L}_{\mathfrak{A}}^{k-1}(\mathcal{A}, X^*)) \\ &\simeq \mathcal{H}^1(\mathcal{A}/J, \mathcal{L}^{k-1}(\mathcal{A}/J, X^*)) \simeq \mathcal{H}^k(\mathcal{A}/J, X^*).\end{aligned}$$

Заметим, что так как п. (i) предложения 4 выполнен только для сопряженных модулей X^* , то и следствие 5 верно только для них.

3. Приложения к полугрупповым алгебрам. Пусть S — инверсная полугруппа с множеством E идемпотентов. Пусть $\ell^1(E)$ действует на $\ell^1(S)$ умножением справа и тривиально слева, т. е. $\delta_e \cdot \delta_s = \delta_s$, $\delta_s \cdot \delta_e = \delta_{se} = \delta_s * \delta_e$ ($e \in E$, $s \in S$), где δ_s — единичная масса в точке s . Здесь замкнутый идеал J (см. разд. 1) — это замкнутая линейная оболочка множества $\{\delta_{set} - \delta_{st} : s, t \in S, e \in E\}$. Рассмотрим на множестве S отношение эквивалентности, определенное следующим образом:

$$s \sim t \iff \delta_s - \delta_t \in J \quad (s, t \in S).$$

Из рассуждений, предшествующих теореме 2.4 в [1], следует, что $S/\sim$ — дискретная группа. В этом случае в силу доказательства теоремы 3.3 из [8] можно заметить, что $\ell^1(S)/J \simeq \ell^1(S/\sim)$ как (коммутативные) $\ell^1(E)$ -бимодули. Дискретная группа $S/\sim$ совпадает с максимальным гомоморфным групповым образом G_S полугруппы S .

Насрабади и второй автор [6] показали, что для коммутативной инверсной полугруппы S с множеством E идемпотентов группа когомологий $\mathcal{H}_{\ell^1(E)}^1(\ell^1(S), \ell^1(S)^{(2n+1)})$ тривиальна для любого $n \in \mathbb{N}$. В общем случае, когда S некоммутативна, а $\ell^1(E)$ действует на $\ell^1(S)$ умножением справа и тривиально слева, $\ell^1(S)$ не обязательно коммутативна как банахов $\ell^1(E)$ -бимодуль. Тем не менее, если рассмотреть $\ell^1(S)/J$ как банахов $\ell^1(E)$ -бимодуль, то при сделанных выше предположениях $\ell^1(S)/J$ оказывается коммутативным $\ell^1(S)$ - $\ell^1(E)$ -бимодулем. Мы покажем, что группа когомологий $\mathcal{H}_{\ell^1(E)}^1(\ell^1(S), (\ell^1(S)/J)^{(2n+1)})$ тривиальна для каждого $n \in \mathbb{N}$.

Теорема 6. Пусть S — инверсная полугруппа с множеством E идемпотентов. Пусть $\ell^1(E)$ действует на $\ell^1(S)$ умножением справа и тривиально слева. Тогда $\mathcal{H}_{\ell^1(E)}^1(\ell^1(S), \ell^1(G_S)^{(2n+1)}) = 0$ для любого $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Доказательство. Для каждого $s \in S$, полагая $e = s^*s$, получаем $\delta_s - \delta_{se} \in J$, так что $\ell^1(G_S) = \ell^1(S)/J$ — коммутативный банахов $\ell^1(S)$ - $\ell^1(E)$ -бимодуль. По теореме 2.2 из [7] и теореме 2 имеем

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_{\ell^1(E)}^1(\ell^1(S), \ell^1(G_S)^{(2n+1)}) &\simeq \mathcal{H}^1(\ell^1(S)/J, (\ell^1(S)/J)^{(2n+1)}) \\ &\simeq \mathcal{H}^1(\ell^1(G_S), (\ell^1(G_S))^{(2n+1)}) = 0.\end{aligned}$$

Далее мы обобщаем следствие 3.5 из [6] с клиффордовых полугрупп на произвольные инверсные полугруппы.

Теорема 7. Пусть S — инверсная полугруппа с множеством E идемпотентов. Пусть $\ell^1(E)$ действует на $\ell^1(S)$ умножением справа и тривиально

слева. Тогда для любого $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ группа гомологий $\mathcal{H}_{\ell^1(E)}^2(\ell^1(S), \ell^1(G_S)^{(2n+1)})$ является банаховым пространством.

Доказательство. Заметим, что для любой локально компактной группы G и любого $n \in \mathbb{N}$ существует компактное хаусдорфово пространство K_n , такое, что $L^1(G)^{(2n)} \simeq M(K_n)$ является $\mathfrak{L}_1$ -пространством. Поскольку $\delta_{set} - \delta_{st} = \delta_{sett^*t} - \delta_{st} = \delta_{stt^*et} - \delta_{st}$ и t^*et — идемпотент, скажем, e' , получаем, что $\delta_{set} - \delta_{st} = \delta_{re'e} - \delta_r$ при $r = st$. Таким образом, элементы вида $\delta_r \cdot \delta_{e'} - f(e')\delta_r$ порождают J , где f — аугментационный характер на $\ell^1(E)$. Теперь при $n = 0$ получаем, что $\ell^1(S)/J \simeq \ell^1(G_S)$ — унитарная банахова алгебра и $\mathfrak{L}_1$ -пространство. Также и $\ell^1(S)/J \hat{\otimes} \ell^1(G_S) \simeq \ell^1(G_S \times G_S)$ является $\mathfrak{L}_1$ -пространством. Поэтому, согласно следствию 5,

$$\mathcal{H}_{\ell^1(E)}^2(\ell^1(S), \ell^\infty(G_S)) \simeq \mathcal{H}^2(\ell^1(S)/J, \ell^\infty(G_S)) \simeq \mathcal{H}^2(\ell^1(G_S), \ell^\infty(G_S)).$$

В силу теоремы 3.3 из [7] последнее пространство банахово. При $n \geq 1$, поскольку $\ell^1(G_S)^{(2n)}$ есть $\mathfrak{L}_1$ -пространство, получаем, что $\mathcal{H}_{\ell^1(E)}^2(\ell^1(S), \ell^1(G_S))^{(2n+1)} \simeq \mathcal{H}^2(\ell^1(G_S), (\ell^1(G_S))^{(2n+1)})$ в силу следствия 5. Снова по теореме 3.3 из [7] последнее пространство банахово.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] М. Amini, A. Bodaghi, D. Ebrahimi Bagha, *Semigroup Forum*, **80**:2 (2010), 302–312. [2] H. G. Dales, *Banach Algebras and Automatic Continuity*, Clarendon Press, Oxford, 2000. [3] H. G. Dales, A. T.-M. Lau, D. Strauss, *Dissertationes Math. (Rozprawy Mat.)*, **481** (2011), 1–121. [4] А. Я. Хелемский, *Гомология в банаховых и топологических алгебрах*, Изд-во МГУ, М., 1986. [5] E. Nasrabadi, A. Pourabbas, *Semigroup Forum*, **81**:2 (2010), 269–276. [6] E. Nasrabadi, A. Pourabbas, *Bull. Iranian Math. Soc.*, **37**:4 (2011), 157–168. [7] A. Pourabbas, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **132**:2 (2004), 1403–1410. [8] R. Rezavand, M. Amini, M. H. Sattari, and D. Ebrahimi Bagha, *Semigroup Forum*, **77**:2 (2008), 300–305. [9] V. Runde, *Lectures on Amenability*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1774, Springer-Verlag, Berlin, 2002. [10] R. A. Ryan, *Introduction to Tensor Products of Banach Spaces*, Springer-Verlag, London, 2002.

Faculty of Mathematics and Computer Science,
Amirkabir University of Technology, Tehran, Iran
e-mail: shirinkalam_a@aut.ac.ir

Faculty of Mathematics and Computer Science,
Amirkabir University of Technology, Tehran, Iran
e-mail: arpabbas@aut.ac.ir

Department of Mathematics, Tarbiat Modares University
School of Mathematics, Institute for Research
in Fundamental Sciences (IPM), Tehran, Iran
e-mails: mamini@modares.ac.ir, mamini@ipm.ir

Поступила в редакцию
26 сентября 2014 г.
Переработанный вариант
1 марта 2015 г.