Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. М. Бухштабер, И. В. Нетай, Функциональное уравнение Хирцебруха и эллиптические функции уровня d , *Функц. анализ и его прил.*, 2015, том 49, выпуск 4, 1–17

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa3219>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.147.182.235

26 апреля 2023 г., 15:04:23

Функциональное уравнение Хирцебруха и эллиптические функции уровня d

© 2015. В. М. БУХШТАБЕР, И. В. НЕТАЙ*

*Посвящается замечательному математику
Александру Петровичу Веселову
в связи с его 60-летием*

Функция $f(x)$ комплексного переменного x , регулярная в окрестности точки $x = 0$ и такая, что $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, называется n -жесткой, если сумма вычетов функции $\prod_{i=0}^n 1/f(x - x_i)$ не зависит от выбора не совпадающих точек $x_0, \dots, x_n$ в малой окрестности точки $x = 0$. Ряд, задающий n -жесткую функцию, определяется функциональным уравнением. Это уравнение мы называем n -уравнением Хирцебруха. Каждая эллиптическая функции уровня d , где d — делитель числа $n + 1$, является n -жесткой. Описание многообразия всех 2-жестких функций получено совсем недавно. Основным результатом настоящей работы является описание многообразия всех 3-жестких функций.

Введение

Настоящая работа тематически и в направлении приложений связана с работами [1]–[3].

Рассмотрим функцию $f(x)$ комплексного переменного x , регулярную в окрестности точки $x = 0$ и такую, что $f(0) = 0$ и $f'(0) = 1$. Положим

$$F(x) = F(x; x_0, \dots, x_n) = \prod_{i=0}^n \frac{1}{f(x - x_i)}.$$

Определение 0.1. Пусть U — окрестность точки x , в которой функция $f(x)$ не имеет нулей, кроме $x = 0$. Функция $f(x)$ называется n -жесткой, если сумма вычетов функции $F(x)$ в U не зависит от выбора не совпадающих точек $x_0, \dots, x_n \in U$. Обозначим эту сумму вычетов через C_n .

Можно показать, что функция $f(x)$ является n -жесткой тогда и только тогда, когда ряд $x + \sum_{k \geq 1} f_k x^{k+1}$, задающий функцию $f(x)$ в малой окрестности точки $x = 0$, удовлетворяет функциональному уравнению

$$\sum_{j=0}^n \prod_{i \neq j} \frac{1}{f(x_j - x_i)} = C_n, \quad (1)$$

где C_n зависит от f , но не зависит от выбора точек $x_0, \dots, x_n$.

Уравнение (1) играет важную роль в теории родов Хирцебруха и в их приложениях (см. [8], [14] и §4). Это дало нам основание назвать его n -уравнением

*Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 14-50-00005) в Математическом институте им. В. А. Стеклова РАН.

Хирцебруха. В §4 мы вводим определение n -жестких родов Хирцебруха и описываем их связь с решениями n -уравнений Хирцебруха.

Хорошо известно, что функция

$$f(x) = \frac{e^{ax} - e^{bx}}{ae^{bx} - be^{ax}} \quad (2)$$

является n -жесткой для всех n и всех значений параметров a и b (см. [8]). Более того, недавно было показано, что функция $f(x)$ является n -жесткой для всех n тогда и только тогда, когда она имеет вид (2) (см. [5]).

Разложение в ряд функции (2) задает знаменитый 2-параметрический род Тодда (см. [4], [8], [14] и §4). Эта функция естественно возникает в различных областях математики. Например, имеет место разложение

$$\frac{e^{ax} - e^{bx}}{ae^{bx} - be^{ax}} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i+j=k+1} A(i, j) a^i b^j \frac{x^{k+1}}{(k+1)!},$$

где $A(i, j)$ — число перестановок множества из $k+1$ элементов, имеющих i возрастаний и j убываний (см. [15]). В перечислительной комбинаторике и торической топологии эта функция возникает благодаря разложению

$$\frac{e^{ax} - e^{bx}}{ae^{bx} - be^{ax}} = \sum_{k \geq 0} H(\text{Pe}^k) \frac{x^{k+1}}{(k+1)!},$$

где $H(\text{Pe}^k)$ есть H -полином k -мерного пермutoэдра (см. [14]). Для данного n функция (2) удовлетворяет n -уравнению Хирцебруха с константой

$$C_n = (-1)^n \frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a - b},$$

где $C_n = C_n(f)$. Для ряда $f^{-1}(x)$, функционально обратного к ряду, задающему функцию (2), имеет место формула

$$f^{-1}(x) = x + \sum_{n \geq 1} C_n \frac{x^{n+1}}{n+1}, \quad (3)$$

где $C_n = C_n(f)$. При алгебратопологической интерпретации решений функционального уравнения Хирцебруха (см. §4) формула (3) переходит в формулу С. П. Новикова (см. [16, §4]).

Классические методы теории эллиптических функций позволяют непосредственно показать (см. [7], [8] и приложение А), что эллиптические функции уровня d являются n -жесткими, если d — делитель числа $n+1$.

Совсем недавно был получен следующий результат (см. [13]).

Теорема 0.2. Пусть $f(x)$ — некоторая 2-жесткая функция. Тогда при $C_2 \neq 0$ она имеет вид (2), а при $C_2 = 0$ является эллиптической функцией уровня 3.

Следствие 0.3. Эквивалентны следующие условия:

- (i) функция $f(x)$ является 2-жесткой;
- (ii) функция $f(x)$ является $(3n-1)$ -жесткой для любого n .

Основной результат настоящей работы:

Теорема 0.4. Пусть $f(x)$ — некоторая 3-жесткая функция. Тогда при $C_3 \neq 0$ она имеет вид (2), а при $C_3 = 0$ представляет собой эллиптический синус Якоби $\operatorname{sn}(x)$ или эллиптическую функцию уровня 4.

Следствие 0.5. Эквивалентны следующие условия:

- (i) функция $f(x)$ является 3-жесткой;
- (ii) функция $f(x)$ является $(4n - 1)$ -жесткой для любого n .

Доказательства теорем 0.2 и 0.4 оказались нетривиальными и существенно используют результаты теории симметрических полиномов, в том числе аппарат полиномов Шура. Мы развиваем общий метод, который сначала демонстрируем на доказательстве теоремы 0.2 (см. теорему 2.1), а затем этим методом проводим детальное доказательство теоремы 0.4 (см. теорему 3.2).

В приложениях А и В собраны необходимые определения и результаты об эллиптических функциях уровня d .

§1. Параметризация решений уравнения Хирцебруха

Положим

$$h(x) = \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{x} + \sum_{k=0}^{\infty} h_{k+1} x^k.$$

Можно рассматривать h_{k+1} как координатные функции на пространстве решений уравнения (1), сопоставляющие формальному ряду $h(x)$ над коммутативным ассоциативным кольцом R коэффициент при x^k . Обозначим через $\mathcal{S}_{n,f}$ левую часть уравнения (1),

$$\mathcal{S}_{n,f} = \sum_{k=0}^n \prod_{i \neq k} \frac{1}{f(x_k - x_i)}.$$

Ниже (см. лемму 1.4) мы покажем, что для любого формального ряда $f(x)$ с $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$ это выражение задается формальным рядом.

Поскольку выражение $\mathcal{S}_{n,f}$ симметрично относительно перестановок переменных $x_0, \dots, x_n$, этот формальный ряд можно разложить, используя аддитивный базис полиномов Шура в кольце симметрических полиномов:

$$\mathcal{S}_{n,f} = \sum_{\lambda} p_{n,\lambda} s_{\lambda}, \quad (4)$$

где s_{λ} — полином Шура (см. определение 1.6), соответствующий диаграмме Юнга λ , а $p_{n,\lambda}$ — некоторый полином от переменных h_i . Правая часть уравнения (1) имеет вид $C_n \cdot s_{\varnothing}$. Таким образом, мы получаем следующий результат.

Теорема 1.1. Функциональное уравнение (1) равносильно системе полиномиальных уравнений $\{p_{n,\lambda} = 0\}$ для всех диаграмм Юнга $\lambda \neq \varnothing$ на коэффициенты $h_i \in R$. При этом $C_n = p_{n,\varnothing}$.

Следствие 1.2. Пространство решений уравнения (1) можно отождествить со схемой

$$\mathcal{M}_n := \operatorname{Spec}(R[h_1, h_2, \dots] / \operatorname{Rad}(I)),$$

где $\operatorname{Rad}(I)$ — радикал идеала $I = (p_{n,\lambda})_{\lambda \neq \varnothing}$.

Будем говорить, что решение $h(x) = 1/f(x)$ задает точку схемы $\mathcal{M}_n$.

Пример 1.3. Рассмотрим случай $n = 1$. Легко видеть, что идеал $(p_{1,\lambda})_{\lambda \neq \emptyset}$ порожден всеми h_{2k+1} для $k \geq 1$, если R не имеет 2-кручения. Таким образом,

$$\mathcal{M}_1 = \mathbb{A}_R^\infty = \text{Spec } R[h_1, h_2, h_4, h_6, \dots]$$

является бесконечномерным аффинным пространством над кольцом R .

Ниже мы увидим, что если $n \neq 1$ и R — поле нулевой характеристики, то $\mathcal{M}_n(R)$ является многообразием. В работе [13] показано, что $\mathcal{M}_2(\mathbb{Q})$ является объединением двух аффинных плоскостей, пересекающихся по конике. Ниже мы опишем структуру многообразия $\mathcal{M}_3$ над полем нулевой характеристики, параметризующего 3-жесткие функции, а также опишем эти функции.

Введем дифференциальные разностные операторы $\partial_i = (x_i - x_{i-1})^{-1}(1 - \tau_i)$, где τ_i , $i = 1, \dots, n$, действует на кольце полиномов $R[x_0, \dots, x_n]$ как кольцевой автоморфизм, переставляющий переменные x_{i-1} и x_i . Хорошо известно, что $\partial_i P$ является полиномом для любого полинома P . При этом $\partial_i P$ инвариантен относительно перестановки τ_i и $\partial_i P = 0$, если и только если P инвариантен относительно этой перестановки. Легко проверить, что

$$\partial(P \cdot Q) = \partial_i(P) \cdot Q + \tau_i(P) \cdot \partial_i(Q).$$

Если $\tau_i(Q) = Q$, то $\partial_i(P \cdot Q) = \partial_i(P) \cdot Q$. Следовательно, операторы ∂_i являются τ_i -дифференциальными операторами на кольце полиномов как на модуле над кольцом симметрических полиномов.

Обозначим через $\mathfrak{S}_{n+1}$ симметрическую группу перестановок переменных $x_0, \dots, x_n$, а через $\text{Sym}_{n+1} = R[x_0, \dots, x_n]^{\mathfrak{S}_{n+1}}$ кольцо симметрических полиномов. Нам потребуется оператор

$$L = \frac{1}{\Delta} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{n+1}} (-1)^\sigma \sigma,$$

где $\Delta = \prod_{i < j} (x_i - x_j)$. Хорошо известно (см. [6]), что

$$L = (\partial_1 \cdots \partial_n)(\partial_1 \cdots \partial_{n-1}) \cdots (\partial_1 \partial_2) \partial_1.$$

Нетрудно проверить, что $L(1) = 0$ и $L(P \cdot Q) = L(P) \cdot Q$, если полином Q симметрический. Имеет место важное соотношение $L\Delta = (n+1)!$, поэтому $L(\Delta Q) = (n+1)! Q$ для любого симметрического полинома Q . Следовательно, оператор $\frac{1}{(n+1)!} L\Delta$ является проектором $R[x_0, \dots, x_n] \rightarrow \text{Sym}_{n+1}$.

Действие оператора L продолжается на поле рациональных функций от $x_0, \dots, x_n$. Легко проверить, что это продолжение обладает всеми перечисленными свойствами, в частности, $L(P \cdot Q) = L(P) \cdot Q$ для любой симметрической рациональной функции Q и любой рациональной функции P .

Лемма 1.4. Для любого формального ряда $f(x) = x + O(x^2)$ выражение $\mathcal{S}_{n,f}(x)$ задает формальный ряд.

Доказательство. Положим $\tilde{h}(x) := x \cdot h(x)$. Очевидно, что выражение $\mathcal{S}_{n,f}$ задает симметрическую рациональную функцию; следовательно, $L(\Delta \mathcal{S}_{n,f}) =$

$(n+1)!\mathcal{S}_{n,f}$. Таким образом,

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_{n,f} &= \frac{1}{(n+1)!}L(\Delta\mathcal{S}_{n,f}) = \frac{1}{(n+1)!}L\left(\Delta \cdot \sum_{k=0}^n \prod_{i \neq k} \frac{1}{f(x_k - x_i)}\right) \\ &= \frac{1}{(n+1)!}L\left(\sum_{i=0}^n \varepsilon_i \prod_{i \neq k} \tilde{h}(x_i - x_k) \prod_{\substack{i < j \\ i, j \neq k}} (x_i - x_j)\right) \in R[[x_0, \dots, x_n]],\end{aligned}$$

где $\varepsilon_i = \pm 1$. □

Согласно лемме 1.4, определена константа $C_n = \mathcal{S}_{n,f}(0)$.

Определение 1.5. Формальный ряд $f(x)$ называется *специальным* для n -уравнения Хирцебруха, если $C_n = 0$.

Пусть $\lambda = \{\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n\}$ — диаграмма Юнга. Положим

$$\Delta_\lambda = \begin{vmatrix} x_1^{\lambda_1} & \dots & x_n^{\lambda_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{\lambda_n} & \dots & x_n^{\lambda_n} \end{vmatrix}.$$

Нетрудно проверить, что полином $\Delta_{\lambda+\delta}$ делится на полином Δ_δ , где $\delta = (n-1, \dots, 1, 0)$.

Определение 1.6. Полином Шура, соответствующий диаграмме λ , задается формулой

$$s_\lambda = \Delta_{\lambda+\delta} / \Delta_\delta.$$

Полином s_λ как отношение двух кососимметрических полиномов является симметрическим полиномом. Известно (см., например, [6]), что множество полиномов Шура $s_\lambda(x_1, \dots, x_n)$, таких, что $|\lambda| = \sum \lambda_i = m$ и $\text{ht}(\lambda) \leq n$, где $\text{ht}(\lambda)$ — число ненулевых строк в диаграмме Юнга λ , является аддитивным базисом пространства симметрических полиномов степени m для любых m . Положим $x^\lambda := x_1^{\lambda_1} \dots x_n^{\lambda_n}$ для диаграммы Юнга λ . Тогда имеет место важная формула $Lx^{\lambda+\delta} = s_\lambda$. Следовательно, если моноом x^λ симметричен относительно какой-либо перестановки τ_i , то $Lx^\lambda = 0$.

В пространстве полиномов от n переменных выберем мономиальный базис $\{x^\omega, \omega \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n\}$. В пространстве симметрических полиномов, являющемся образом оператора L , выберем базис $\{s_\lambda\}$ полиномов Шура. Тогда оператор L задается матрицей

$$L_{\omega,\lambda} = \begin{cases} (-1)^\sigma, & \sigma(\omega) = \lambda - \delta, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Вернемся к разложению (4). Легко видеть, что полином $p_{n,\lambda}$ является однородным полиномом степени $|\lambda| + n$ относительно градуировки $\deg h_k = k$. Следовательно, он линеен по переменной $h_{|\lambda|-n}$ и зависит только от переменных h_i , где $i \leq n + |\lambda|$. Рассмотрим более подробно полином $p_{n,\lambda}$, где $\lambda = (m)$ состоит из одной строки.

Лемма 1.7. Для любых n и m коэффициент при h_{m+n} у полинома $p_{n,(m)}$ равен $n(-1)^{n+m} + (-1)^n \binom{n+m-1}{m}$.

Доказательство. Возьмем некоторую подгруппу $\mathfrak{G} \subseteq \mathfrak{S}_{n+1}$ в группе перестановок переменных $x_0, \dots, x_n$. Пусть полином D кососимметричен относительно подгруппы $\mathfrak{G}$, т. е. $\sigma D = (-1)^\sigma D$ для любого $\sigma \in \mathfrak{G}$. Тогда для любого полинома Q имеем равенство

$$L(DQ) = \frac{1}{|\mathfrak{G}|} L\left(\sum_{\sigma \in \mathfrak{G}} (-1)^\sigma \sigma(DQ)\right) = \frac{1}{|\mathfrak{G}|} L\left(D \sum_{\sigma \in \mathfrak{G}} \sigma Q\right). \quad (5)$$

Пусть теперь S — полином, симметричный относительно подгруппы $\mathfrak{G}$, т. е. $\sigma S = S$ для любого $\sigma \in \mathfrak{G}$. Тогда для любого полинома Q имеет место равенство

$$L(SQ) = \frac{1}{|\mathfrak{G}|} L\left(\sum_{\sigma \in \mathfrak{G}} (-1)^\sigma \sigma(SQ)\right) = \frac{1}{|\mathfrak{G}|} L\left(S \sum_{\sigma \in \mathfrak{G}} (-1)^\sigma \sigma Q\right). \quad (6)$$

Обозначим через ϑ циклическую перестановку набора $(x_0, \dots, x_n)$. Используя формулу (5) в случае $D = \Delta$, $\mathfrak{G} = \langle \vartheta \rangle$, получаем:

$$L\left(\prod_{\substack{i < j \\ i, j \neq 0}} (x_i - x_j) \prod_{i=1}^n \tilde{h}(x_i - x_0)\right) = n! C_n. \quad (7)$$

Используем формулу (6), взяв $Q = x_1^{n-1} x_2^{n-2} \cdots x_{n-1}$, $S = \prod_{i=1}^n \tilde{h}(x_i - x_0)$. В качестве $\mathfrak{G}$ возьмем группу перестановок поднабора $(x_1, \dots, x_n)$. Тогда из (7) получим уравнение, равносильное уравнению (1):

$$L\left(x_1^{n-1} x_2^{n-2} \cdots x_{n-1} \prod_{i=1}^n \tilde{h}(x_i - x_0)\right) = C_n. \quad (8)$$

Разложим выражение, стоящее в скобках в левой части уравнения (8) по базису мономов, применим к нему оператор L и получим разложение по базису полиномов Шура. Вклад в коэффициент при полиноме Шура $s_{(m)}$ дают мономы, имеющие набор степеней $(m+n, n-1, \dots, 0)$. Поскольку в выражении

$$\prod_{i=1}^n \tilde{h}(x_i - x_0) = \prod_{i=1}^n \sum_{k=0}^{\infty} h_k(x_i - x_0)^k,$$

где $h_0 = 1$, нас интересует только коэффициент при h_{n+m} , мы можем перейти к сумме $\sum_{i=1}^n h_{n+m}(x_i - x_0)^{m+n}$. Вклад в коэффициент при h_{m+n} в этой сумме дают мономы с набором степеней $(m+n, n-1, \dots, 1, 0)$ в выражении

$$x_1^{n-1} x_2^{n-2} \cdots x_{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - x_0)^{n+m}.$$

Таким образом, мы хотим перебрать способы получить из набора степеней $(0, n-1, \dots, 1, 0)$ набор $(m+n, n-1, \dots, 1, 0)$, добавив к первой и какой-нибудь другой координате по неотрицательному целому числу, сумма которых равна $n+m$. Мы можем сделать это, добавив $n+m$ к первой координате или добавить $n-i$ к степени переменной x_0 и $m+i$ к степени переменной x_i для каждого

i от 1 до n . Таким образом, мы получаем следующие мономы, каждый со своим коэффициентом:

$$\begin{aligned} & n(-1)^{m+n}x_0^{m+n}x_1^{n-1}\cdots x_{n-1}, \quad (-1)^{n-1}\binom{n+m}{n-1}x_1^{n+m}x_0^{n-1}\cdots x_{n-1}, \\ & (-1)^{n-2}\binom{n+m}{n-2}x_2^{m+n}x_1^{n-1}x_0^{n-2}\cdots x_{n-1}, \dots, (-1)^2\binom{n+m}{2}x_{n-2}^{m+n}x_1^{n-1}\cdots x_0^2x_{n-1}, \\ & (-1)\binom{m+n}{1}x_{n-1}^{m+n}x_1^{n-1}\cdots x_0, \quad x_n^{m+n}x_1^{n-1}\cdots x_{n-1}. \end{aligned}$$

Мы видим, что в первом мономе индексы переменных возрастают, а в остальных их порядок отличается от возрастающего одной транспозицией. Таким образом, коэффициент при h_{m+n} в полиноме $p_{(m)}$ равен

$$\begin{aligned} & (-1)^{m+n}n + (-1)^n\binom{n+m}{n-1} + (-1)^{n-1}\binom{n+m}{n-2} + \cdots + \binom{m+n}{1} - \binom{m+n}{0} \\ & = (-1)^{m+n}n + (-1)^n\binom{n+m-1}{n-1} = (-1)^{n+m}n + (-1)^n\binom{n+m-1}{m}. \end{aligned}$$

Таким образом, лемма доказана. $\square$

Лемма 1.8. *Если кольцо коэффициентов R является полем нулевой характеристики, то коэффициент при мономе h_{m+n} в полиноме $p_{n,(m)}$ не равен нулю при $m > 1$ и $n > 1$.*

Доказательство. Пусть $C_{m,n}$ — искомый коэффициент. Тогда $C_{m,n} = (-1)^{m+n}n + (-1)^n\binom{m+n-1}{m}$ согласно лемме 1.7. Заметим, что последовательность $\{(-1)^nC_{m,n}\}$ является строго возрастающей по m отдельно при четных и нечетных натуральных m и при $n > 1$. Легко видеть, что $(-1)^nC_{m,n} > 0$ при любом четном m . Легко также убедиться, что $C_{1,n} = 0$, и поэтому $C_{m,n} > 0$ и при нечетном m . $\square$

Далее будем считать, что кольцо R является полем нулевой характеристики.

Теорема 1.9. *При $n > 1$ схема $\mathcal{M}_n(R)$ является многообразием.*

Доказательство. Мы хотим убедиться, что это схема конечного типа. Как мы установили выше, она задается всеми полиномами $p_{n,\lambda}$ для всех диаграмм Юнга $\lambda \neq \emptyset$ в аффинном пространстве с координатами h_k для $k \in \mathbb{N}$. Поскольку $p_{n,(m)}$ линейно зависит от h_{m+n} при $m > 1$, мы можем исключить переменные h_k с $k > n+1$. Выражая таким образом в полиномах $p_{n,\lambda}$, где диаграмма λ имеет более одной строки, переменные h_k с $k > n+1$ через $h_1, \dots, h_{n+1}$, мы получаем, что

$$\mathcal{M}_n = \text{Spec}(R[h_1, \dots, h_{n+1}]/\text{Rad}(I),$$

где $\text{Rad}(I)$ — радикал идеала $I = (p_{n,\lambda})_{\lambda \neq \emptyset}$. Таким образом, мы задали $\mathcal{M}_n$ идеалом полиномов в конечномерном аффинном пространстве над полем R , откуда следует, что $\mathcal{M}_n$ является многообразием при $n \neq 1$. $\square$

Теорема 1.10. *Два решения $f_1(x)$ и $f_2(x)$ n -уравнения Хирцебруха совпадают, если и только если $f_1^{(q)}(0) = f_2^{(q)}(0)$ для $q = 2, \dots, n+2$.*

Доказательство. Как было показано выше, ряд $h(x)$ восстанавливается по набору коэффициентов $h_1, \dots, h_{n+1}$. $\square$

Лемма 1.11. Пусть n нечетно, $f(x)$ является решением уравнения (1) и $h_{2i+1} = 0$ для $2i + 1 < n$. Тогда $f(x)$ является нечетным рядом.

Доказательство. Подставим в выражение (8) вместо функции $\tilde{h}$ ее разложение в ряд и применим оператор L . В результате получим разложение по базису полиномов Шура, в котором коэффициент при $s_{2k}(x_0, \dots, x_n)$ будет состоять из мономов, представляющих собой произведения нечетной степени с нечетным набором множителей h_{2k+1} . Выбирая h_{2k+1} в качестве первого ненулевого нечетного коэффициента, мы получаем равенство нулю полинома, в котором присутствует моном h_{2k+1} , а каждый из прочих мономов зависит от некоторого h_{2l+1} с меньшим индексом. Таким образом, отсюда следует равенство нулю всех последующих h_{2k+1} с $2k + 1 \geq n$. $\square$

В частности, для нечетности 1-жесткой функции достаточно условия $h_1 = 0$, а для случая 3-жесткой функции достаточно, чтобы $h_1 = h_3 = 0$, и т. д.

§2. Классификация решений 2-уравнения Хирцебруха

Теорема 2.1. Пусть ряд $f(x)$ удовлетворяет 2-уравнению Хирцебруха. Тогда

- (i) если $C_2 \neq 0$, то $f(x) = (e^{\alpha x} - e^{\beta x})/(\alpha e^{\beta x} - \beta e^{\alpha x})$ и $C_2 = \alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2$;
- (ii) если $C_2 = 0$, то $f(x)$ — эллиптическая функция уровня 3 или ее вырождение.

Доказательство. По теореме 1.10 любое решение уравнения (1) для $n = 2$ определяется координатами h_1, h_2, h_3 . Из результатов [13] следует, что для решений выполнено соотношение $h_3(h_1^2 + 3h_2) = 0$.

Как мы знаем, двухпараметрический род Тодда задает двумерное семейство в пространстве решений n -уравнения Хирцебруха для любого n . Семейство эллиптических функций уровня 3 и их вырождений также задает двумерное семейство решений 2-уравнения Хирцебруха.

Функция $C_2 = 3(h_1^2 + h_2)$ разделяет эти два двухпараметрических семейства решений в пространстве $\mathbb{A}^3$, так как одно из них является специальным, а другое — нет. При этом на множестве решений выполнено соотношение $h_3(h_1^2 + 3h_2) = 0$, являющееся произведением двух неприводимых полиномов.

Из единственности разложения алгебраического многообразия в объединение неприводимых компонент следует, что компоненты $\{h_3 = 0\}$ и $\{h_1^2 + 3h_2 = 0\}$ совпадают с описанными выше семействами решений, и других решений нет. Также отсюда следует, что на параметры h_1, h_2, h_3 нет других соотношений.

Опишем это подробнее. Пусть $h_3 = 0$. Тогда $h(x)$ имеет вид $1/x + h_1 + h_2x + O(x^3)$. Этот ряд совпадает по модулю x^3 с разложением в ряд функции $h(x) = (\alpha e^{\beta x} - \beta e^{\alpha x})/(e^{\alpha x} - e^{\beta x})$, если положить $h_1 = -(\alpha + \beta)/2$, $h_2 = (\alpha^2 - \beta^2)/12$. По теореме 1.10 ряд $h(x)$ является двухпараметрическим родом Тодда.

Аналогичным образом можно убедиться, что случай $h_1^2 + 3h_2 = 0$ соответствует эллиптической функции уровня 3. $\square$

§3. Классификация решений 3-уравнения Хирцебруха

Теорема 3.1. Пусть ряд $f(x)$ является решением уравнения (1) для $n = 3$. Многообразие $\mathcal{M}_3$ состоит из трех неприводимых компонент. Ряд $h(x) =$

$1/f(x)$ задает точку одной из этих трех компонент, если выполняется одно из следующих трех условий:

- (i) $h_1 = h_3 = 0$, т.е. $h(x)$ — нечетный ряд;
- (ii) $h_3 = 0$, $h_2^2 + 5h_4 = 0$;
- (iii) $h_1^3 + 3h_1h_2 + h_3 = 0$, $3h_1^2h_2 + 7h_2^2 - h_1h_3 - 10h_4 = 0$.

Доказательство. По теореме 1.10 все коэффициенты h_k являются полиномами от h_1, h_2, h_3, h_4 . Рассмотрим разложение функции $\mathcal{S}_{n,f}$ в ряд по переменным $x_0, \dots, x_n$ и перейдем к базису из симметрических функций от этих переменных. Коэффициенты в этом базисе будут полиномами от h_i . При степенях 7 и 9 получим одно и два нетривиальных соотношения соответственно:

$$\begin{aligned} & -2h_3h_1^4 - h_2^2h_1^3 - 5h_4h_1^3 + 3h_2^3h_1 - 3h_3^2h_1 + 15h_2h_4h_1 + 15h_2^2h_3 - 15h_3h_4, \\ & 268h_3h_1^6 + 134h_2^2h_1^5 + 670h_4h_1^5 - 80h_2h_3h_1^4 - 442h_2^3h_1^3 + 3165h_2^2h_3^2h_1^3 \\ & - 2210h_2h_4h_1^3 - 2442h_2^2h_3h_1^2 - 150h_3h_4h_1^2 - 456h_4^2h_1 + 8169h_2h_3^2h_1 \\ & - 14400h_4^2h_1 - 5160h_2^2h_4h_1 + 2835h_3^3 - 264h_2^3h_3 - 4920h_2h_3h_4, \\ & 452h_3h_1^6 + 226h_2^2h_1^5 + 1130h_4h_1^5 + 548h_2h_3h_1^4 - 404h_2^3h_1^3 + 1965h_2^2h_3^2h_1^3 \\ & - 2020h_2h_4h_1^3 - 3444h_2^2h_3h_1^2 + 3120h_3h_4h_1^2 - 894h_2^4h_1 + 4683h_2h_3^2h_1 \\ & - 1800h_4^2h_1 - 4830h_2^2h_4h_1 + 1296h_3^3 - 4218h_2^3h_3 + 3570h_2h_3h_4. \end{aligned}$$

Легко проверить, что радикал идеала, порожденного этими полиномами, имеет в $\mathbb{Q}[h_1, \dots, h_4]$ примарное разложение в сумму идеалов

$$(h_1, h_3), \quad (h_3, h_2^2 + 5h_4), \quad (h_1^3 + 3h_1h_2 + h_3, 3h_1^2h_2 + 7h_2^2 - h_1h_3 - 10h_4).$$

Первый случай по лемме 1.11 соответствует нечетным функциям. □

Теорема 3.2. Любая 3-жесткая функция совпадает с одной из следующих:

- (i) функция (2), задающая двупараметрический род Тодда;
- (ii) эллиптический синус Якоби;
- (iii) эллиптическая функция уровня 4.

Доказательство. Как отмечено выше, двупараметрический род Тодда является n -жестким для любого n , в частности, для $n = 3$. Тот факт, что эллиптический синус Якоби и эллиптическая функция уровня 4 являются 3-жесткими, следует из классических результатов теории эллиптических функций (см. приложение А). Проверим, что нет других 3-жестких функций.

По теореме 1.10 любое решение однозначно определяется коэффициентами h_i с $i = 1, 2, 3, 4$. По теореме 3.1 решения лежат в аффинном пространстве с координатами $h_1, \dots, h_4$ в объединении трех двумерных неприводимых компонент. Поскольку решения, принадлежащие этим компонентам, задаются различными формальными рядами, им соответствуют различные наборы коэффициентов h_1, h_2, h_3, h_4 . Таким образом, из единственности разложения алгебраического многообразия в объединение неприводимых компонент следует, что других решений нет. □

§ 4. Топологическая интерпретация решений функционального уравнения Хирцебруха

Опишем связь задачи о многообразии решений n -уравнения Хирцебруха с задачей описания n -жестких родов Хирцебруха (см. определение 4.3). Мы дадим все необходимые понятия и сформулируем результаты. Детали см. в [14].

Рассмотрим формальный ряд $f(x) = x + \sum_{k=0}^{\infty} f_k x^{k+1}$ с коэффициентами f_k из некоторого коммутативного ассоциативного кольца R . Тогда для любого m произведение $\prod_{i=1}^m x_i / f(x_i)$ является симметрической функцией по переменным x_i , $i = 1, \dots, m$. Соответственно оно может быть выражено через элементарные симметрические функции:

$$L_{f,m} := L_{f,m}(e_1, \dots, e_m) = \prod_{i=1}^m \frac{x_i}{f(x_i)}.$$

Подстановка $x_{m+1} \mapsto 0$ переводит e_i в e_i при $i \leq m$ и в нуль при $i = m+1$. Таким образом, выполнено равенство $L_{f,m+1}|_{e_{m+1}=0} = L_{f,m}$ рядов от переменных $e_1, \dots, e_m$, хотя слева переменные e_i зависят от $x_1, \dots, x_n$, а справа — от $x_1, \dots, x_{n+1}$.

В кольце $R[[e_1, e_2, \dots]]$ с градуировкой $\deg e_i = 2i$ элементы $L_{f,m}$ и $L_{f,m+1}$ совпадают в степенях, не превосходящих $2m$. Таким образом, мы можем говорить о сходимости последовательности $L_{f,m}$ при $m \rightarrow \infty$. Обозначим предел через L_f .

Пусть задано m -мерное комплексное векторное расслоение ξ над конечномерным пространством B . Результат подстановки в L_f классов Чженя $c_i(\xi)$ вместо переменных e_i называется *комплексным характеристическим классом Хирцебруха* расслоения ξ (или, короче, *классом Хирцебруха* расслоения ξ):

$$L_f(\xi) = L_f(c_1(\xi), \dots, c_m(\xi)) \in H^*(B; R).$$

Так как $c_i(\xi) = 0$ при $i > m$, то $L_f(\xi) = L_{f,m}(\xi)$. *Комплексным характеристическим классом Хирцебруха* комплексного многообразия называется класс Хирцебруха его касательного расслоения.

Обратим внимание, что $c_i(\xi) = c_i(\xi \oplus \ell)$, где ℓ есть l -мерное тривиальное комплексное расслоение, $l \geq 1$.

Говорят, что гладкое многообразие M^{2n} имеет *стабильно комплексную структуру*, если для некоторого $m \geq n$ задано комплексное m -мерное расслоение $\xi \rightarrow M^{2n}$ и фиксирован изоморфизм вещественных векторных расслоений

$$T(M^{2n}) \oplus \mathbb{R}^{2m-2n} \rightarrow \xi.$$

Комплексный род Хирцебруха $L_f(M^{2n})$ стабильно комплексного многообразия M^{2n} определен формулой

$$L_f(M^{2n}) = (L_{f,m}(\xi), \langle M^{2n} \rangle) \in R,$$

где $\langle M^{2n} \rangle \in H_{2n}(M^{2n}, \mathbb{Z})$ — фундаментальный цикл многообразия. Соответствие $[M^{2n}] \rightarrow L_f(M^{2n})$ задает кольцевой гомоморфизм $L_f: \Omega_U \rightarrow R$, где Ω_U — кольцо кобордизмов стабильно комплексных многообразий.

Обозначим через $(M^{2n}; T^k)$ пару, где M^{2n} — гладкое многообразие со стабильно комплексной структурой и согласованным с этой структурой гладким действием компактного тора T^k .

Умножение на комплексные числа задает действие окружности $S^1 = \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$ на комплексном линейном пространстве $\mathbb{C}^{N+1}$ и, следовательно, свободное действие на сфере $S^{2N+1} = \{(z_1, \dots, z_{N+1}) \in \mathbb{C}^{N+1} : \sum_{k=1}^{N+1} |z_k|^2 = 1\}$. Получаем расслоение $S^{2N+1} \rightarrow \mathbb{C}P^N$ со слоем S^1 и для каждого k прямое произведение расслоений

$$E_{k,N} = \prod S^{2N+1} \rightarrow B_{k,N} = \prod \mathbb{C}P^N.$$

Мы можем взять индуцированные расслоения гладких многообразий $\pi_N: E_{k,N} \times_{T^k} M^{2n} \rightarrow B_{k,N}$ со слоем M^{2n} .

В теории комплексных кобордизмов $U^*(\cdot)$ определен гомоморфизм Гизина $\pi_{N,!}: U^*(E_{k,N} \times_{T^k} M^{2n}) \rightarrow U^*(B_{k,N})$, который задает предельный гомоморфизм $\pi_!: U^*(E_k \times_{T^k} M^{2n}) \rightarrow U^*(B_k)$, где $B_k = \prod \mathbb{C}P^\infty$ и $U^*(B_k) = \Omega_U[[x_1, \dots, x_k]]$.

Определение 4.1 (см. [14]). *Универсальным торическим родом* пары (M^{2n}, T^k) называется формальный ряд

$$\Phi(M^{2n}; T^k) = \pi_!(1) \in U^{-2n}(B_k) \subset \Omega_U[[x_1, \dots, x_k]].$$

Теорема 4.2 [14]. *Имеет место формула*

$$\Phi(M^{2n}; T^k) = [M^{2n}] + \sum_{|\omega| > 0} g_\omega(M^{2n}; T^k) x^\omega,$$

где $x^\omega = x_1^{i_1} \cdots x_k^{i_k}$, $|\omega| = i_1 + \cdots + i_k$ и $g_\omega(M^{2n}; T^k) \in \Omega_U^{-2(n+|\omega|)}$ — класс комплексных кобордизмов пространства $G_\omega(M^{2n})$ расслоения $G_\omega(M^{2n}) \rightarrow B_\omega$ со слоем M^{2n} , причем $[B_\omega] = 0 \in \Omega_U$.

Таким образом, для каждого рода Хирцебруха $L_f: \Omega_U \rightarrow R$ определен так называемый эквивариантный род $L_{f,T}$, сопоставляющий паре $(M^{2n}; T^k)$ ряд

$$\Phi_f(M^{2n}; T^k) = L_f[M^{2n}] + \sum_{|\omega| > 0} L_f[G_\omega(M^{2n})] x^\omega.$$

Определение 4.3. Род Хирцебруха L_f называется M^{2n} -жестким, если

$$\Phi_f(M^{2n}; T^k) = L_f[M^{2n}] \in R.$$

$\mathbb{C}P^n$ -жесткий род Хирцебруха мы будем называть n -жестким.

Из теоремы 4.2 вытекает

Следствие 4.4. *Род Хирцебруха L_f является M^{2n} -жестким тогда и только тогда, когда $L_f[G_\omega(M^{2n})] = 0$ для всех ω , $|\omega| > 0$.*

Рассмотрим $(n+1)$ -мерное комплексное векторное расслоение $\xi \rightarrow X$ над гладким стабильно комплексным многообразием X . Пространство комплексной проективизации $\mathbb{C}P(\xi) \rightarrow X$ с комплексным проективным пространством $\mathbb{C}P^n$ в качестве слоя имеет каноническую структуру стабильно комплексного многообразия.

Определение 4.5. Род Хирцебруха $L_f: \Omega_U \rightarrow R$ называется n -мультипликативным, если $L_f[\mathbb{C}P(\xi)] = L_f[\mathbb{C}P^n] L_f[X]$ для любых $(n+1)$ -мерных комплексных векторных расслоений $\xi \rightarrow X$.

Теорема 4.6. *Любой n -мультипликативный род Хирцебруха является $\mathbb{C}P^n$ -жестким.*

Доказательство вытекает из того факта, что многообразия $G_\omega(\mathbb{C}P^n)$, описанные в [14], являются комплексными проективизациями расслоений над стабильно комплексными многообразиями B_ω , такими, что $[B_\omega] = 0$.

В случае, когда действие тора T^k на многообразии M^{2n} имеет только изолированные неподвижные точки, имеет место теорема локализации универсального торического рода $\Phi(M^{2n}; T^k)$ (см. [14]) и, следовательно, теорема локализации рода $\Phi_f(M^{2n}; T^k)$ для любого рода Хирцебруха L_f .

Каноническое действие тора T^{n+1} на $\mathbb{C}P^n$ дает пару $(\mathbb{C}P^n; T^{n+1})$, для которой имеет место формула локализации

$$\Phi_f(\mathbb{C}P^n) = \sum_{j=0}^n \prod_{i \neq j} \frac{1}{f(x_j - x_i)}.$$

Следствие 4.7. *Многообразие $M_n = \{f(x)\}$ решений n -уравнения Хирцебруха с $C_n(f) = L_f[\mathbb{C}P^n]$ совпадает с многообразием n -мультипликативных родов Хирцебруха $\{L_f\}$.*

Приложение А. Эллиптические функции уровня d

Возьмем τ в верхней полуплоскости комплексного переменного и положим $L = 2\pi i(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}\tau)$. Существует L -периодическая функция $g(x)$, имеющая в начале координат нуль порядка d , а в некоторой точке P — полюс порядка d и не имеющая других нулей и полюсов по модулю L . В [8, приложение I, §6] доказывается существование и единственность такой функции в терминах θ -функций. Известно, что тогда $P = 2\pi i(k + l\tau)/d$, $k, l \in \mathbb{Z}$, $P \neq 0$. Функция $g(x)$ при условии нормировки $g(x) = x^d + \dots$ однозначно определяется точкой P .

При данных предположениях можно извлечь единственный корень степени d с условием нормировки

$$f(x) = \sqrt[d]{g(x)} = x + \dots.$$

Функция $f(x)$ является периодической относительно решетки dL . Такие функции называются *эллиптическими уровня d* . Заметим, что функция однозначно определена выбором решетки L и точки P .

Опишем явно реализацию эллиптической функции уровня d , использованную в работе [7]. Функция

$$\Phi(x) = \frac{\sigma(\alpha - x)}{\sigma(\alpha)\sigma(x)} e^{x\zeta(\alpha)}$$

называется функцией Бейкера–Ахиезера, где $\sigma(x)$ — целая функция, σ -функция Вейерштрасса. Функция $\Phi(x)$ зависит от параметра α и параметров эллиптической кривой g_2 и g_3 , имеет простой полюс при $x = 0$ и простой нуль при $x = \alpha$. Рассмотрим функцию

$$f(x) = \frac{e^{\lambda x}}{\Phi(x)}. \quad (9)$$

Пусть $2\omega_1, 2\omega_2$ — периоды эллиптической кривой. Возьмем $\alpha = 2\frac{n}{d}\omega_1 + 2\frac{m}{d}\omega_2$, $\lambda = -2\frac{n}{d}\zeta(\omega_1) - 2\frac{m}{d}\zeta(\omega_2) + \zeta(\alpha)$, где $m, n = 0, \dots, d-1$. Тогда

$$f(x + 2\omega_1) = e^{-2\pi i n/d} f(x), \quad f(x + 2\omega_2) = e^{-2\pi i m/d} f(x). \quad (10)$$

Из этих явных формул следует, что функция $f(x)$ является эллиптической уровня d .

Приведем разложение в ряд функции $f(x)$ до x^5 включительно:

$$\begin{aligned} f(x) = x + 2\lambda \frac{x^2}{2!} + 3(\lambda^2 + \wp(\alpha)) \frac{x^3}{3!} + 4(\lambda^3 - \wp'(\alpha) + 3\lambda\wp(\alpha)) \frac{x^4}{4!} + \\ + (5\lambda^4 + 30\lambda^2\wp(\alpha) + 45\wp^2(\alpha) - 20\lambda\wp'(\alpha) - 3g_2) \frac{x^5}{5!} + \dots \end{aligned}$$

Определение А.1. Формальный ряд $f(x)$ над кольцом $R \otimes \mathbb{Q}$ называется рядом Гурвица, если его можно записать в виде

$$f(x) = x + \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i \frac{x^{i+1}}{(i+1)!},$$

где $\xi_i \in R$, $i \in \mathbb{N}$.

Теорема А.2 (см. [14]). Функция $f(x)$, определенная формулой (9), задается рядом Гурвица над кольцом $\mathbb{Z}[b_1, b_2, b_3, b_4]$, где

$$b_1 = \lambda, \quad b_2 = \wp(\alpha), \quad b_3 = \wp'(\alpha), \quad b_4 = g_2/2.$$

Напомним классическую реализацию эллиптической функции уровня 2 в терминах $\wp$ -функции Вейерштрасса. Возьмем в качестве точки P один из полупериодов $\omega_1, \omega_2, \omega_3 = \omega_1 + \omega_2$. Выбирая точку $P_k = \omega_k$, получаем $g(x) = \wp(x) - e_k$, где $e_k = \wp(\omega_k)$. Напомним, что $(\wp'(z))^2 = (\wp(z) - e_1)(\wp(z) - e_2)(\wp(z) - e_3)$. Положим

$$f_k(x) = \frac{1}{\sqrt{\wp(x) - e_k}}, \quad k = 1, 2, 3.$$

Имеем

$$f'_k(x) = -\frac{1}{2} \frac{\wp'(x)}{(\wp(x) - e_k)^{3/2}}.$$

Следовательно,

$$(f'_k(x))^2 = \frac{\wp(x) - e_i}{\wp(x) - e_k} \cdot \frac{\wp(x) - e_j}{\wp(x) - e_k} = (1 + (e_i - e_k)f_k^2(x))(1 + (e_j - e_k)f_k^2(x)),$$

где $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$. Различным точкам P_k соответствуют различные аналитические функции. Но при этом для каждого k мы получаем двухпараметрическое семейство функций, удовлетворяющих дифференциальному уравнению одного и того же вида $(f')^2 = 1 + 2\delta f^2 + \varepsilon f^4$, задающему эллиптический синус Якоби с параметрами δ и ε . Мы видим, что общее аналитическое решение этого уравнения задает единственное разложение в ряд при $x = 0$, коэффициенты которого — полиномы от δ и ε . При этом замена точки P соответствует перестановке полупериодов $\omega_1, \omega_2, \omega_3$. А именно, $f_k(x) = \operatorname{sn}(x; \varepsilon_k, \delta_k)$, где $2\delta_k = e_i + e_j - 2e_k$, $\varepsilon_k = (e_i - e_k)(e_j - e_k)$.

Ниже (см. лемму В.1) мы увидим, что для произвольного d мы получаем одно двухпараметрическое семейство функций, задающих эллиптический род уровня d .

Предложение А.3. Эллиптическая функция уровня d является n -жесткой, если d делит $n + 1$.

Доказательство. Пусть $f(x)$ — эллиптическая функция уровня d . Тогда для $x_0, \dots, x_n$, различных по модулю L , функция

$$F(x) := \prod_{i=0}^n \frac{1}{f(x - x_i)}$$

для $n + 1 = rd$ является эллиптической. Действительно, рассмотрим сдвиги аргумента функции $F(x)$ на периоды $2\omega_1, 2\omega_2$. Функция $f^d(z + a)$ является эллиптической, поэтому при сдвиге аргумента на период функция $f(x + a)$ умножается на корень из единицы степени d для любого a . Этот корень из единицы зависит от выбора периода, но не зависит от $a \in \mathbb{C}$. Отсюда следует, что функция $F(x)$ не меняется при сдвигах аргумента на периоды.

Поскольку функция $F(x)$ является эллиптической на кривой $\mathbb{C}/L$, сумма вычетов в ее полюсах равна нулю:

$$0 = \sum_{x \in \mathbb{C}/\Lambda} \operatorname{res}_x F = \frac{1}{f(x_0 - x_1) \cdots f(x_0 - x_n)} + \cdots + \frac{1}{f(x_n - x_0) \cdots f(x_n - x_{n-1})}.$$

Заметим, что это равенство выполнено в кольце формальных рядов от переменных x_i , поэтому оно выполнено для любых x_i , а не только при различных по модулю L . Последнее условие равносильно n -жесткости. $\square$

Приложение В. Преобразования эллиптических функций и модулярные формы

Рассмотрим пару функций

$$\operatorname{sn}^2(x, k) = \varphi(x), \quad \operatorname{sn}^2(x/M, \lambda) = \psi(x).$$

Когда эти функции алгебраически зависимы? Пусть функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ имеют соответственно периоды $2\omega_1, 2\omega_2$ и $2\tilde{\omega}_1, 2\tilde{\omega}_2$. Положим $L_1 = \langle 2\omega_1, 2\omega_2 \rangle$, $L_2 = \langle 2\tilde{\omega}_1, 2\tilde{\omega}_2 \rangle$. Из алгебраической зависимости функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ следует (см. [11, гл. VI]), что $L_1 \otimes \mathbb{Q} = L_2 \otimes \mathbb{Q}$. Более того, эти условия оказываются равносильными.

Можно ограничиться рассмотрением только преобразований вида

$$\omega_1 = \alpha\tilde{\omega}_1 + \beta\tilde{\omega}_2, \quad \omega_2 = \gamma\tilde{\omega}_1 + \delta\tilde{\omega}_2$$

с целыми $\alpha, \beta, \gamma, \delta$. Тогда площадь параллелограмма периодов, натянутого на ω_1, ω_2 , в $m = \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix}$ раз больше площади параллелограмма периодов, натянутого на $\tilde{\omega}_1, \tilde{\omega}_2$. Такое преобразование называется *преобразованием степени m* . Известно, что преобразование степени 1 является композицией преобразований

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \tilde{\omega}_1 + \tilde{\omega}_2, & \omega_2 &= \tilde{\omega}_2, \\ \omega_1 &= -\tilde{\omega}_1, & \omega_2 &= \tilde{\omega}_2. \end{aligned}$$

Оказывается, что любое преобразование степени m является композицией преобразований степени 1 и следующих преобразований (называемых *главными преобразованиями степени m*):

$$\begin{cases} \omega_1 = m\tilde{\omega}_1, \\ \omega_2 = \tilde{\omega}_2 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \omega_1 = \tilde{\omega}_1/m, \\ \omega_2 = \tilde{\omega}_2 \end{cases}$$

и

$$\begin{cases} \omega_1 = \tilde{\omega}_1, \\ \omega_2 = m\tilde{\omega}_2 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \omega_1 = \tilde{\omega}_1, \\ \omega_2 = \tilde{\omega}_2/m, \end{cases}$$

где m — натуральное число. В первом случае преобразование состоит в изменении первого периода, а во втором — в изменении второго.

Как мы видели выше, в случае эллиптической функции уровня 2 мы получаем функции f_k , удовлетворяющие дифференциальному уравнению $(f'_k)^2 = 1 + 2\varepsilon f_k^2 + \delta f_k^4$. Параметры ε, δ выражаются через e_1, e_2, e_3 . Преобразование степени 1 переставляет e_1, e_2, e_3 . Таким образом, группа преобразований степени 1 действует на пространстве параметров дифференциального уравнения, переставляя частные аналитические решения уравнения. Это действие нетривиально, однако, несмотря на свободу выбора одной из трех точек P , мы получаем одно универсальное решение дифференциального уравнения, где параметры ε, δ являются независимыми переменными.

Чтобы распространить рассуждение на случай эллиптических функций уровня d , напомним сначала некоторые понятия.

Рассмотрим решетку $L = \langle 1, \tau \rangle$, где $\text{Im}(\tau) > 0$. На верхней полуплоскости группа $\text{SL}(2, \mathbb{R})$ действует дробно-линейными преобразованиями. Подгруппа $\text{SL}(2, \mathbb{Z})$, сохраняющая L , называется *модулярной группой*. *Модулярной формой веса k* для модулярной группы Γ называется функция f на верхней полуплоскости, для которой

$$f(gx) = (c\tau + d)^k f(x)$$

для любых $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma$, голоморфная во всех параболических точках.

Рассматриваются не только группы автоморфизмов заданной решетки L , но и некоторые другие подгруппы в $\text{SL}(2, \mathbb{Z})$ конечного индекса. Модулярные формы нечетного веса равны нулю. Модулярные формы четного веса задаются рядами

$$G_{2k} = \sum_{(m,n) \neq (0,0)} \frac{1}{(m + n\tau)^{2k}}.$$

Модулярные инварианты определяются как

$$g_2 = 60G_4, \quad g_3 = 140G_6.$$

Известно, что любая модулярная форма выражается как полином от g_2, g_3 .

Предложение В.1. Семейство эллиптических функций уровня d двупараметрическое. В качестве двух независимых параметров могут быть (неканонически) выбраны g_2, g_3 .

Доказательство. Пусть эллиптическая функция $f(x)$ уровня d задается формулой (9) и соответствует решетке $L = \langle 2\omega_1, 2\omega_2 \rangle$ с базисом $\{2\omega_1, 2\omega_2\}$ и точке $P = 2\frac{m}{d}\omega_1 + 2\frac{n}{d}\omega_2$, которую далее для краткости будем называть (m, n) -точкой. Мы можем заменить базис в решетке L таким образом, чтобы в новом базисе точка P была $(k, 0)$ -точкой для некоторого целого k , взаимно простого с d . Обозначим через $\tilde{f}(x)$ функцию, определенную в новом базисе той же решетки и для той же точки P , которая в новом базисе является $(k, 0)$ -точкой.

Функции $f^d(x)$ и $\tilde{f}^d(x)$ являются L -периодическими. Нули этих функций расположены в точках решетки L и имеют порядок d , полюсы расположены в точках $P + L$ и также имеют порядок d . Отсюда и из условий $f^d(x) = x^d + O(x^{d+1})$ и $\tilde{f}^d(x) = x^d + O(x^{d+1})$ следует, что $f^d(x) = \tilde{f}^d(x)$. Нормировка функций при $x = 0$ дает равенство $f(x) = \tilde{f}(x)$.

Из формулы (10) следует, что функция $f(x)$, определенная для $(k, 0)$ -точки P , не меняется при сдвиге аргумента на период $2\omega_2$. Выберем такие целые числа n_1 и n_2 , что $kn_2 - dn_1 = 1$. При сдвиге точки P на период $2\omega_2$ мы получаем, что в базисе $\{2k\omega_1 + 2d\omega_2, 2n_1\omega_1 + 2n_2\omega_2\}$ точка P становится $(1, 0)$ -точкой. Таким образом, замена базиса решетки и, возможно, сдвиг точки P на период, позволяет ограничиться только $(1, 0)$ -точкой P , т. е. та же функция $f(x)$ может быть явно задана формулой (9) при той же решетке L с другим базисом. Таким образом, коэффициенты ряда $f(x)$ могут быть выражены через параметры g_2, g_3 решетки L . $\square$

Замечание В.2. Функция $f^d(x)$ является эллиптической, и в ее разложении в ряд все коэффициенты являются полиномами от g_2, g_3 . В то же время, уже коэффициент при x^2 ряда $f(x)$ может быть не полиномом от g_2, g_3 , а функцией от них.

Пример В.3. Рассмотрим случай $d = 4$. Как мы знаем, эллиптической функцией уровня 2 является только эллиптический синус Якоби $\operatorname{sn}(x)$. Начиная с решетки $L = \langle 2K, 2iK' \rangle$, мы получаем, что $\operatorname{sn}(x)$ преобразуется при сдвигах аргумента следующим образом:

$$\operatorname{sn}(x + 2K) = -\operatorname{sn}(x), \quad \operatorname{sn}(x + 2iK') = \operatorname{sn}(x).$$

Применяя деление первого периода на два, известное как преобразование Ландена (см. [11, гл. VI, §38]), мы можем получить явное выражение для функции $M \operatorname{sn}(x/M; \lambda)$, а именно,

$$M \operatorname{sn} \left(\frac{x}{M}; \lambda \right) = \operatorname{sn}(x; k) \sqrt{\frac{1 - \operatorname{sn}^2(x; k)}{1 - k \operatorname{sn}^2(x; k)}} = \frac{\operatorname{sn}(x; k) \operatorname{cn}(x; k)}{\operatorname{dn}(x; k)},$$

где $M = 1/(1+k') = \operatorname{sn}^2(K/2; k)$, $\lambda = (1-k')/(1+k')$. Из этого выражения видно, что функция $M^2 \operatorname{sn}^2(x/M; \lambda)$ является двоякопериодической относительно $L' = \langle K, 2iK' \rangle$ с нулями только в точках решетки L' и полюсами только в точках множества $K/2 + L'$, все нули и полюсы степени 2.

Рассмотрим функцию $M \operatorname{sn}(x/M; \lambda)$ относительно решетки L . Она является двоякопериодической и в параллелограмме периодов имеет два простых нуля в 0 и K и два простых полюса в $K/2$ и $3K/2$. Тогда функция

$$M^2 \operatorname{sn}^2(x/M; \lambda) \operatorname{sn}^2(x; k) \operatorname{sn}^2(x - K/2; k)$$

имеет нули только в точках решетки L , полюсы только в точках множества $K/2 + L$, все нули и полюсы степени 4. Обозначим через $\mathcal{L}$ преобразование Ландена (т. е. $\mathcal{L}(\operatorname{sn}(x; k)) = M \operatorname{sn}(x/M; \lambda)$).

Пусть $f_2(x) = \operatorname{sn}(x; k)$ — эллиптическая функция уровня 2, соответствующая выбору точки P с $(m, n) = (1, 0)$. Тогда получаем эллиптическую функцию уровня 4:

$$f_4(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\mathcal{L}(f_2(x)) f_2(x) f_2(x - K/2)}.$$

С другой стороны, функция $f_2(x)$ восстанавливается из $f_4(x)$ по формуле

$$f_2(x) = f_4(x)f_4(x + K/2),$$

как следует из единственности функции $f_2(x)$ с заданными нулями и полюсами при условии нормировки. Таким образом, при помощи преобразования Ландена устанавливается взаимно однозначное соответствие между семействами эллиптических функций уровня 2 и уровня 4.

Замечание В.4. Описанное выше соответствие между эллиптическими функциями уровня 2 и эллиптическими функциями уровня 4 зависит от выбора точек порядка 2 и 4. Явная формула этого соответствия может измениться.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] V. M. Buchstaber, A. P. Veselov, *On a remarkable functional equation in the theory of generalized Dunkl operators and transformations of elliptic genera*, Math. Z., **223**:4 (1996), 595–607.
- [2] V. M. Buchstaber, G. Felder, A. P. Veselov, *Elliptic Dunkl operators, root systems, and functional equations*, Duke Math. J., **76**:3 (1994), 885–911.
- [3] В. М. Бухштабер, А. П. Веселов, *Операторы Данкля, функциональные уравнения и преобразования эллиптических родов*, УМН, **49**:2(296) (1994), 147–148.
- [4] Ф. Хирцебрух, *Топологические методы в алгебраической геометрии*, Мир, М., 1973.
- [5] O. R. Musin, *On rigid Hirzebruch genera*, Mosc. Math. J., **11**:1 (2011), 139–147.
- [6] W. Fulton, *Young Tableaux. With Applications to Representation Theory and Geometry*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1997.
- [7] И. М. Кричевер, *Обобщенные эллиптические роды и функции Бейкера–Ахизера*, Матем. заметки, **47**:2 (1990), 34–45.
- [8] F. Hirzebruch, Th. Berger, R. Jung, *Manifolds and Modular Forms*, Fiedr. Vieweg & Sons, Braunschweig, 1992.
- [9] Э. Т. Уиттекер, Дж. Н. Ватсон, *Курс современного анализа, ч. 2. Трансцендентные функции*, Физматлит, М., 1963.
- [10] В. М. Бухштабер, Е. Ю. Бунькова, *Формальные группы Кричевера*, Функц. анализ и его прил., **45**:2 (2011), 23–44.
- [11] Н. И. Ахизер, *Элементы теории эллиптических функций*, Наука, М., 1970.
- [12] В. М. Бухштабер, Е. Ю. Бунькова, *Универсальная формальная группа, определяющая эллиптическую функцию уровня 3*, Чебышевский сб., **16**:2 (2015), 66–78.
- [13] В. М. Бухштабер, Е. Ю. Бунькова, *Многообразия решений функциональных уравнений Хирцебруха*, в кн.: Современные проблемы математики, механики и математической физики, Сб. статей, Тр. МИАН, т. 290, МАИК, М., 2015, 136–148.
- [14] V. M. Buchstaber, T. E. Panov, *Toric Topology*, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2015.
- [15] В. Н. Сачков, *Введение в комбинаторные методы дискретной математики*, МЦНМО, 2004.
- [16] С. П. Новиков, *Операторы Адамса и неподвижные точки*, Изв. АН СССР, сер. матем., **32**:6 (1968), 1245–1263.

Математический институт имени В. А. Стеклова РАН
e-mail: buchstab@mi.ras.ru

Поступила в редакцию
5 октября 2015 г.

Математический институт имени В. А. Стеклова РАН
e-mail: netay@iitp.ru