Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. И. Буфетов, Операторные эргодические теоремы для действий свободных полугрупп и групп, *Функци. анализ и его прил.*, 2000, том 34, выпуск 4, 1–17

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa322>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.253.173

26 апреля 2023 г., 15:09:22

УДК 517.98

Операторные эргодические теоремы для действий свободных полугрупп и групп*

© 2000. А. И. БУФЕТОВ

§1. Введение

В работе получены новые эргодические теоремы для действий свободных полугрупп и групп сохраняющими меру отображениями. Эти теоремы выводятся из классических эргодических теорем для марковских операторов.

Первые эргодические теоремы для действий произвольных счетных групп были получены в 1965 г. Оселедцем [2], следовавшим идее Какутани [3]. Для действий свободной группы в 1968 г. Гиварш [19] исследовал чезаровские средние равномерных средних по сферам возрастающего радиуса в группе и получил для них статистическую эргодическую теорему. В 1986 г. Григорчук [7] анонсировал индивидуальную эргодическую теорему для этих средних. В 1994 г. Нево [16] Нево и Стайн [18] опубликовали доказательство индивидуальной эргодической теоремы. В 1999 г. Григорчук [8] анонсировал также эргодическую теорему для действий свободных полугрупп.

В настоящей работе предлагается новый способ составления временных средних. Пусть свободная полугруппа или группа действует на вероятностном пространстве сохраняющими меру отображениями. Зафиксируем набор образующих в нашей полугруппе и рассмотрим произвольную стационарную марковскую меру μ на пространстве бесконечных последовательностей образующих. Рассмотрим сферу в нашей полугруппе и усредним ее элементы с весами, соответствующим мере μ . Пусть c_n^μ — чезаровские средние сферических средних. Теорема 1 — индивидуальная эргодическая теорема для средних c_n^μ .

Основная идея доказательства — поставить в соответствие полугрупповому действию и мере μ специально построенный марковский оператор T_μ . Классические эргодические теоремы для оператора T_μ дают эргодические теоремы для средних c_n^μ . Этот подход позволяет получить операторные эргодические теоремы для действий свободных полугрупп и групп (теорема 2).

Теорема 2 позволяет получить эргодические теоремы для действий полугрупп названных в работе *строгими марковскими*. Неформально говоря, полугруппа или группа называется строгой марковской, если множество ее элементов находится во взаимно однозначном соответствии с множеством допустимых слов неприводимой цепи Маркова с конечным числом состояний (точное определение строгой марковской полугруппы и эргодическая теорема для них сформулированы в §9).

Работа построена следующим образом. В §2 описан процесс усреднения, сформулирована эргодическая теорема (теорема 1) и введен марковский оператор T_μ .

*Работа была частично поддержана грантом РФФИ 98-01-00455.

играющий главную роль во всех доказательствах. В §3 сформулирована теорема 2, операторный вариант теоремы 1. Теорема 2 доказана в §§4, 5; из нее следует теорема 1. В §6 обсуждаются необходимые условия инвариантности предела в теоремах 1, 2. В §7 поточечная сходимость средних c_n^μ доказана для произвольной вероятностной инвариантной относительно сдвига меры μ на пространстве последовательностей из образующих. Ничего, однако, не говорится об инвариантности предела в этом общем случае. В §8 инвариантность предела установлена и эргодические теоремы доказаны в случае, когда μ — марковская мера порядка k . В §9 получены эргодические теоремы для действий строго марковских полугрупп.

Я глубоко благодарен Д. В. Аносову, А. М. Вершику, М. Л. Грому, Б. М. Гуревичу, Ю. С. Ильяшенко, В. А. Каймановичу, М. Лину, А. Нево, В. И. Оселедцу, Я. Г. Синаю, В. А. Тиморину, Ж.-П. Туveno, Дж. Фельдману и А. Ю. Фишкину за полезные обсуждения.

Я особенно признателен Р. И. Григорчуку. Его результаты и общение с ним оказали на меня сильное влияние. Эта работа — продолжение начатых им исследований.

§2. Формулировка эргодической теоремы и набросок доказательства

В этом параграфе сформулирован основной результат работы и дан набросок его доказательства.

Пусть (X, ν) — вероятностное пространство, $f_1, \dots, f_m: X \rightarrow X$ — измеримые отображения, сохраняющие меру ν , и $T_1, \dots, T_m: L_1(X, \nu) \rightarrow L_1(X, \nu)$ — соответствующие этим отображениям операторы (т. е. $T_i \varphi = \varphi \circ f_i$ для $\varphi \in L_1(X, \nu)$).

Рассмотрим пространство Ω_m односторонних бесконечных последовательностей из символов $1, \dots, m$:

$$\Omega_m = \{\omega = \omega_1 \omega_2 \dots \omega_n \dots : \omega_i = 1, \dots, m\}.$$

Пусть σ_m — сдвиг на Ω_m , определенный формулой $(\sigma_m \omega)_i = \omega_{i+1}$.

Пусть W_m есть множество всех конечных слов из символов $1, \dots, m$:

$$W_m = \{w = w_1 w_2 \dots w_n : w_i = 1, \dots, m\}.$$

Через $|w|$ обозначим длину слова w . Для всякого $w \in W_m$ рассмотрим множество $C(w) \subset \Omega_m$ всех последовательностей, начинающихся словом w . Для произвольной борелевской меры μ на Ω_m положим $\mu(w) = \mu(C(w))$.

Для всякого $w \in W_m$, $w = w_1 \dots w_n$, определим оператор

$$T_w = T_{w_n} T_{w_{n-1}} \dots T_{w_1}. \quad (1)$$

Пусть μ есть σ_m -инвариантная борелевская вероятностная мера на Ω_m . Зафиксируем $|w| = l$ и рассмотрим сумму операторов T_w с весами $\mu(w)$:

$$s_l^\mu(T) = \sum_{|w|=l} \mu(w) T_w. \quad (2)$$

Усредним $s_l^\mu(T)$ по $l = 0, \dots, n-1$:

$$c_n^\mu(T) = \frac{1}{n} \sum_{l=0}^{n-1} s_l^\mu(T). \quad (3)$$

Пусть μ есть σ_m -инвариантная марковская мера на Ω_m . Тогда, как мы докажем, средние $c_n^\mu(T)\varphi$ сходятся почти всюду и в $L_1(X, \nu)$ для всякой суммируемой функции φ . Для описания их предела нужны дополнительные предположения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Матрицу Q с неотрицательными элементами будем называть *неприводимой*, если при некотором $n > 0$ все элементы матрицы $Q + Q^2 + \dots + Q^n$ положительны. (Если Q стохастическая, это условие означает, что соответствующей цепи Маркова любое состояние достижимо из любого другого).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Матрицу P с неотрицательными элементами назовем *сильно неприводимой*, если P неприводима и PP^T неприводима (здесь P^T — транспонированная матрица P).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Марковскую цепь будем называть *сильно неприводимой*, если ее матрица переходных вероятностей сильно неприводима. Марковскую меру будем называть *сильно неприводимой*, если отвечающая ей цепь сильно неприводима.

ТЕОРЕМА 1. Пусть (X, ν) — вероятностное пространство, $f_1, \dots, f_m: X \rightarrow X$ — отображения, сохраняющие меру ν , и $T_1, \dots, T_m: L_1(X, \nu) \rightarrow L_1(X, \nu)$ — соответствующие этим отображениям операторы.

Пусть μ есть σ_m -инвариантная марковская мера на Ω_m .

Тогда для всякой функции $\varphi \in L_1(X, \nu)$ найдется такая функция $\bar{\varphi} \in L_1(X, \nu)$, что $c_n^\mu(T)\varphi \rightarrow \bar{\varphi}$ почти всюду по мере ν и в $L_1(X, \nu)$ при $n \rightarrow \infty$, причем $\int_X \varphi d\nu = \int_X \bar{\varphi} d\nu$.

Если мера μ сильно неприводима, то $T_j \bar{\varphi} = \bar{\varphi}$, $j = 1, \dots, m$.

Если $\varphi \in L_p(X, \nu)$, $p \geq 1$, то $c_n^\mu(T)\varphi \rightarrow \bar{\varphi}$ также и в $L_p(X, \nu)$.

Пусть I_X есть σ -алгебра $f_1, \dots, f_m$ -инвариантных подмножеств пространств X . Из теоремы 1 следует, что если мера μ сильно неприводима, то функция $\bar{\varphi}$ есть условное математическое ожидание функции φ по отношению к I_X . Пусть $(p_1, \dots, p_m)$ — начальное распределение, а (p_{ij}) — переходные вероятности меры μ .

Основная идея доказательства теоремы 1 состоит в том, что мере μ и операторам $T_1, \dots, T_m$ ставится в соответствие марковский оператор $T_\mu: L_1(X, \nu)^m \rightarrow L_1(X, \nu)^m$, определенный формулой

$$T_\mu(\varphi_1, \dots, \varphi_m) = (\psi_1, \dots, \psi_m), \quad \text{где } \psi_j = \sum_{i=1}^m \frac{p_i p_{ij}}{p_j} T_j \varphi_i. \quad (4)$$

Отождествим пространство $L_1(X, \nu)^m$ с пространством $L_1(X \times \{1, \dots, m\}, \nu \times p)$, где мера $\nu \times p$ есть произведение меры ν на X и распределения вероятностей $p = (p_1, \dots, p_m)$ на $\{1, \dots, m\}$. При этом отождествлении оператор T_μ становится сохраняющим меру марковским оператором на пространстве $L_1(X \times \{1, \dots, m\}, \nu \times p)$. Из эргодической теоремы для оператора T_μ следует теорема 1; детали рассуждения — в §§4, 5.

Теорема 1 обобщает эргодические теоремы Григорчука [7, 8], Нево [16] и Невостайна [18] для сохраняющих меру действий свободных полугрупп и групп.

Чтобы получить эргодические теоремы из [7, 18] для действий свободной группы с l образующими, положим $m = 2l$, обозначим образующие через $g_1, \dots, g_l$, положим $g_{l+i} = g_i^{-1}$ и определим марковскую цепь таким образом: положим $p_{i, i+l} = p_{i+l, i} = 0$ при $l \geq 1$ и $p_{ij} = 1/(m-1)$ при $|i-j| \neq l$ (т.е. переходы из образующего в его обратный и наоборот запрещены, а все остальные

переходы равновероятны). Стационарное распределение этой цепи есть, очевидно, $(1/m, \dots, 1/m)$; пусть μ — соответствующая стационарная марковская мера на Ω_m . Мера μ сильно неприводима, а средние $s_l^\mu(T)$ суть равномерные средние по сферам в свободной группе; эргодическая теорема для их чезаровских средних следует теперь из теоремы 1.

§3. Операторная эргодическая теорема

В этом параграфе сформулирован операторный вариант теоремы 1.

Пусть (X, ν) — пространство Лебега, и пусть $T_1, \dots, T_m: L_1(X, \nu) \rightarrow L_1(X, \nu)$ — линейные операторы. Операторы T_w , $s_l^\mu(T)$ и $c_n^\mu(T)$ вводятся по формулам (1)–(3).

Напомним стандартную терминологию.

Линейный оператор на банаховом пространстве называется *сжатием*, если его норма не превосходит единицы.

Линейный оператор $T: L_1(X, \nu) \rightarrow L_1(X, \nu)$ называется *положительным*, если образ неотрицательной функции под его действием есть неотрицательная функция.

Линейный оператор $T: L_1(X, \nu) \rightarrow L_1(X, \nu)$ называется L_1 - L_∞ -*сжатием*, если $\|T\|_{L_1} \leq 1$, $\|T\|_{L_\infty} \leq 1$.

Линейный оператор $T: L_1(X, \nu) \rightarrow L_1(X, \nu)$ *сохраняет меру* ν , если для всех $\varphi \in L_1(X, \nu)$ имеем

$$\int_X \varphi d\nu = \int_X T\varphi d\nu.$$

ТЕОРЕМА 2. Пусть μ есть σ_m -инвариантная марковская мера на Ω_m .

Пусть $\nu(X) < \infty$ и $T_1, \dots, T_m$ — положительные L_1 - L_∞ -сжатия. Тогда для всякой функции $\varphi \in L_1(X, \nu)$ найдется функция $\bar{\varphi} \in L_1(X, \nu)$, такая, что $c_n^\mu(T)\varphi \rightarrow \bar{\varphi}$ почти всюду по мере ν и в $L_1(X, \nu)$ при $n \rightarrow \infty$.

Если мера μ сильно неприводима, то $T_i\bar{\varphi} = \bar{\varphi}$, $i = 1, \dots, m$.

Если операторы $T_1, \dots, T_m$ сохраняют меру ν , то $\int_X \varphi d\nu = \int_X \bar{\varphi} d\nu$. Если $p \geq 1$, то $c_n^\mu(T)\varphi \rightarrow \bar{\varphi}$ также и в $L_p(X, \nu)$.

Теорема 1 вытекает из теоремы 2.

Теперь мы формулируем две леммы, одна из которых есть операторная эргодическая теорема в гильбертовом пространстве, а другая — в L_p , $p > 1$.

ЛЕММА 1. Пусть μ есть σ_m -инвариантная марковская мера на Ω_m .

Пусть H — гильбертово пространство, и пусть линейные операторы $T_1, \dots, T_m: H \rightarrow H$ — сжатия. Тогда для всякого $h \in H$ найдется вектор $\bar{h} \in H$, такой, что $c_n^\mu(T)h \rightarrow \bar{h}$ в H при $n \rightarrow \infty$.

Если мера μ сильно неприводима, то $T_i\bar{h} = \bar{h}$, $i = 1, \dots, m$.

ЛЕММА 2. Пусть μ есть σ_m -инвариантная марковская мера на Ω_m , (X, ν) — пространство Лебега и $p > 1$.

Пусть $T_1, \dots, T_m: L_p(X, \nu) \rightarrow L_p(X, \nu)$ — положительные сжатия. Тогда для всякой функции $\varphi \in L_p(X, \nu)$ найдется функция $\bar{\varphi} \in L_p(X, \nu)$, такая, что $c_n^\mu(T)\varphi \rightarrow \bar{\varphi}$ почти всюду по мере ν и в $L_p(X, \nu)$ при $n \rightarrow \infty$.

Если мера μ сильно неприводима, то $T_i\bar{\varphi} = \bar{\varphi}$, $i = 1, \dots, m$.

Леммы 1, 2 и теорема 2 доказаны в §§4, 5.

§ 4. Сходимость временных средних

В этом параграфе доказана сходимость временных средних в теоремах 1 и 2. Основная идея — оператор T_μ , вводимый так же, как в § 2.

Пусть L — линейное пространство над $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$, $T_1, \dots, T_m: L \rightarrow L$ — линейные операторы и μ есть σ_m -инвариантная марковская мера на Ω_m с начальным распределением $(p_1, \dots, p_m)$ и матрицей переходных вероятностей $P = (p_{ij})$. Мы всегда будем считать, что $p_i > 0$ при всех $i = 1, \dots, m$.

Рассмотрим взвешенную сумму операторов T_w по словам длины l с фиксированным последним символом:

$$s_l^{\mu,i}(T) = \sum_{\{w: |w|=l, w_l=i\}} \mu(w) T_w. \quad (5)$$

Усредним $s_l^{\mu,i}(T)$ по $l = 0, \dots, n-1$:

$$c_n^{\mu,i}(T) = \frac{1}{n} \sum_{l=0}^{n-1} s_l^{\mu,i}(T). \quad (6)$$

ЛЕММА 3. Для любого натурального l и любого $j \in \{1, \dots, m\}$ выполняется равенство

$$s_{l+1}^{\mu,j} = \sum_{i=1}^m p_{ij} T_j s_l^{\mu,i}. \quad (7)$$

Доказательство — прямое вычисление.

Мы можем переписать (7) так:

$$\frac{s_{l+1}^{\mu,j}}{p_j} = \sum_{i=1}^m \frac{p_i p_{ij}}{p_j} T_j \left(\frac{s_l^{\mu,i}}{p_i} \right). \quad (8)$$

Теперь рассмотрим пространство L^m , m -ю декартову степень пространства L . Операторам $T_1, \dots, T_m$ и мере μ поставим в соответствие оператор $T_\mu: L^m \rightarrow L^m$ определенный формулой

$$T_\mu(v_1, \dots, v_m) = (\tilde{v}_1, \dots, \tilde{v}_m), \quad \text{где } \tilde{v}_j = \sum_{i=1}^m \frac{p_i p_{ij}}{p_j} T_j v_i. \quad (9)$$

ЛЕММА 4. Для любого $v \in L$ и любого $n \in \mathbb{N}$ имеем

$$T_\mu^n(v, \dots, v) = \left(\frac{s_l^{\mu,1}(T)v}{p_1}, \dots, \frac{s_l^{\mu,m}(T)v}{p_m} \right).$$

Это следует из (7) и (8).

СЛЕДСТВИЕ 1. Для любого $v \in L$ и любого $n \in \mathbb{N}$ имеем

$$\frac{1}{n} \sum_{l=0}^{n-1} T_\mu^n(v, \dots, v) = \left(\frac{c_n^{\mu,1}(T)v}{p_1}, \dots, \frac{c_n^{\mu,m}(T)v}{p_m} \right).$$

Это вытекает из леммы 4.

Применяя классические операторные эргодические теоремы к оператору T_μ и используя следствие 1, мы получаем утверждения о сходимости средних $c_n^\mu(T)$.

ЛЕММА 5. Пусть H — гильбертово пространство, пусть $T_1, \dots, T_m: H \rightarrow H$ — сжатия, и пусть μ есть σ_m -инвариантная марковская мера на Ω_m . Тогда для любого $h \in H$ и любого $i \in \{1, \dots, m\}$ последовательность $(1/p_i)c_n^{\mu, i}(T)h$ сходится в H при $n \rightarrow \infty$ к некоторому вектору $\bar{h}_i$, причем $T_\mu(h_1, \dots, h_m) = (\bar{h}_1, \dots, \bar{h}_m)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $T_1, \dots, T_m$ — сжатия в H , то T_μ — сжатие в H^m . Следствие 1 и эргодическая теорема для T_μ завершают доказательство.

Равенство $c_n^\mu(T) = c_n^{\mu, 1}(T) + \dots + c_n^{\mu, m}(T)$ дает

СЛЕДСТВИЕ 2. В предположениях леммы 5 для всякого $h \in H$ последовательность $c_n^\mu(T)h$ сходится в H .

Следствие 2 доказывает сходимость временных средних в лемме 1.

Аналогичные утверждения имеют место в произвольных рефлексивных банаховых пространствах.

ЛЕММА 6. Пусть L — рефлексивное банахово пространство, пусть $T_1, \dots, T_m: L \rightarrow L$ — сжатия, и пусть μ есть σ_m -инвариантная марковская мера на Ω_m . Тогда для всякого $v \in L$ и всякого $i \in \{1, \dots, m\}$ последовательность $(1/p_i)c_n^{\mu, i}(T)v$ сходится в L при $n \rightarrow \infty$ к некоторому $\bar{v}_i$, причем $T_\mu(\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_m) = (\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_m)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $T_1, \dots, T_m$ — сжатия в L , то T_μ — сжатие в L^m . Следствие 1 и эргодическая теорема Лорча для сжатия T_μ (см. [20] или [21, гл. 73]) завершают доказательство.

СЛЕДСТВИЕ 3. В предположениях леммы 6 для всякого $v \in L$ последовательность $c_n^\mu(T)v$ сходится в L .

Теперь пусть (X, ν) — пространство Лебега, а $T_1, \dots, T_m: L_1(X, \nu) \rightarrow L_1(X, \nu)$ — линейные операторы.

Пусть μ есть σ_m -инвариантная марковская мера на Ω_m с начальным распределением $p = (p_1, \dots, p_m)$ и матрицей переходных вероятностей $P = (p_{ij})$. Пусть $T_\mu: L_1(X, \nu)^m \rightarrow L_1(X, \nu)^m$ — оператор, определенный формулой (9).

Пространство $L_1(X, \nu)^m$ можно отождествить с пространством $L_1(X \times \{1, \dots, m\}, \nu \times p)$, где мера $\nu \times p$ есть произведение меры ν на X и распределения вероятностей $p = (p_1, \dots, p_m)$ на $\{1, \dots, m\}$. Оператор T_μ теперь становится оператором на пространстве $L_1(X \times \{1, \dots, m\}, \nu \times p)$. Ясно, что если $T_1, \dots, T_m$ положительны, то положителен и T_μ , если $T_1, \dots, T_m$ суть L_1 -сжатия, то и T_μ является L_1 -сжатием, если $T_1, \dots, T_m$ суть L_∞ -сжатия, то и T_μ есть L_∞ -сжатие, а если $T_1, \dots, T_m$ сохраняют меру ν , то T_μ сохраняет меру $\nu \times p$.

ЛЕММА 7. Пусть (X, ν) — вероятностное пространство, и пусть $T_1, \dots, T_m$ — положительные L_1 - L_∞ -сжатия. Тогда для любой функции $\varphi \in L_1(X, \nu)$ и любого $i = 1, \dots, m$ последовательность $c_n^{\mu, i}(T)\varphi$ сходится ν -почти всюду и в $L_1(X, \nu)$ при $n \rightarrow \infty$. Если $\bar{\varphi}_i = \lim_{n \rightarrow \infty} (1/p_i)c_n^{\mu, i}(T)\varphi$, то $T_\mu(\bar{\varphi}_1, \dots, \bar{\varphi}_m) = (\bar{\varphi}_1, \dots, \bar{\varphi}_m)$.

Напомним стандартный факт (см. [12, 21]).

ТЕОРЕМА 3. Если T — положительное L_1 - L_∞ -сжатие на вероятностном пространстве (X, ν) , то для любой функции $\varphi \in L_1(X, \nu)$ найдется $\bar{\varphi} \in L_1(X, \nu)$, такая, что $(\varphi + T\varphi + \dots + T^{n-1}\varphi)/n \rightarrow \bar{\varphi}$ почти всюду по мере ν и в $L_1(X, \nu)$ при $n \rightarrow \infty$, причем $T\bar{\varphi} = \bar{\varphi}$.

Применяя теорему 3 к оператору T_μ и используя следствие 1, мы получаем лемму 7.

Лемма 7 доказывает сходимость временных средних в теореме 2.

Сходимость в теореме 3 имеет место также для пространств бесконечной меры, поэтому верна

ЛЕММА 8. Пусть (X, ν) — пространство с мерой, и пусть $T_1, \dots, T_m$ — положительные L_1 - L_∞ -сжатия. Тогда для любой функции $\varphi \in L_1(X, \nu)$ и любого $i = 1, \dots, m$ последовательность $c_n^{\mu, i}(T)\varphi$ сходится ν -почти всюду при $n \rightarrow \infty$.

Теперь рассмотрим сжатия в L_p , $p > 1$.

ЛЕММА 9. Пусть (X, ν) — пространство Лебега, пусть $p > 1$, и пусть $T_1, \dots, T_m$ — положительные L_p -сжатия.

Для любой функции $\varphi \in L_p(X, \nu)$ и для любого $i \in \{1, \dots, m\}$ последовательность $(1/p_i)c_n^{\mu, i}(T)\varphi$ сходится ν -почти всюду и в $L_p(X, \nu)$ к некоторой функции $\bar{\varphi}_i \in L_p(X, \nu)$, причем $T_\mu(\bar{\varphi}_1, \dots, \bar{\varphi}_m) = (\bar{\varphi}_1, \dots, \bar{\varphi}_m)$.

Это следует из эргодических теорем Акоглу [23] и Лорча [20], примененных к оператору T_μ .

СЛЕДСТВИЕ 4. В предположениях леммы 9 для любой функции $\varphi \in L_p(X, \nu)$ последовательность $c_n^\mu(T)\varphi$ сходится ν -почти всюду и в $L_p(X, \nu)$.

Это следствие завершает доказательство сходимости временных средних в лемме 2.

ЗАМЕЧАНИЕ. Конструкция оператора T_μ может быть слегка обобщена. Пусть, как выше, L — линейное пространство над $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$, $T_1, \dots, T_m: L \rightarrow L$ — линейные операторы и P — стохастическая матрица. Определим оператор $T_P: L^m \rightarrow L^m$ формулой

$$T_P(v_1, \dots, v_m) = (\tilde{v}_1, \dots, \tilde{v}_m), \quad \text{где } \tilde{v}_j = \sum_{k=1}^m p_{jk} T_j v_k. \quad (10)$$

Если P имеет стационарное распределение $(p_1, \dots, p_m)$, такое, что все p_i строго положительны, то можно рассмотреть матрицу $P^* = (p_{ij}^*)$ заданную формулой $p_{jk}^* = p_k p_{kj} / p_j$. Если μ — марковская мера с начальным распределением $(p_1, \dots, p_m)$ и матрицей переходных вероятностей P , то из определений ясно, что $T_\mu = T_{P^*}$.

§5. Инвариантность предела

В этом параграфе мы устанавливаем инвариантность пределов и завершаем доказательство теоремы 2.

ЛЕММА 10. Пусть $T_1, \dots, T_m$ — положительные L_1 - L_∞ -сжатия на $L_1(X, \nu)$. Пусть μ — сильно неприводимая σ_m -инвариантная марковская мера на Ω_m . Пусть $\varphi_1, \dots, \varphi_m \in L_1(X, \nu)$ таковы, что

$$T_\mu(\varphi_1, \dots, \varphi_m) = (\varphi_1, \dots, \varphi_m).$$

Тогда $\varphi_1 = \dots = \varphi_m = \varphi$ и $T_i \varphi = \varphi$ для всех $i = 1, \dots, m$.

Сначала мы устанавливаем аналогичный результат для сжатий в гильбертовых пространствах.

ЛЕММА 11. Пусть H — гильбертово пространство, а операторы $T_1, \dots, T_m: H \rightarrow H$ — сжатия. Пусть μ есть σ_m -инвариантная марковская мера на Ω_m . Предположим, что векторы $h_1, \dots, h_m \in H$ таковы, что $T_\mu(h_1, \dots, h_m) = (h_1, \dots, h_m)$.

Тогда если мера μ сильно неприводима, то $h_1 = \dots = h_m = h$ и $T_i h = h$ при всех $i = 1, \dots, m$.

Основная идея доказательства: если v_1, v_2, v_3 — векторы в гильбертовом пространстве, такие, что $|v_1| = |v_2| = |v_3|$ и $v_1 = (v_2 + v_3)/2$, то $v_1 = v_2 = v_3$. Гивард в [19] использовал это замечание в доказательстве инвариантности предельной функции в своей эргодической теореме.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть мера μ имеет начальное распределение $(p_1, \dots, p_m)$ и матрицу переходных вероятностей $P = (p_{ij})$. Для $i, j \in \{1, \dots, m\}$ и $n \in \mathbb{N}$ обозначим через $p_{ij}^{(n)}$ вероятность перехода из i в j за n шагов (иначе говоря $p_{ij}^{(n)} = (P^n)_{ij}$).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть H — гильбертово пространство, а $T_1, \dots, T_m: H \rightarrow H$ — сжатия. Пусть μ есть σ_m -инвариантная марковская мера на Ω_m такая, что соответствующая ей цепь Маркова неприводима. Пусть $h_1, \dots, h_m \in H$ таковы, что $T_\mu(h_1, \dots, h_m) = (h_1, \dots, h_m)$.

Тогда найдется $r \in \mathbb{R}$, такое, что $|h_1| = \dots = |h_m| = r$, причем если $p_{ij} > 0$ то $|T_j h_i| = r$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $|h_1| \geq |h_i|$ при всех $i = 1, \dots, m$. Так как $h_1 = \sum_{i=1}^m (p_i p_{i1}/p_1) T_1 h_i$ и $1 = \sum_{i=1}^m p_i p_{i1}/p_1$, из неравенства треугольника следует, что если $p_{i1} > 0$, то $|h_1| = |T_1 h_i| = |h_i|$.

Аналогично, $|h_1| = |h_i|$ для всех i , таких, что $p_{i1}^{(2)} > 0$, и т. д. Цепь Маркова соответствующая мере μ , неприводима, и мы получаем, что $|h_1| = \dots = |h_m|$, если $p_{ij} > 0$, то $|h_j| = |T_j h_i|$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть $h_1, \dots, h_n, h \in H$ таковы, что $|h_1| = |h_2| = \dots = |h_n| = |h|$. Предположим, что нашлись $\alpha_1 > 0, \dots, \alpha_n > 0$, $\alpha_1 + \dots + \alpha_n = 1$ такие, что $h = \alpha_1 h_1 + \dots + \alpha_n h_n$. Тогда $h_1 = h_2 = \dots = h_n = h$.

Это прямое следствие условия достижения равенства в неравенстве Коши–Буняковского–Шварца.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Пусть H — гильбертово пространство, $T: H \rightarrow H$ — сжатие, а векторы $h_1, h_2 \in H$ таковы, что $|h_1| = |h_2| = |Th_1| = |Th_2|$. Тогда если $Th_1 = Th_2$, то $h_1 = h_2$.

Если $h_1 \neq h_2$, то $|(h_1 + h_2)/2| < |h_1|$ по предложению 2. Так как $|T((h_1 + h_2)/2)| = |h_1|$, мы приходим к противоречию с тем, что T — сжатие.

Ниже запись $(PP^T)_{ij}$ означает (i, j) -й элемент матрицы PP^T .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Пусть μ есть σ_m -инвариантная марковская мера с неприводимой переходной матрицей P . Пусть $T_\mu(h_1, \dots, h_m) = (h_1, \dots, h_m)$. Тогда если $(PP^T)_{ij} > 0$, то $h_i = h_j$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По предложению 1 из неприводимости матрицы P следует, что $|h_1| = \dots = |h_m|$. Заметим, что $(PP^T)_{ij} > 0$, если и только если найдется k такое, что $p_{ik} > 0$, $p_{jk} > 0$. Так как $h_k = \sum_{l=1}^m (p_l p_{lk}/p_k) T_k h_l$, из предложения 2 следует, что $h_k = T_k h_i = T_k h_j$, причем по предложению 1 $|h_k| = |h_i| = |h_j|$, откуда в силу предложения 3 заключаем, что $h_i = h_j$, и предложение доказано.

Из предложения 4 следует, что если матрица P неприводима и матрица PP^T неприводима, то $h_1 = \dots = h_m$, и лемма 11 доказана.

Из лемм 5 и 11 и следствия 2 вытекает лемма 1.

Лемма 10 получается из леммы 11 приближением интегрируемых функций квадратично интегрируемыми. Пусть $\varepsilon > 0$ произвольно. Пусть $\varphi'_1, \dots, \varphi'_m \in L_2(X, \nu)$ таковы, что $|\varphi'_i - \varphi_i|_{L_1} < \varepsilon$. Определим функции $\psi_1, \dots, \psi_m$ формулой

$$(\psi_1, \dots, \psi_m) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} T_\mu^n(\varphi'_1, \dots, \varphi'_m)$$

(предел существует почти всюду и в $L_1(X, \nu)$). Очевидно, что $\psi_i \in L_2(X, \nu)$, $|\psi_i - \varphi_i|_{L_1} < \varepsilon$ для всех $i = 1, \dots, m$ и $T_\mu(\psi_1, \dots, \psi_m) = (\psi_1, \dots, \psi_m)$. Оператор T_μ , будучи сжатием в L_1 и в L_∞ , является сжатием и в L_2 (это следует из теоремы Рисса о выпуклости или из леммы Лина, см. [21, р. 65]). Теперь, применяя лемму 11, видим, что $\psi_1 = \dots = \psi_m = \psi$ и $T_i\psi = \psi$ для всех $i = 1, \dots, m$. Так как $|\psi_i - \varphi_i|_{L_1} < \varepsilon$, а ε произвольно, заключаем, что $\varphi_1 = \dots = \varphi_m = \varphi$. Так как $T_i\varphi = \varphi$ при всех $i = 1, \dots, m$. Лемма 10 доказана.

Лемма 10 и лемма 7 вместе дают теорему 2.

Переходим к доказательству леммы 2.

ЛЕММА 12. Пусть $p > 1$, и пусть $T_1, \dots, T_m: L_p(X, \nu) \rightarrow L_p(X, \nu)$ — сжатия. Пусть μ есть σ_m -инвариантная марковская мера на Ω_m . Пусть функции $\varphi_1, \dots, \varphi_m \in L_p(X, \nu)$ таковы, что $T_\mu(\varphi_1, \dots, \varphi_m) = (\varphi_1, \dots, \varphi_m)$.

Если мера μ сильно неприводима, то $\varphi_1 = \dots = \varphi_m = \varphi$ и $T_i\varphi = \varphi$ при всех $i = 1, \dots, m$.

Доказательство леммы 12 дословно повторяет доказательство леммы 11. Основное наблюдение состоит в том, что предложение 2 выполнено для пространства $L_p(X, \nu)$.

Из лемм 9 и 12 вытекает лемма 2.

Аналог леммы 11 имеет место во всех банаховых пространствах, для которых выполнен аналог предложения 2 (такие банаховы пространства иногда называют *строго нормированными*). По лемме 6 аналог леммы 1 имеет место в произвольном рефлексивном строго нормированном банаховом пространстве.

§6. Сильная неприводимость и симметричная сигма-алгебра

В этом параграфе доказано, что сильная неприводимость неприводимой марковской цепи с конечным числом состояний эквивалентна тривиальности ее симметричной сигма-алгебры.

Пусть $P = (p_{ij})$ — стохастическая $m \times m$ -матрица. Сопоставим ей неориентированный граф Γ_P с вершинами $1, \dots, m$, в котором вершины i_1 и i_2 соединены ребром, если найдется j , такое, что $p_{i_1 j} > 0$, $p_{i_2 j} > 0$. Иными словами, Γ_P есть граф инцидентности матрицы PP^T . (Здесь, как всегда, P^T есть транспонированная матрица P .)

Матрица P сильно неприводима, если и только если она неприводима и граф Γ_P связан.

Если μ — марковская мера на Ω_m с матрицей переходных вероятностей $P = (p_{ij})$, то вместо Γ_P будем иногда писать Γ_μ .

Напомним, что множество $C \subset \Omega_m$ называется *симметричным*, если для всякой последовательности $\omega \in C$ все последовательности, полученные из ω конечными перестановками, также лежат в C . Сигма-алгебра симметричных событий называется *симметричной* сигма-алгеброй. Напомним, что сигма-алгебра называется *тривиальной*, если всякое множество, лежащее в ней, имеет меру 0 или 1.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. *Неприводимая цепь Маркова с конечным числом состояний сильно неприводима, если и только если ее симметричная сигма-алгебра тривиальна.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть m — число состояний, а P — матрица цепи. Пусть α_1 — сигма-алгебра, порожденная множествами $\{\omega_1 = i\}$, $i = 1, \dots, m$, а α_2 — сигма-алгебра, порожденная множествами $\{\omega_2 = i\}$, $i = 1, \dots, m$. Григоренко [10] показала, что симметричная сигма-алгебра неприводимой марковской цепи тривиальна, если и только если пересечение $\alpha_1 \cap \alpha_2$ тривиально.

Пусть $C \subset \Omega_m$ и $C \in \alpha_1 \cap \alpha_2$. Это значит, что найдутся множества $A_1, A_2 \in \{1, \dots, m\}$, такие, что $C = \{\omega : \omega_1 \in A_1\} = \{\omega : \omega_2 \in A_2\}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. *Если i и j соединены ребром в Γ_P и $i \in A_1$, то и $j \in A_1$.*

Действительно, если i и j соединены ребром в Γ_P , то найдется $k \in \{1, \dots, m\}$ такое, что $p_{ik} > 0$, $p_{jk} > 0$. Если $i \in A_1$, то $k \in A_2$, откуда $j \in A_1$, и предложение доказано.

Из предложения 6 вытекает, что если граф Γ_P связан, то сигма-алгебра $\alpha_1 \cap \alpha_2$ тривиальна.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7. *Если $A \subset \{1, \dots, m\}$ — связная компонента графа Γ_P , то множество $\{\omega : \omega_1 \in A\}$ лежит в сигма-алгебре $\alpha_1 \cap \alpha_2$.*

Действительно, определим $B \subset \{1, \dots, m\}$ формулой $B = \{k : \text{существует } i \in A, \text{ такое, что } p_{ik} > 0\}$. Если A — связная компонента графа Γ_P , то $\{\omega : \omega_1 \in A\} = \{\omega : \omega_2 \in B\}$, и предложение доказано.

Предложение 7 показывает, что если граф Γ_P несвязен, то и сигма-алгебра $\alpha_1 \cap \alpha_2$ нетривиальна.

Из предложений 6, 7 следует предложение 5.

Другой способ получить предложение 5 — использовать результат Бежаева и Оселедца из [11], из которого следует, что симметричная сигма-алгебра неприводимой цепи Маркова с конечным числом состояний тривиальна, если и только если матрица $P^T P$ неприводима. Остается заметить, что неприводимость матрицы $P^T P$ равносильна неприводимости матрицы $P P^T$.

Гуревич [15] показал в 1968 г., что для конечной неприводимой цепи Маркова тривиальность симметричной сигма-алгебры равносильна условию полноты циклов Колмогорова, необходимому условию в локальной предельной теореме Колмогорова для цепей Маркова (см. [14]).

§7. Эргодические теоремы и косые произведения

В этом параграфе доказывается, что средние $c_n^\mu(T)\varphi$, определенные в §2, сходятся для произвольной борелевской вероятностной σ_m -инвариантной меры μ на Ω_m .

ТЕОРЕМА 4. *Пусть μ — произвольная σ_m -инвариантная борелевская вероятностная мера на пространстве Ω_m .*

Пусть (X, ν) — вероятностное пространство, $f_1, \dots, f_m: X \rightarrow X$ — отображения, сохраняющие меру ν , и $T_1, \dots, T_m$ — соответствующие им операторы.

Для всякой функции $\varphi \in L_1(X, \nu)$ найдется функция $\tilde{\varphi} \in L_1(X, \nu)$, такая что $c_n^\mu(T)\varphi \rightarrow \tilde{\varphi}$ в $L_1(X, \nu)$ при $n \rightarrow \infty$. Если $|\varphi| \log |\varphi| \in L_1(X, \nu)$, то $c_n^\mu(T)\varphi \rightarrow \tilde{\varphi}$ также и почти всюду.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим отображение $F: \Omega_m \times X \rightarrow \Omega_m \times X$, определенное формулой

$$F(\omega, x) = (\sigma_m \omega, f_{\omega_1} x). \quad (11)$$

Отображение F есть косое произведение с базой (Ω_m, σ_m) и слоем $(X, f_1, \dots, f_m)$. Для произвольной борелевской вероятностной σ_m -инвариантной меры μ на Ω_m отображение F сохраняет меру $\mu \times \nu$ на пространстве $\Omega_m \times X$.

Для всякого $w \in W_m$, $w = w_1 \dots w_n$, определим отображение $f_w: X \rightarrow X$ по формуле

$$f_w = f_{w_n} \dots f_{w_1}.$$

Пусть $\varphi \in L_1(X, \nu)$. Определим $\tilde{\varphi} \in L_1(\Omega_m \times X, \mu \times \nu)$ по формуле $\tilde{\varphi}(\omega, x) = \varphi(x)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8. Для почти любого $x \in X$ имеем

$$\int_{\Omega_m} \tilde{\varphi} \circ F^j(\omega, x) d\mu(\omega) = \sum_{|w|=j} \mu(w) \varphi \circ T_w(x).$$

Это предложение по существу принадлежит Какутани [3]; доказательство его есть прямое вычисление.

Положим

$$S_j^\mu(f)\varphi = \sum_{|w|=j} \mu(w) \varphi \circ f_w. \quad (12)$$

Усредним $S_j^\mu(F)$ по $j = 0, \dots, n-1$, и пусть

$$C_n^\mu(f)\varphi = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} S_j^\mu(f)\varphi. \quad (13)$$

Положим $\tilde{\varphi}_n = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \tilde{\varphi} \circ f^j$.

Из предложения 8 вытекает

СЛЕДСТВИЕ 5. Для почти любого $x \in X$ имеет место равенство $C_n^\mu(f)\varphi = \int_{\Omega_m} \tilde{\varphi}_n(\omega, x) d\mu(\omega)$.

Действительно, $\int_{\Omega_m} \tilde{\varphi}_n(\omega, x) d\mu(\omega) = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{|w|=j} \mu(w) \varphi \circ f_w(x) = C_n^\mu(f)\varphi$.

СЛЕДСТВИЕ 6. Если $\varphi \in L_1(X, \nu)$, то последовательность $C_n^\mu(f)\varphi$ сходится в $L_1(X, \nu)$ при $n \rightarrow \infty$. Если φ такова, что $|\varphi| \log |\varphi| \in L_1(X, \nu)$, то последовательность $C_n^\mu(f)\varphi$ сходится почти всюду.

Это вытекает из следствия 5, эргодической теоремы Биркгофа–Хинчина для отображения F и теоремы Винера о мажорируемой сходимости временных средних.

Теперь свяжем средние $C_n^\mu(f)$, определенные в этом параграфе, и средние $c_n^\mu(T)$, определенные в §2.

Пусть $w \in W_m$, $w = w_1 \dots w_n$. Положим $w^* = w_n \dots w_1$. Заметим, что $T_w \varphi = \varphi \circ f_{w^*}$. Пусть μ есть σ_m -инвариантная борелевская вероятностная мера на Ω_m . Определим новую меру μ^* на Ω_m формулой $\mu^*(w) = \mu(w^*)$. Мера μ^* также является борелевской, вероятностной и σ_m -инвариантной; ясно, что $\mu^{**} = \mu$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 9. $C_n^\mu(f) = c_n^{\mu^*}(T)$.

Действительно, формула $T_w \varphi = \varphi \circ f_{w^*}$ дает

$$\sum_{|w|=n} \mu(w) T_w \varphi = \sum_{|w|=n} \mu(w) \varphi \circ f_{w^*} = \sum_{|w|=n} \mu^*(w^*) f_{w^*} = \sum_{|w|=n} \mu^*(w) \varphi \circ f_w.$$

Из предложения 9 и следствия 6 вытекает теорема 4.

§ 8. Эргодические теоремы для средних, полученных с помощью марковских мер порядка k

В этом параграфе теорема 2 обобщена на суммирование с весами, соответствующими марковским мерам порядка $k \geq 1$.

Борелевскую вероятностную меру μ на Ω_m будем называть *марковской мерой порядка k* , если найдутся неотрицательные величины $p_{i_1 \dots i_k}$ (начальное распределение) и $p_{i_1 \dots i_{k+1}}$ (вероятности перехода), $i_1, \dots, i_{k+1} \in \{1, \dots, m\}$, такие, что для любого $w \in W_m$, $w = w_1 \dots w_n$, имеем

$$\mu(w) = p_{w_1 \dots w_k} p_{w_1 \dots w_{k+1}} p_{w_2 \dots w_{k+2}} \dots p_{w_{n-k} \dots w_n}. \quad (14)$$

При $k = 1$ получаем определение обычной марковской меры.

Мера μ , определенная соотношением (14), σ_m -инвариантна, если и только если при всех $i_1, \dots, i_k \in \{1, \dots, m\}$ имеет место равенство

$$p_{i_1 \dots i_k} = \sum_{i=1}^m p_{i i_1 \dots i_{k-1}} p_{i i_1 \dots i_k}.$$

Всякой марковской мере порядка k на пространстве последовательностей из m символов стандартным образом ставится в соответствие марковская мера порядка 1 на пространстве последовательностей из m^k символов. Опишем это соответствие.

Пусть $A = \{w \in W_m : |w| = k\}$. Обозначим через U множество всех конечных слов в алфавите A :

$$U = \{u = u_1 u_2 \dots u_n : u_i \in A\}.$$

Итак, элементы множества U — это слова, составленные из символов, которые сами являются словами. Для всякого слова $u \in U$ через u_1 мы обозначаем его первый символ, через u_2 — второй и т.д. При этом $u_1 \in A \subset W_m$, т.е. $u_1 = (u_1)_1 \dots (u_1)_k$, где $(u_1)_i \in \{1, \dots, m\}$.

Нам понадобится также пространство односторонних бесконечных последовательностей символов алфавита A . Обозначим его через Ω_A , а сдвиг на единицу — через σ_A .

Теперь пусть μ — марковская мера на Ω_m с начальным распределением $(p_{i_1 \dots i_k})$ и вероятностями перехода $p_{i_1 \dots i_{k+1}}$, $i_1, \dots, i_{k+1} \in \{1, \dots, m\}$.

Для любых $w, w' \in A$ положим $\tilde{p}_w = p_{w_1 \dots w_k}$, $\tilde{p}_{ww'} = p_{w_1 \dots w_k w'_k}$, если $w_2 = w'_1, \dots, w_k = w'_{k-1}$, и $\tilde{p}_{ww'} = 0$ в противном случае. Величины $\tilde{p}_w$ (начальное

распределение) и $\tilde{p}_{ww'}$ (вероятности перехода) задают на Ω_A марковскую меру μ порядка 1, причем если мера μ σ_m -инвариантна, то мера $\tilde{\mu}$ σ_A -инвариантна.

Далее, легко видеть, что граф $\Gamma_{\tilde{\mu}}$, определенный в §6, имеет не менее m^k компонент связности (вершины w и w' в нем могут быть соединены ребром только если $w_2 = w'_2, \dots, w_k = w'_k$).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Марковскую меру μ порядка $k \geq 1$ назовем *сильно неприводимой*, если цепь Маркова, отвечающая мере $\tilde{\mu}$, неприводима, а граф $\Gamma_{\tilde{\mu}}$ имеет в точности m^{k-1} компонент связности.

При $k = 1$ получаем определение из §6.

ТЕОРЕМА 5. Пусть μ есть σ_m -инвариантная марковская мера порядка k на Ω_m .

Пусть H — гильбертово пространство, а линейные операторы $T_1, \dots, T_m: H \rightarrow H$ — сжатия. Тогда для всякого $h \in H$ найдется вектор $\bar{h}$, такой, что $c_n^\mu(T)h \rightarrow \bar{h}$ в H .

Если мера μ сильно неприводима, то $T_i \bar{h} = \bar{h}$ при всех $i = 1, \dots, m$.

ТЕОРЕМА 6. Пусть μ есть σ_m -инвариантная марковская мера порядка k на Ω_m .

Пусть (X, ν) — вероятностное пространство и $T_1, \dots, T_m: L_1(X, \nu) \rightarrow L_1(X, \nu)$ — положительные L_1 - L_∞ -сжатия. Тогда для всякой функции $\varphi \in L_1(X, \nu)$ найдется функция $\bar{\varphi} \in L_1(X, \nu)$, такая, что $c_n^\mu(T)\varphi \rightarrow \bar{\varphi}$ почти всюду по мере ν и в $L_1(X, \nu)$.

Если мера μ сильно неприводима, то $T_i \bar{\varphi} = \bar{\varphi}$ при всех $i = 1, \dots, m$.

Если операторы $T_1, \dots, T_m$ марковские, то $\int_X \varphi d\nu = \int_X \bar{\varphi} d\nu$.

Теоремы 5 и 6 были анонсированы мною в [22].

Пусть L — банахово пространство и $T_1, \dots, T_m: L \rightarrow L$ — линейные операторы. Для всякого $w \in A$ положим $\tilde{T}_w = T_{w_1}$. Тем самым для всякого $u \in U$ $u = u_1 \dots u_n$, определен оператор $\tilde{T}_u = \tilde{T}_{u_n} \dots \tilde{T}_{u_1}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 10. Пусть μ — марковская мера порядка k на Ω_m , а $\tilde{\mu}$ — отвечающая ей марковская мера порядка 1 на Ω_A . Тогда

$$\sum_{|w|=n} \mu(w) T_w = \sum_{|u|=n} \tilde{\mu}(u) \tilde{T}_u.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для $u \in U$, $u = u_1 \dots u_n$, введем слова $b(u), e(u) \in W_m$ по формулам $b(u) = (u_1)_1 (u_2)_1 \dots (u_n)_1$, $e(u) = (u_n)_2 \dots (u_n)_k$. Видно, что $|b(u)| = |u|$ и $\tilde{T}_u = T_{b(u)}$ для всех $u \in U$, а если $\tilde{\mu}(u) > 0$, то $\tilde{\mu}(u) = \mu(b(u)e(u))$. Поэтому

$$\sum_{|u|=n} \tilde{\mu}(u) \tilde{T}_u = \sum_{|u|=n} \mu(b(u)e(u)) T_{b(u)} = \sum_{|u|=n} \mu(b(u)) T_{b(u)} = \sum_{|w|=n} \mu(w) T_w.$$

Это предложение показывает, что утверждения о сходимости временных средних составленных с помощью марковских мер порядка k , следуют из соответствующих утверждений для марковских мер порядка 1.

В §4 описано, как операторам $\tilde{T}_w$, $w \in A$, и марковской мере $\tilde{\mu}$ ставится в соответствие оператор $\tilde{T}_{\tilde{\mu}}: L^{m^k} \rightarrow L^{m^k}$. Пусть теперь H — гильбертово пространство и $T_1, \dots, T_m$ — сжатия. Положим $\mathbf{H} = H^{m^k}$.

ЛЕММА 13. Пусть мера μ сильно неприводима. Пусть вектор $\mathbf{h} \in \mathbf{H}$, $\mathbf{h} = (h_{i_1 \dots i_k})$, $i_1, \dots, i_k \in \{1, \dots, m\}$, таков, что $\tilde{T}_{\tilde{\mu}} \mathbf{h} = \mathbf{h}$. Тогда найдется вектор $h \in H$, удовлетворяющий условию $T_i h = h$ при любом $i = 1, \dots, m$, такой что $h_{i_1 \dots i_k} = h$ при всех $i_1, \dots, i_k \in \{1, \dots, m\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Цепь, отвечающая мере $\tilde{\mu}$, неприводима, и, согласно предположению 1, найдется $r \in \mathbb{R}$, такое, что $|h_{i_1 \dots i_k}| = r$ при всех $i_1, \dots, i_k$. Равенство $\tilde{T}_{\tilde{\mu}} \mathbf{h} = \mathbf{h}$ означает, что

$$h_{i_1 \dots i_k} = \sum_{i=1}^m \frac{p_{ii_1 \dots i_{k-1}} p_{ii_1 \dots i_k}}{p_{i_1 \dots i_k}} T_{i_k} h_{ii_1 \dots i_{k-1}}.$$

Отсюда и из леммы 2 видим, что если $p_{ii_1 \dots i_k} > 0$, то

$$h_{i_1 \dots i_k} = T_{i_k} h_{ii_1 \dots i_{k-1}}. \quad (15)$$

Если $i, j \in \{1, \dots, m\}$ таковы, что $p_{ii_1 \dots i_k} > 0$, $p_{ji_1 \dots i_k} > 0$, то по лемме 2 получаем

$$h_{ii_1 \dots i_{k-1}} = h_{ji_1 \dots i_{k-1}}. \quad (16)$$

Из определения сильной неприводимости легко следует

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 11. Пусть мера μ сильно неприводима. Тогда для любых $i, j \in \{1, \dots, m\}$ найдутся $i_1, \dots, i_k \in \{1, \dots, m\}$, такие, что $p_{ii_1 \dots i_k} > 0$, $p_{ji_1 \dots i_k} > 0$.

Отсюда и из (16) видим, что при всех $i, j, i_1, \dots, i_{k-1} \in \{1, \dots, m\}$ имеем

$$h_{ii_1 \dots i_{k-1}} = h_{ji_1 \dots i_{k-1}}.$$

Продолжая по индукции и используя равенства (15), (16), получаем, что при всех $i_1, \dots, i_k, j_1, \dots, j_k \in \{1, \dots, m\}$ выполнено $h_{i_1 i_2 \dots i_k} = h_{j_1 \dots j_k} = h$ и $T_i h = h$ при всех $i = 1, \dots, m$. Лемма доказана.

Из лемм 13, 5, 11 и 2 следует теорема 5.

Перейдем к доказательству теоремы 6. Итак, пусть $\nu(X) < \infty$, $T_1, \dots, T_m: L_1(X, \nu) \rightarrow L_1(X, \nu)$ — положительные L_1 - L_∞ -сжатия, а μ — марковская мера порядка k на Ω_m .

По теореме Данфорда–Шварца и L_1 -эргодической теореме для оператора $\tilde{T}$ (см. [21, р. 73]), используя предложение 10, получим следующий результат:

ЛЕММА 14. Для всякой функции $\varphi \in L_1(X, \nu)$ найдется функция $\bar{\varphi} \in L_1(X, \nu)$ такая, что $s_n^\mu(T)\varphi \rightarrow \bar{\varphi}$ почти всюду по мере ν и в $L_1(X, \nu)$.

Теперь, используя теорему 5, докажем, что если мера μ сильно неприводима, то $\bar{\varphi} = T_i \bar{\varphi}$ при всех $i = 1, \dots, m$.

Это получается из леммы 13 с помощью приближения интегрируемых функций квадратично интегрируемыми точно так же, как лемма 10 получается из леммы 11 в §5.

Теорема 6 доказана.

§9. Эргодические теоремы для действий строго марковских полугрупп

В этом параграфе определены строго марковские полугруппы и получены эргодические теоремы для их действий.

Пусть A есть $m \times m$ -матрица с неотрицательными элементами. Слово $w \in W_m$, $w = w_1 \dots w_n$, назовем -допустимым, если $A_{w_1 w_2} A_{w_2 w_3} \dots A_{w_{n-1} w_n} > 0$.

Пусть G — конечно порожденная полугруппа, и пусть S — конечный набор образующих. Для элемента $g \in G$ обозначим через $|g|_S$ его длину по отношению к S (т. е. длину кратчайшей записи элемента g словом в алфавите S).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Пусть G — полугруппа с набором образующих $S = \{g_1, \dots, g_k\}$. Предположим, что найдется натуральное $m \geq k$, отображение $\pi: \{1, \dots, m\} \rightarrow \{g_1, \dots, g_k\}$ и неприводимая $m \times m$ -матрица A , такие, что отображение $w \mapsto \pi(w_1) \dots \pi(w_n)$ задает сохраняющую длины биекцию между множеством A -допустимых слов, начинающихся одним из символов $1, \dots, k$, и полугруппой G («сохраняющая длины» означает здесь, что элементу $g \in G$ отвечает слово длины $|g|_S$). В таком случае будем называть G *строго марковской по отношению к набору образующих S* . Матрицу A будем называть *матрицей кодирования*.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Конечно порожденная полугруппа называется *строго марковской*, если у нее есть набор образующих, по отношению к которому она является строго марковской.

Очевидные примеры строго марковских групп — свободные группы, свободные произведения и локально свободные группы Вершика (см. [6, 5]).

Определение строго марковских полугрупп более ограничительно, чем определение марковских групп Кэннона [17] и Громова [1]. Разумеется, всякая строго марковская группа является марковской, но обратное неверно, как показывает простое

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 12. *Бесконечная нециклическая строго марковская группа имеет экспоненциальный рост.*

Из этого предложения следует, что свободная абелева группа с двумя или более образующими не является строго марковской.

М. Л. Громов доказал в [1], что все гиперболические группы — марковские.

Вопрос. Верно ли, что все гиперболические группы строго марковские?

Обратное неверно: локально свободные группы Вершика с тремя или более образующими, очевидно, строго марковские и не гиперболические (см. [5, 6]).

Интересный частный случай — фундаментальные группы компактных ориентируемых поверхностей (действия таких групп, как показали Арнольд и Крылов [9], естественным образом возникают в теории обыкновенных дифференциальных уравнений с комплексным временем).

ГИПОТЕЗА. Фундаментальная группа компактной ориентируемой поверхности рода $g > 1$ строго марковская.

Теорема 1 позволяет получить эргодические теоремы для действий строго марковских полугрупп.

ТЕОРЕМА 7. Пусть G — строго марковская полугруппа по отношению к набору образующих S . Пусть G действует на вероятностном пространстве (X, ν) сохраняющими меру отображениями, и пусть T_g — отображение, соответствующее элементу g .

Тогда для любой функции $\varphi \in L_1(X, \nu)$ найдется функция $\bar{\varphi} \in L_1(X, \nu)$ такая, что

$$\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{\#\{g : |g|_S = n\}} \sum_{|g|_S = n} T_g \varphi \rightarrow \bar{\varphi}$$

почти всюду по мере ν и в $L_1(X, \nu)$ при $N \rightarrow \infty$.

Если матрица кодирования сильно неприводима, то $T_g \bar{\varphi} = \bar{\varphi}$ для всех $g \in G$.

Пусть A есть $m \times m$ -матрица, а $\pi: \{1, \dots, m\} \rightarrow S$ — отображение из определения 5.

Пусть $f_1, \dots, f_m$ — отображения, соответствующие элементам $\pi(1), \dots, \pi(m)$. Пусть μ — мера Парри матрицы A . Применяя теорему 1 к отображениям $f_1, \dots, f_m$ и мере μ , мы получаем теорему 7. Детали рассуждения будут изложены в моей работе в сборнике памяти Рохлина, который будет опубликован Американским математическим обществом.

ЛИТЕРАТУРА

1. Gromov M. Hyperbolic groups, In: Essays in Group Theory (Gersten S. M., ed.), M.S.R. Publ., vol. 8, Springer-Verlag, 1987, pp. 75–263.
2. Оселедец В. И. Марковские цепи, косые произведения и эргодические теоремы для общих динамических систем. Теория вероятностей и ее применения, **10**, вып. 3, 551–557 (1965).
3. Kakutani S. Random ergodic theorems and Markoff processes with a stable distribution. In: Proc. 2nd Berkeley Symposium Math. Stat. and Prob., 1951, pp. 247–261.
4. Вершик А. М. Динамическая теория роста в группах: энтропия, границы, примеры. УМН, **55**, вып. 4, 59–128 (2000).
5. Vershik A. M., Nechaev S., Bikbov R. Statistical properties of braid groups in local free approximation. Preprint IHES/M/99/45, June 1999.
6. Вершик А. М. Численные характеристики групп и соотношения между ними. Записки научных семинаров ПОМИ, **256**, 5–18 (1999).
7. Григорчук Р. И. Индивидуальная эргодическая теорема для действий свободных групп. В кн.: Тезисы Тамбовской школы по теории функций, 1986.
8. Григорчук Р. И. Эргодические теоремы для действий свободной группы и свободно полугруппы. Матем. заметки, **65**, вып. 5, 779–782 (1999).
9. Арнольд В. И., Крылов А. Л. Равномерное распределение точек на сфере и некоторые эргодические свойства решений линейных обыкновенных дифференциальных уравнений в комплексной области. ДАН СССР, **148**, №1, 9–12 (1963).
10. Григоренко Л. А. О σ -алгебре симметричных событий для счетной цепи Маркова. Теория вероятностей и ее применения, **24**, №1, 198–204 (1979).
11. Бежаева З. И., Оселедец В. И. О симметричной сигма-алгебре стационарного марковского хариссовского процесса. Теория вероятностей и ее применения, **41**, вып. 4, 869–877 (1996).
12. Dunford N., Schwartz J. T. Convergence almost everywhere of operator averages. J. Rational Mech. Anal., **5**, 129–178 (1956).
13. Hopf E. The general temporarily discrete Markoff process. J. Rational Mech. Anal., **3**, 13–45 (1954).
14. Колмогоров А. Н. Локальная предельная теорема для классических цепей Маркова. Изв. АН СССР, **13**, №4, 281–300 (1949).
15. Гуревич Б. М. Локальная предельная теорема для цепей Маркова и условия типа регулярности. Теория вероятностей и ее применения, **13**, вып. 1, 183–190 (1968).
16. Nevo A. Harmonic analysis and pointwise ergodic theorems for non-commuting transformations. J. Amer. Math. Soc., **7**, 875–902 (1994).
17. Cannon J. The combinatorial structure of cocompact discrete hyperbolic groups. Geom. Dedicata, **16**, 123–148 (1984).
18. Nevo A., Stein E. M. A generalization of Birkhoff's pointwise ergodic theorem. Acta Math., **173**, 135–154 (1994).
19. Guivarc'h Y. Généralisation d'un théorème de von Neumann. C. R. Acad. Sci Paris **268**, 1020–1023 (1969).

20. *Lorch E. R.* Means of iterated transformations in reflexive vector spaces. Bull. Amer. Math. Soc., **45**, 945–947 (1939).
21. *Krengel U.* Ergodic Theorems. Walter de Gruyter, Berlin–New York, 1985.
22. *Буфетов А. И.* Эргодические теоремы для нескольких отображений. УМН, **54**, вып. 4, 159–160 (1999).
23. *Akcoglu M.* A pointwise ergodic theorem in L_p -spaces. Canad. J. Math., **27**, 1075–108 (1975).

Независимый московский университет

Поступило в редакцию
26 мая 1999 г.