Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. В. Бабич, Бирациональные координаты Дарбу на (ко)присоединенных орбитах группы $GL(N, \mathbb{C})$, *Функц. анализ и его прил.*, 2016, том 50, выпуск 1, 20–37

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa3222>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.197.203

26 апреля 2023 г., 17:47:07

УДК 514.76+512.813.4+514.84

Бирациональные координаты Дарбу на (ко)присоединенных орбитах группы $GL(N, \mathbb{C})$

© 2016. М. В. БАБИЧ

Множество линейных преобразований, имеющих фиксированную жорданову структуру J , является симплектическим многообразием, изоморфным коприсоединенной орбите $\mathcal{O}(J)$ общей линейной группы $GL(N, \mathbb{C})$. Линейное преобразование может быть спроектировано вдоль собственного подпространства на координатное подпространство дополнительной размерности. Жорданова структура проекции $\tilde{J}$ определяется структурой прообраза J ; следовательно, проекция $\mathcal{O}(J) \rightarrow \mathcal{O}(\tilde{J})$ является отображением симплектических многообразий.

В статье доказано, что слой $\mathcal{E}$ этой проекции является линейным симплектическим пространством, а отображение $\mathcal{O}(J) \xrightarrow{\sim} \mathcal{E} \times \mathcal{O}(\tilde{J})$ — это бирациональный симплектоморфизм. Последовательное проектирование получаемых преобразований вдоль собственных подпространств дает изоморфизм между $\mathcal{O}(J)$ и линейным симплектическим пространством, являющимся декартовым произведением слоев проекций. Координаты Дарбу на $\mathcal{O}(J)$ являются поднятием канонических координат с этого линейного симплектического пространства.

В качестве примеров построены канонические координаты на орбитах, соответствующих различным жордановым структурам.

Введение

В данной работе рассматривается задача построения симплектических координат на коприсоединенной орбите группы $GL(N, \mathbb{C})$. Построенные координаты предлагается назвать *проекционно-флаговыми*, поскольку основным методом получения координатных функций является *проектирование* вдоль подпространств, образующих *флаги*, эти флаги заданы во вспомогательном пространстве $\mathbb{C}^N$ точкой орбиты.

Структура проекционно-флаговых координат имеет много общего со структурой цилиндрических координат, открытых Архимедом при вычислении площади сферы, орбиты группы $O(3, \mathbb{R})$. А именно, и в том, и в другом случае весь координатный набор функций естественным образом делится на *грасманову* и *аффинную* части. Аналогом долготы (грасманова часть координат), параметризующей направление плоскости меридиана, является флаговая часть координат, параметризующая расположение некоторого флага. Аналогом проекции сферы на ось вдоль плоскостей, заданных параллелями, является аффинная, Ли-алгебраическая, часть координат. Если интерпретировать точку $A \in \mathfrak{gl}(N, \mathbb{C})$ как матрицу линейного преобразования $\mathcal{A}$, то эти аффинные, Ли-алгебраические, координаты будут элементами матриц преобразований, полученных из $\mathcal{A}$ некоторыми ограничениями и проектированиями.

Построенные координаты задают на коприсоединенной орбите структуру лагранжева расслоения над многообразием флагов. Как и следует из общей теории, слои несут аффинную структуру — она согласована с импульсной полови-

ной проекционно-флаговых координат, *матричные элементы матрицы* $A \in \mathcal{O}$ *зависят от p -координат на слое линейно.*

Лагранжева поляризация задается лишь в области определения координат, в большой клетке. Заметим, что более естественной в этой области является не структура кокасательного расслоения, а структура другого стандартного симплектического пространства $\mathcal{E} := \text{Hom}(E, F) \times \text{Hom}(F, E)$, где E и F — это некоторые линейные пространства. В нашем случае эти линейные пространства составлены из координатных подпространств (см. разд. 4.1).

Мы предполагаем, что орбита задана нормальной жордановой формой составляющих ее матриц, т.е. известны собственные значения, а также размеры и количество жордановых блоков; никаких ограничений на эти параметры не наложено.

Естественны два направления дальнейших исследований — либо искать аналогичные координаты для вещественных групп Ли, либо обобщать метод на случай остальных комплексных классических групп. Первое из направлений представляется автору сомнительным — «овеществление теории» требует новых идей, которых у автора пока нет. Второе направление, напротив, весьма перспективно и интересно, поскольку распространить метод на классические комплексные группы удастся [1].

Подчеркнем также, что свойство *рациональности* полученных координат является принципиально важным, например, при рассмотрении систем, обладающих свойством Пенлеве. В этом случае рациональность функций склейки многообразия означает, что решения, имеющие лишь особенности типа полюса в одних канонических координатах, также не будут иметь ветвления и в других координатах, в другой карте.

Параметризация коприсоединенной орбиты заинтересовала многих авторов. Их исследования были инициированы задачами теории интегрируемых систем, где эти орбиты участвуют в построении фазовых пространств, в рамках гамильтонова формализма.

Наиболее популярен, пожалуй, метод Гельфанда–Цетлина, примененный и развитый в работе Алексеева, Фаддеева и Шаташвили [7], а также в работе Герасимова, Лебедева и Харчева [4], где приведены и явные формулы. В этих работах, однако, параметризована лишь орбита общего положения. Параметрами являются собственные числа диагональных блоков параметризуемой матрицы. Сопряженные им координаты строятся из матричных элементов столбца блока на единицу большего размера. Данные координаты не являются, однако, рациональными, так как при их вычислении требуется находить собственные числа матричных блоков всех размеров, меньших размера исходного, который может быть сколь угодно велик.

Весьма общий метод построения канонических координат для различных задач, в том числе и связанных с коприсоединенными орбитами, предложен Веселовым и Новиковым [2]. Соответствующие координаты, названные *спектральными координатами Дарбу*, были детально исследованы в [5]. К задачам параметризации орбиты $SL(N, \mathbb{C})$ этот метод был применен в работе [3]. Он тоже дает не рациональные, а лишь алгебраические координаты и лишь в случае общего положения.

Рассмотрим теперь так называемые *изомонодромные координаты*, построенные Дубровиным и Маззокко в той же статье [5]. Они, как и спектральные координаты Веселова–Новикова, параметризуют, собственно, не орбиту, а некоторое

многообразие, построенное из нескольких орбит. Координаты снова являются не рациональными, а алгебраическими и построены лишь для случая общего положения. Тем не менее метод Дубровина–Маззокко интересен тем, что авторы используют рекуррентную процедуру, приводящую к построению скалярного уравнения порядка N из линейной $N \times N$ -матричной системы первого порядка. Процесс этот напоминает рекурсию, построенную в данной статье, но связь между ними пока не ясна.

Необходимо отметить, что половина построенных координат, та, что связана с проекциями точки орбиты на грассмановы многообразия, ранее применялась в работе Гельфанда и Наймарка [18] для построения унитарных представлений классических групп. Однако в той статье не строятся ни сопряженная часть координат, ни (ко)присоединенное представление. Также не поднимаются там и вопросы симплектической либо пуассоновой геометрии. Отметим и работу Кричевера [6], где используется треугольная нормировка Ψ -функции, что опять же эквивалентно выделению этой части координат.

Основная идея, позволившая решить задачу, принадлежит Деркачеву и Манашову [8]. Идея заключается в том, что матрицы, лежащие на орбите, нужно факторизовать на две треугольные матрицы *разной природы*. Одна матрица, та, которой пользовались Гельфанд и Наймарк, лежит в группе, другая лежит в алгебре. Позднее эта факторизация была использована для построения координат на диагонализуемой орбите в [9].

В данной статье предлагается новая схема, не зависящая от спектральных свойств матрицы.

Автор выражает искреннюю признательность М. А. Семенову-Тян-Шанскому за участие, долготерпение и помощь в прояснении смысла абстрактных понятий.

§1. Основные определения и обозначения

Как известно, любая орбита коприсоединенного действия группы Ли является симплектическим многообразием. В этой статье мы исследуем орбиты общей линейной группы $GL(N, \mathbb{C})$, что позволит нам использовать общеизвестный язык линейной алгебры вместо более узкоспециального языка теории гамильтоновых систем ([12]–[14]), который в данном случае только маскировал бы элементарный смысл построений, сужал круг читателей.

На протяжении всего изложения мы будем иметь в виду топологию Зариского, т.е. под замкнутыми множествами понимаются множества совместных решений некоторых систем алгебраических уравнений. Под открытыми множествами понимаются дополнения к замкнутым.

Элементы A алгебры $\mathfrak{gl}(N, \mathbb{C})$ мы будем трактовать как линейные преобразования N -мерного линейного пространства V , $A \sim \mathcal{A} \in \text{End } V$, снабженного фиксированным базисом $\mathbf{e} = \mathbf{e}^1, \dots, \mathbf{e}^N$:

$$A \in \mathfrak{gl}(N, \mathbb{C}) \leftrightarrow \mathcal{A} : \mathbf{e}x \rightarrow \mathbf{e}Ax, \quad \mathbf{e}x, \mathbf{e}Ax \in V, \quad x, Ax \in \mathbb{C}^N;$$

кроме того, алгебру $\mathfrak{gl}(N)$ и двойственное к ней пространство $\mathfrak{gl}^*(N)$ мы отождествим, используя невырожденное спаривание (скалярное произведение) $\mathfrak{gl}(N, \mathbb{C}) \times \mathfrak{gl}(N, \mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C} : \langle A, B \rangle \rightarrow \text{tr } AB$.

В основе всей конструкции лежит следующее наблюдение (см. [8], [9]): *симплектическая структура орбиты согласована с действием матриц орбиты*

на пространстве, факторизованном по какому-нибудь собственному подпространству.

Пусть $\mathcal{A}$ — линейное преобразование и λ_0 — какое-нибудь его собственное число. Собственное подпространство, соответствующее собственному числу λ_0 , обозначим через K_0 , $K_0 := \ker(\mathcal{A} - \lambda_0 \text{id}) \in G(n, V)$, где через $G(n, V)$ обозначен грассманиан. Пусть $\mathcal{A}$ не пропорционально тождественному и $n := \dim K_0 < \dim V$. Отображение $\mathcal{A} \in \text{End } V$ индуцирует линейное преобразование пространства V/K_0 . Обозначим это преобразование через $\tilde{\mathcal{A}} \in \text{End } V/K_0$.

Обозначение 1. Отображение, переводящее $\mathcal{A}$ в $\tilde{\mathcal{A}}$, обозначим через $\pi_{\{\lambda_0\}}$.

Для восстановления исходного $\mathcal{A}$ по данному $\tilde{\mathcal{A}} = \pi_{\{\lambda_0\}}\mathcal{A}$ нужно знать положение образа преобразования $\mathcal{A} - \lambda_0 \text{id}$ на слое, т.е. на заданной n -мерной плоскости, параллельной K_0 .

§2. Фильтрация орбиты

Предметом нашего исследования будет действие проекции $\pi_{\{\lambda_0\}}$ на жорданову структуру преобразования $\mathcal{A}$. Под *жордановой структурой* $\mathcal{J}$ преобразования $\mathcal{A}$ мы понимаем множество собственных значений этого преобразования и информацию о количестве и размерах жордановых блоков, относящихся к каждому из собственных значений. Через $\mathcal{J}$ мы обозначим нормальную жорданову форму преобразования $\mathcal{A}$, т.е. его матрицу в любом базисе, составленном из циклических векторов этого преобразования.

Замечание 1. Жордановыми цепочками единичной длины будем называть собственные векторы, не имеющие присоединенных векторов. В нормальной жордановой форме матрицы им соответствуют диагональные «блоки размера 1×1 », т.е. сами собственные числа. Такие блоки будем называть *жордановыми блоками единичного размера* или просто *единичными блоками*.

Следующие простые свойства проекции $\pi_{\{\lambda_0\}}$ в силу их важности сформулируем в виде теоремы.

Теорема 1. Пусть $K_0 = \ker(\mathcal{A} - \lambda_0 \text{id}) \neq V$ — собственное подпространство преобразования $\mathcal{A}$. Тогда жорданова структура $\tilde{\mathcal{J}}$ преобразования $\tilde{\mathcal{A}} := \pi_{\{\lambda_0\}}\mathcal{A}$ определяется жордановой структурой $\mathcal{J}$ преобразования $\mathcal{A}$, а именно,

- количество и размер жордановых блоков, соответствующих собственным числам, отличным от λ_0 , у $\mathcal{J}$ и $\tilde{\mathcal{J}}$ совпадают,
- число жордановых блоков, соответствующих λ_0 , у $\tilde{\mathcal{J}}$ равно числу жордановых блоков неединичного размера у $\mathcal{J}$, и каждый блок структуры $\tilde{\mathcal{J}}$ имеет размер, на единицу меньший, чем соответствующий ему неединичный блок структуры $\mathcal{J}$,
- блоки единичного размера жордановой структуры $\mathcal{J}$, соответствующие λ_0 , при преобразовании $\mathcal{J} \xrightarrow{\pi_{\{\lambda_0\}}} \tilde{\mathcal{J}}$ исчезают¹⁾.

Следствие 1. Набор ненулевых проекций любого жорданова базиса для $\mathcal{A}$ в V является жордановым базисом для $\pi_{\{\lambda_0\}}\mathcal{A}$ в V/K_0 .

Обозначим через $\text{End}_{\mathcal{J}} V$ подмногообразие в $\text{End } V$, состоящее из преобразований, имеющих жорданову структуру $\mathcal{J}$. Каждое собственное значение задает

¹⁾ Отображение $\mathcal{J} \rightarrow \tilde{\mathcal{J}}$ не задает отображения множеств жордановых блоков, так как образ единичных блоков не определен.

расслоение над грассманианом $\text{End}_{\mathcal{J}} V \rightarrow G(n, V)$, где значение проекции — это собственное пространство, соответствующее этому собственному числу.

Зафиксируем подпространство M , имеющее дополнительную к n размерность, и отождествим с точками этого пространства точки из V/K_0 . Рассмотрим открытое подмножество в $\text{End}_{\mathcal{J}} V$, состоящее из тех лишь преобразований, у которых K_0 трансверсально M .

Реализуем точки из V/K_0 как линейные подмногообразия, параллельные K_0 . Рассмотрим произвольное отображение $\tilde{\mathcal{A}} \in \text{End}_{\tilde{\mathcal{J}}} V/K_0$ и какой-нибудь его жорданов базис $\tilde{\mathbf{e}}^1, \dots, \tilde{\mathbf{e}}^{N-n}$. Для каждого вектора $\tilde{\mathbf{e}}^i \in V/K_0$, т.е. линейного подмногообразия, параллельного K_0 , выберем по одному ненулевому представителю $\mathbf{e}^1, \dots, \mathbf{e}^{N-n}$. Получим $N-n$ векторов из V , лежащих каждый на своем слое, на n -мерном линейном подмногообразии. Дополним этот набор до базиса пространства V векторами $\mathbf{e}^{N-n+1}, \dots, \mathbf{e}^N$, образующими произвольный базис пространства K_0 .

Зададим отображение $\mathcal{A} \in \text{End } V$ действием на этот базис. Действие это вполне определяется требованием, чтобы базис был жордановым для $\mathcal{A}$, т.е. чтобы $\mathcal{A}$ переводил векторы данного базиса друг в друга в соответствии с законом, диктуемым жордановой структурой $\mathcal{J}$. Единственный произвол, остающийся при таком задании отображения $\mathcal{A}$, состоит в том, что нужно указать, какие из векторов друг другу соответствуют, в частности для векторов, завершавших жордановы цепочки отображения $\tilde{\mathcal{A}}$ (соответствующие λ_0). Эти ранее завершавшие жордановы цепочки отображения $\tilde{\mathcal{A}}$ векторы (бывшие собственными векторами) станут присоединенными векторами первого порядка.

Сделать это можно как угодно, например в соответствии с нумерацией базисных векторов. Для завершающих векторов жордановых цепочек, соответствующих λ_0 , это тоже можно сделать, потому что количество присоединенных векторов первого порядка не превосходит размерности собственного пространства. Поскольку мы начали с произвольной точки $\tilde{\mathcal{A}} \in \text{End}_{\tilde{\mathcal{J}}} V/K_0$ и построение можно провести для любого K_0 , трансверсального M , то в области определения *отображения орбиты как на $\text{End}_{\tilde{\mathcal{J}}}$, так и на ту часть грассманиана, где подпространства трансверсальны M , являются сюръекциями.*

Зафиксируем теперь и $\tilde{\mathcal{A}}$, и K_0 . Найдем соответствующий им образ в $\text{Hom}(M, V/M)$. Он, очевидно, определяется свободой, которую мы имели, назначая векторы жорданова базиса в V в предыдущем рассуждении. Выберем векторы $\mathbf{e}^1, \dots, \mathbf{e}^{N-n}$ лежащими на M . Свобода выбора сведется к возможности добавить к образу каждого вектора произвольный вектор из $K_0 \simeq V/M$, т.е. $\mathcal{A}$ определяется преобразованием $\tilde{\mathcal{A}}$ с точностью до $\text{Hom}(M, V/M)$ с одной лишь оговоркой: $\mathcal{A}$ -образы присоединенных векторов первого порядка, соответствующих $\lambda = \lambda_0$, должны быть линейно независимы. Это условие типа невырожденности. Для каждого $\tilde{\mathcal{A}} \in \text{End}_{\tilde{\mathcal{J}}} M$ оно задает свое открытое подмножество $\text{Hom}^{\tilde{\mathcal{A}}}(M, V/M)$ линейного пространства $\text{Hom}(M, V/M)$, элементы которого определяются условием $\text{rank } \mathcal{P}|_{\ker(\tilde{\mathcal{A}} - \lambda_0 \text{id})} = \dim \ker(\tilde{\mathcal{A}} - \lambda_0 \text{id})$, или, что эквивалентно,

$$\mathcal{P} \in \text{Hom}^{\tilde{\mathcal{A}}}(M, V/M) \iff \ker \mathcal{P}|_{\ker(\tilde{\mathcal{A}} - \lambda_0 \text{id})} = 0. \quad (1)$$

С другой стороны, если зафиксировать какое-нибудь $\mathcal{A}^{\text{fix}}$, имеющее данное K_0 , то через векторы любого базиса пространства V , жорданова для $\mathcal{A}^{\text{fix}}$ (исключив те из них, которые образуют базис в K_0), можно провести подпространство M и отождествить его с V/K_0 . Все остальные $\mathcal{A}$ с той же проекцией на $M \simeq V/K_0$ могут быть получены описанным выше способом с учетом (1). Нами доказана следующая теорема:

Теорема 2. *Для любой точки $\tilde{\mathcal{A}} \in \text{End}_{\tilde{\mathcal{J}}} V/K_0$ множество уровня $(\pi_{\{\lambda_0\}})^{-1} \tilde{\mathcal{A}} \subset \text{End}_{\mathcal{J}} V \cap \{\mathcal{A} : \ker(\mathcal{A} - \lambda_0 \text{id}) = K_0\}$ отображения*

$$\text{End}_{\mathcal{J}} V \cap \{\mathcal{A} : \ker(\mathcal{A} - \lambda_0 \text{id}) = K_0\} \xrightarrow{\pi_{\{\lambda_0\}}} \text{End}_{\tilde{\mathcal{J}}} V/K_0 \quad (2)$$

изоморфно множеству $\text{Hom}^{\tilde{\mathcal{A}}}(V/K_0, K_0)$, открытому в $\text{Hom}(V/K_0, K_0)$. Изоморфизм задается любым подпространством $M \simeq V/K_0$, $M \oplus K_0 = V$.

Замечание 2. Если $\ker(\mathcal{A} - \lambda_0 \text{id}) \cap \text{im}(\mathcal{A} - \lambda_0 \text{id}) = 0$, т. е. геометрическая кратность собственного значения λ_0 совпадает с алгебраической, то построенное отображение в $\text{End}_{\tilde{\mathcal{J}}} V/K_0 \times \text{Hom}(V/K_0, K)$ всех точек орбиты с фиксированным собственным подпространством K_0 есть изоморфизм.

Далее нам потребуется координатная (матричная) запись следствия приведенных выше рассуждений:

Следствие 2. *Любой жорданов базис для $\tilde{\mathcal{A}}$, заданный произвольно выбранными на слоях представителями, может быть преобразован в базис всего пространства, являющийся жордановым для $\mathcal{A}$, без перемещения векторов между слоями, т. е. лишь добавлением к этим представителям некоторых векторов из собственного подпространства $\ker(\mathcal{A} - \lambda_0 \text{id})$ и пополнения всего набора векторами из этого собственного подпространства.*

Для того чтобы дать матричную формулировку, опять зафиксируем подпространство M , дополняющее собственное пространство $\ker(\mathcal{A} - \lambda_0 \text{id})$ до всего V , и выберем какой-нибудь базис $\tilde{\mathbf{e}}$ на нем.

Предложение 1. *Пусть $g \in GL(m, \mathbb{C})$ — матрица, преобразующая базис $\tilde{\mathbf{e}}$ пространства M в какой-нибудь базис $\tilde{\mathbf{e}}_J$ этого пространства, являющийся жордановым для $\tilde{\mathcal{A}} \in \text{End } M$. Тогда существует базис $\mathbf{e}_J$ всего пространства V , являющийся жордановым для $\mathcal{A}$, такой, что*

$$\mathbf{e}_J = (\mathbf{e}_\kappa, \tilde{\mathbf{e}}) \begin{pmatrix} \mathbf{I} & \hat{P} \\ 0 & g \end{pmatrix} = (\mathbf{e}_\kappa, \tilde{\mathbf{e}}_J) \begin{pmatrix} \mathbf{I} & \hat{P} \\ 0 & \mathbf{I} \end{pmatrix}, \quad (3)$$

где $\mathbf{e}_\kappa$ — это та часть базиса $\mathbf{e}_J$, которая образует базис собственного пространства $\ker(\mathcal{A} - \lambda_0 \text{id})$, а $\hat{P}$ — некоторая $n \times m$ -матрица.

Доказательство. Предложение описывает переход сначала от произвольного базиса $\tilde{\mathbf{e}}$ пространства V/K_0 к жорданову базису для $\tilde{\mathcal{A}} \in \text{End } V/K_0$ с помощью матрицы g , а потом к построению из него базиса, являющегося жордановым для $\mathcal{A}$, добавлением к нему лишь векторов из $\ker(\mathcal{A} - \lambda_0 \text{id})$. Матрица $\hat{P}$ описывает, какие именно векторы из $\ker(\mathcal{A} - \lambda_0 \text{id})$ можно добавить к векторам базиса, являющегося жордановым для $\tilde{\mathcal{A}}$, чтобы он остался базисом. $\square$

Вернемся к основному изложению. Мы видим, что слой, состоящий из преобразований с фиксированным собственным пространством K_0 , расслоенного над грассманианом многообразия $\text{End}_{\mathcal{J}} V$, в свою очередь, расслоен над $\text{End}_{\tilde{\mathcal{J}}} V/K_0$.

Слой этого второго расслоения является открытым подмножеством линейного пространства, а подпространство K_0 полностью определяется собственным значением λ_0 .

Отображение $\text{End}_{\mathcal{J}} V \rightarrow \text{End}_{\tilde{\mathcal{J}}} V/K_0$ задано одним числом, собственным значением λ_0 . Назовем соответствующее отображение жордановых структур $\mathcal{J} \rightarrow \tilde{\mathcal{J}}$ проекцией жордановой структуры $\mathcal{J}$ вдоль собственного направления λ_0 :

Определение 1. *Проекцией жордановой структуры $\mathcal{J}$ вдоль собственного направления, соответствующего собственному значению λ_0 , назовем преобразование $\mathcal{J} \rightarrow \mathcal{J} \setminus \{\lambda_0\}$ со следующими свойствами:*

- все жордановы блоки, соответствующие собственным значениям, отличным от λ_0 , у $\mathcal{J}$ и у $\mathcal{J} \setminus \{\lambda_0\}$ совпадают;
- если все жордановы блоки структуры $\mathcal{J}$, соответствующие λ_0 , имеют размер 1×1 (геометрическая кратность собственного значения λ_0 равна алгебраической), то $\mathcal{J} \setminus \{\lambda_0\}$ не имеет собственного значения λ_0 ;
- если среди жордановых блоков, соответствующих λ_0 , имеются блоки размера больше единицы, то жорданова структура $\mathcal{J} \setminus \{\lambda_0\}$ имеет собственное значение λ_0 , и ее жордановы блоки, соответствующие ему, находятся во взаимно однозначном соответствии с блоками структуры $\mathcal{J}$, соответствующими λ_0 и имеющими размер больше единицы; при этом соответствии блок структуры $\mathcal{J}$ имеет на единицу больший размер.

Положим

$$\mathcal{J} \setminus \{\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_k\} := (\dots ((\mathcal{J} \setminus \{\lambda_1\}) \setminus \{\lambda_2\}) \dots) \setminus \{\lambda_k\}.$$

Заметим, что в недиагонализуемом случае при наличии присоединенных векторов набор $\{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$ может содержать одно и то же собственное значение несколько раз, но не больше, чем максимальный размер жорданова блока, соответствующего этому собственному значению.

Рассмотрим теперь упорядоченный набор всех собственных значений $\lambda'_1, \dots, \lambda'_M$, где каждое собственное значение выписано столько раз, каков максимальный размер жорданова блока из ему соответствующих. Собственные числа снабжены штрихами, чтобы отличать элементы этого набора от чисел λ_i , которые попарно различны. Повторяя описанную процедуру, в конце концов, мы получим линейное преобразование $\tilde{A}_M = \lambda'_M \text{id}$, кратное тождественному и не имеющее нетривиальных собственных подпространств. Процесс закончится.

Эта процедура позволяет задать любое линейное преобразование $\mathcal{A}$ в виде набора точек грассманианов и линейных отображений между координатными подпространствами. Причем как на точки грассманианов, так и на линейные отображения *не наложены никакие связи* (уравнения) — это бирациональный изоморфизм. Следующие параграфы посвящены координатной записи этой фильтрации и ее отношениям с симплектической структурой орбиты.

§3. Матричное описание

Если в пространстве V зафиксирован базис, то элементы $\mathcal{A} \in \text{End } V$ получают матричную реализацию $A \in \mathbb{C}^{N \times N}$, и многообразие $\text{End}_{\mathcal{J}} V$, содержащее $\mathcal{A}$, будет множеством $\mathcal{O}(J)$ матриц, подобных данной матрице J .

Сформулируем матричную версию теоремы 2. Зафиксируем временно первые n базисных векторов из K_0 , а остальные базисные векторы из $M \simeq V/K_0$, так

что $\tilde{A}$ будет задаваться постоянной матрицей $\tilde{A}$. Поскольку количество присоединенных векторов не больше количества собственных векторов, то $\dim \ker(\tilde{A} - \lambda_0 \text{id}) \leq \dim K_0$, а в остальном матрица $\tilde{A}$ произвольна, так как мы не накладывали ограничений на жорданову структуру $\mathcal{J}$.

Матрица A будет иметь блочный вид: фиксированные диагональные блоки и нулевой поддиагональный блок. Теорема 2 утверждает, что наддиагональный блок почти произволен, это любая точка вне алгебраически замкнутого множества, задаваемого условием (1).

Предложение 2. Пусть y блочной $(n + m) \times (n + m)$ -матрицы A ,

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_0 I & P \\ 0 & \tilde{A} \end{pmatrix}, \quad I \in \mathbb{C}^{n \times n}, P \in \mathbb{C}^{n \times m}, \tilde{A} \in \mathbb{C}^{m \times m},$$

все блоки, кроме правого верхнего, зафиксированы, матрица $\tilde{A}$ имеет жорданову форму $\tilde{\mathcal{J}}$ и $\dim \ker(\tilde{A} - \lambda_0 \text{id}) < n$.

Тогда на открытом в $\mathbb{C}^{n \times m}$ подмножестве блоков P матрицы A имеют фиксированную, не зависящую от P , жорданову структуру $\mathcal{J}$. Множество блоков структуры $\mathcal{J}$ отличается от множества блоков структуры $\tilde{\mathcal{J}}$ увеличением размера каждого (соответствующего λ_0) блока структуры $\tilde{\mathcal{J}}$ на единицу и наличием добавленных единичных блоков λ_0 в таком количестве, чтобы размерность структуры $\mathcal{J}$ стала $(n + m) \times (n + m)$.

Рассмотрим теперь шаг построенной выше иерархии. Наличие базиса в V не задает автоматически базиса на факторпространствах

$$V_k = (\dots (V/K_1)/K_2) \dots /K_k,$$

поскольку проекция базиса базисом не является. Тем не менее проекция базиса является полным набором векторов, из которого мы всегда можем выбрать базис. Фиксация конкретного набора векторов позволит построить набор функций, определенных не на всем множестве $\text{End}_{\mathcal{J}} V$, а на некотором его открытом подмножестве. Такие подмножества-карты, очевидно, покрывают всю орбиту $\mathcal{O}(\mathcal{J})$. Построим координаты на одной карте.

Разобьем набор базисных векторов $e^1, \dots, e^N$ на подмножества, согласно размерностям подпространств K_i :

$$(e^1, \dots, e^{\dim K_1}), (e^{\dim K_1+1}, \dots, e^{\dim K_1+\dim K_2}), \dots, (e^{\sum_{i=1}^{M-1} \dim K_i+1}, \dots, e^N).$$

Координатное подпространство, натянутое на k -е семейство базисных векторов $(e^{\sum_{i=1}^{k-1} \dim K_i+1}, \dots, e^{\sum_{i=1}^k \dim K_i})$, обозначим через E_k . Координатное подпространство, натянутое на векторы с большими, чем $\sum_{i=1}^k \dim K_i$, номерами, обозначим через V_k .

Построенный итерационный процесс

$$V \rightarrow V/K_1 \rightarrow (V/K_1)/K_2 \rightarrow ((V/K_1)/K_2)/K_3 \rightarrow \dots$$

включает в себя факторизацию по пространствам K_i . Пространства эти корректно определены лишь на соответствующих факторпространствах, в исходном пространстве V цепочке $K_1, K_2, \dots$ соответствует последовательность содержащих друг друга пространств — *флаг, инвариантно определенный преобразованием A* . Особо подчеркнем, что в исходном пространстве V может вообще

не быть инвариантно определенного преобразованием $\mathcal{A}$ подпространства размерности $\dim K_i$.

Размерности введенных нами координатных подпространств $V_k = \sum_{i>k} E_i$ выбраны так, что V_k дополняет заданное исходной матрицей A на k -м шаге подпространство до всего V . Само это пространство мы никак не обозначали, оно появляется в нашей конструкции лишь в виде K_k , т.е. в виде его пересечения с координатным подпространством V_{k-1} . Обозначим его временно через $\mathcal{K}_k$, так что $K_k = V_{k-1} \cap \mathcal{K}_k$.

Забегая вперед, отметим, что для задания аффинной координаты, определяющей грассманову часть данных, нам требуется координатное подпространство V_k дополнительной к $\mathcal{K}_k$ размерности, $\dim V_k = N - \dim \mathcal{K}_k$, а также координатное подпространство E_k , размерность n_k которого равна приращению размерности на шаге $\mathcal{K}_{k-1} \rightarrow \mathcal{K}_k$. Мы проектируем E_k параллельно V_k на $\mathcal{K}_k$:

$$\forall \vec{e} \in E_k \quad \exists! (\vec{k}, \vec{v}), \quad \vec{k} \in \mathcal{K}_k, \quad \vec{v} \in V_k : \vec{e} + \vec{v} = \vec{k},$$

что дает отображение $\mathcal{Q}_k \in \text{Hom}(E_k, V_k) : \vec{e} \rightarrow \vec{v}$. Элементы соответствующей матрицы и образуют аффинные координаты на грассманиане, задающие положение K_k на V_{k-1} . Далее, позволяя себе некоторую вольность, мы будем называть *аффинными координатами* не только матричные элементы, но и *сами отображения* P_k , $\mathcal{Q}_k$, точки линейных пространств $\text{Hom}(V_k, E_k)$ и $\text{Hom}(E_k, V_k)$ соответственно.

Вернемся к описанию связи преобразования $\mathcal{A}_k$, определенного на факторпространстве $(\cdots (V/K_1)/\cdots)/K_k$, с его матрицей A_k . Описанная выше конструкция устанавливает локальный изоморфизм между факторпространством $V/\mathcal{K}_k$ и координатным подпространством V_k . Изоморфизм этот переносит на V_k и действие преобразования $\mathcal{A}_k$. Поскольку на V_k изначально фиксирован базис, то определена и матрица A_k , задающая это преобразование в координатах. Ее элементы — это функции на соответствующих факторпространствах.

Наши построения будут выполнимы на том открытом подмножестве орбиты $\mathcal{O}(J)$, где все подпространства флага, заданного матрицей $A \in \mathcal{O}(J)$, трансверсальны соответствующим координатным подпространствам V_k .

Рассмотрим один шаг процесса. Поскольку шаги полностью аналогичны друг другу, то, чтобы не утяжелять обозначения, опустим, где это не вызовет недоумения, индекс k , а также будем считать собственное значение λ'_k нулем, а потом добавим пропорциональную единичной матрицу к конечной формуле.

Итак, опустим индексы у $A_{k-1} =: A$, $V_{k-1} =: V$. Пусть A имеет нетривиальное ядро $K := \ker A$ размерности $n = \dim K$, и пусть дополнительная до размерности пространства V размерность равна $m = \dim \text{im } A$. Обозначим координатное пространство, натянутое на последние m базисных векторов, через E , а подпространство, натянутое на первые n базисных векторов, через F ; таким образом, $V = F \oplus E$.

Обозначение 2. Пусть $L_1 \oplus L_2 = V$. Проекцию пространства V на L_1 параллельно L_2 обозначим через $\Pi_{L_1}^{\parallel L_2} \in \text{Hom}(V, L_1)$.

Обозначение 3. Пусть $L_1 \oplus L_2 = V$. Проекцией какого-либо множества $L_3 \subset V$ на L_1 параллельно L_2 назовем сужение проекции $\Pi_{L_1}^{\parallel L_2}$ на L_3 и обозначим его через $\Pi_{L_1}^{\parallel L_2}|_{L_3} \in \text{Hom}(L_3, L_1)$.

Проекция вдоль E задает изоморфизм между $\ker A$ и F . Стандартные аффинные координаты на открытом подмножестве грассманиана определяются отображением

$$\mathcal{Q} := \Pi_E^{\parallel F} \circ \Pi_K^{\parallel E}|_F \in \text{Hom}(F, E).$$

Поскольку и на F , и на E зафиксированы базисы, то $\mathcal{Q}$ изображается $m \times n$ -матрицей, ее элементы и есть стандартные аффинные координаты на грассманиане (см. [15]).

Замечание 3. Для наших целей естественнее не концентрироваться на конкретном базисе, а лишь фиксировать разбиение $V = F \oplus E$; поэтому мы и называем координатой само отображение $\mathcal{Q}$.

В завершение этого параграфа обсудим исключенное из $\text{Hom}(E, F)$ замкнутое подмножество. Рассмотрим слой (множество уровня) отображения

$$\text{End}_{\mathcal{J}} V \cap \{A : \ker A = K\} \rightarrow \text{End}_{\tilde{\mathcal{J}}} V/K.$$

Согласно теореме 2, слой этот изоморфен открытому подмножеству $\text{Hom}(E, F) \ni \mathcal{P}$, заданному условием (1). Сейчас в качестве M , дополняющего собственное пространство до всего V , выбрано координатное подпространство $E \sim V/K$; соответственно V/M — это $V/E \sim F \sim K$.

Исключенное из линейного пространства подмножество соответствует множеству отображений $\mathcal{P} \in \text{Hom}(E, F)$, чье сужение на некоторое, зависящее от проекции A на V/K , подпространство *вырождено*, и не задает в $\ker A$ пространства должной (максимально возможной) размерности, предписанной жордановой формой $\mathcal{J}$.

Замечание 4. Этот эффект есть и в случае матриц размера 2×2 (см. пример 1). При параметризации орбиты матрицы $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ с помощью переменных p, q :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ q & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & p \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ q & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -pq & p \\ -pq^2 & pq \end{pmatrix},$$

мы должны оговорить точки дивизора $\{p = 0, q \in \mathbb{C}\}$, потому что для них задаваемая этой формулой матрица $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ не принадлежит орбите.

Заметим, однако, что для многих важных приложений (см. [17], [16]) требуется не исключать обсуждаемые значения P , а, напротив, *расширить орбиту*, добавив к ней этот не принадлежащий орбите дивизор. Продолжение на него симплектической формы останется гладким по построению — его точки параметризованы теми же $\mathcal{P}$ и $\mathcal{Q}$.

Аналогичная проблема возникает всегда, когда J не диагонализуема. Впредь мы будем считать, что орбита уже расширена. Эту расширенную орбиту мы, чтобы радикально не менять обозначений, будем обозначать штрихом у обозначения исходной: $\mathcal{O}'(J)$. Отметим также, что нашей конечной целью все равно является построение *бирациональных* координат, т. е. отображений, определенных лишь на открытых подмножествах орбиты. Не будем далее оговаривать существование алгебраически замкнутого множества, на котором наши построения не работают, и *под изоморфизмом будем понимать бирациональный изоморфизм*.

Предложение 3. Многообразие $\mathcal{O}(J \setminus \{\lambda'_1 \cdots \lambda'_{k-1}\})$ бирационально изоморфно прямому произведению

$$\mathrm{Hom}(E_k, F_k) \times \mathrm{Hom}(F_k, E_k) \times \mathcal{O}(J \setminus \{\lambda'_1 \cdots \lambda'_k\}).$$

Образ $(\mathcal{P}_k, Q_k, A_k)$ точки $A_{k-1} \in \mathcal{O}(J \setminus \{\lambda'_1 \cdots \lambda'_{k-1}\})$ имеет следующие проекции на декартовы сомножители:

$$\mathcal{P}_k = \Pi_{F_k}^{\|E_k} \circ A_{k-1}|_{E_k}, \quad Q_k = \Pi_{E_k}^{\|F_k} \circ \Pi_{K_k}^{\|E_k}|_{F_k}, \quad A_k = \Pi_{E_k}^{\|K_k} \circ A_{k-1}|_{E_k}.$$

§4. Симплектическая структура

4.1. Вспомогательное линейное симплектическое пространство $\mathcal{E}(F \oplus E)$. Пусть $V = F \oplus E$ — это разбиение $n + m$ -мерного пространства V в прямую сумму F и E , $\dim F = n$, $\dim E = m$.

Рассмотрим $(n + m)^2$ -мерное пространство $\mathrm{End} V$ и антисимметричное скалярное произведение $\omega_{\mathrm{End} F \oplus E}$ на нем:

$$\omega_{\mathrm{End} F \oplus E}(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2) = \mathrm{tr} \Pi_E^{\|F} \mathcal{B}_2 \circ \Pi_F^{\|E} \mathcal{B}_1|_E - \mathrm{tr} \Pi_F^{\|E} \mathcal{B}_2 \circ \Pi_E^{\|F} \mathcal{B}_1|_F. \quad (4)$$

Очевидно, что оно вырожденно. Рассмотрим $2nm$ -мерное подпространство $\mathcal{E}(F \oplus E) \subset \mathrm{End} V$:

$$\mathcal{B} \in \mathcal{E}(F \oplus E) \iff \Pi_E^{\|F} \circ \mathcal{B}|_E = 0 = \Pi_F^{\|E} \circ \mathcal{B}|_F,$$

и сужение на это подпространство произведения $\omega_{\mathrm{End} F \oplus E}$ обозначим через $\omega_{\mathcal{E}}$.

Предложение 4. Пространство $(\mathcal{E}(F \oplus E), \omega_{\mathcal{E}})$ — это $2nm$ -мерное симплектическое пространство. Его канонический базис, в частности, образуют всевозможные пары P_{ij}, Q_{ji} , $1 \leq i \leq n$, $n+1 \leq j \leq n+m$, где $P_{ij}, Q_{ji} \in \mathcal{E}(F \oplus E)$ задаются матрицами

$$(P_{ij})_{st} = \delta_{si} \delta_{tj}, \quad (Q_{ji})_{st} = \delta_{sj} \delta_{ti}$$

в каком-нибудь базисе **(fe)**, в котором первые n векторов образуют базис пространства F , а последние m векторов — базис пространства E .

Легко видеть, что в таком базисе **(fe)** векторы из $\mathcal{E}(F \oplus E)$ задаются блочно-внедиагональными матрицами:

$$\mathcal{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{B} \in \mathcal{E}(F \oplus E) \iff b_{11} = 0 = b_{22}.$$

Предложение 5. Пространства $\mathrm{Hom}(E, F) \times \mathrm{Hom}(F, E)$ и $\mathcal{E}(F \oplus E)$ естественно изоморфны.

4.2. Основная теорема. Как мы видели, симплектическое многообразие $\mathcal{O}(J)$ бирационально изоморфно декартову произведению линейного симплектического пространства $\mathcal{E}(F \oplus E)$ и симплектического многообразия $\mathcal{O}(J \setminus \{\lambda_0\})$ меньшей, чем у $\mathcal{O}(J)$, размерности, где

$$F \simeq \ker(J - \lambda_0 I), \quad E \simeq \mathrm{im}(J - \lambda_0 I).$$

Обозначим проекцию на $\mathcal{E}(F \oplus E)$ через $\epsilon_{F \oplus E}$, а для проекции на орбиту $\mathcal{O}(J \setminus \{\lambda_0\})$ оставим обозначение $\pi_{\{\lambda_0\}}$.

Мы построили локальный изоморфизм между двумя симплектическими пространствами, каждое из которых снабжено своей формой. На $\mathcal{O}(J)$ определена форма $\omega_{\mathcal{O}(J)}$, а на $\mathcal{E}(F \oplus E) \times \mathcal{O}(J \setminus \{\lambda_0\})$ — форма $\omega_{\mathcal{E}(F \oplus E)} + \omega_{\mathcal{O}(J \setminus \{\lambda_0\})}$.

Теорема 3. Отображение

$$\mathcal{O}'(J) \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}(F \oplus E) \times \mathcal{O}(J \setminus \{\lambda_0\}) \quad (5)$$

является бирациональным симплектоморфизмом с формой

$$\omega_{\mathcal{O}(J)} = \epsilon_{F \oplus E}^* \omega_{\mathcal{E}(F \oplus E)} + \pi_{\{\lambda_0\}}^* \omega_{\mathcal{O}(J \setminus \{\lambda_0\})}. \quad (6)$$

Доказательство. Вычислим каноническую форму Ли–Пуассона–Кириллова–Костанта $\omega_{\mathcal{O}(J)}$; для касательных векторов ξ_1, ξ_2 имеем

$$\omega_{\mathcal{O}(J)}(\xi_1, \xi_2) = \text{tr } J[g^{-1}\dot{g}_1, g^{-1}\dot{g}_2] = \text{tr}(\dot{g}_1 g^{-1})\dot{A}_2, \quad (7)$$

где касательный к орбите вектор ξ_i реализован как вектор скорости на кривой $g_i(t)$:

$$\dot{g}_i = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} g_i(t), \quad \dot{A}_i = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} g_i(t) J g_i^{-1}(t), \quad g_i(0) = g, \quad i = 1, 2.$$

Рассмотрим $A \in \mathcal{O}(J)$ и множества уровня проекций на декартовы сомножители (5), проходящие через эту точку: $(\bigcup A)|_{\mathcal{E}=\text{const}}$ и $(\bigcup A)|_{\mathcal{O}=\text{const}}$. Поскольку (5) — это изоморфизм, то

$$T_A \mathcal{O}(J) = T_A (\bigcup A)|_{\mathcal{E}=\text{const}} \oplus T_A (\bigcup A)|_{\mathcal{O}=\text{const}}.$$

Пусть $\partial_{\mathcal{E}}$ и $\partial_{\mathcal{O}}$ — векторы из соответствующих подпространств:

$$\partial_{\mathcal{E}} \in T_A (\bigcup A)|_{\mathcal{O}=\text{const}}, \quad \partial_{\mathcal{O}} \in T_A (\bigcup A)|_{\mathcal{E}=\text{const}}.$$

Рассмотрим касательные к линиям

$$A_{\mathcal{O}}(t) = \begin{pmatrix} I & 0 \\ Q(t) & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & P(t) \\ 0 & \tilde{A} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ Q(t) & I \end{pmatrix}^{-1} + \lambda_0 I,$$

$$A_{\mathcal{E}}(t) = \begin{pmatrix} I & 0 \\ Q & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & P \\ 0 & \tilde{A}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ Q & I \end{pmatrix}^{-1} + \lambda_0 I,$$

лежащим на соответствующих поверхностях уровня.

Согласно предложению 1, любая кривая $A_{\mathcal{O}}(t)$ на множестве $(\bigcup A)|_{\mathcal{O}=\text{const}}$ может быть параметризована следующим образом:

$$\begin{pmatrix} I & 0 \\ Q(t) & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{g}(t) & \hat{P}(t) \\ 0 & g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & J_P \\ 0 & \tilde{J} \end{pmatrix} (\cdots)^{-1} (\cdots)^{-1} + \lambda_0 I,$$

следовательно

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{dt} \right|_A A_{\mathcal{O}}(t) &= \left[\begin{pmatrix} I & 0 \\ Q & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} * & * \\ * & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ Q & I \end{pmatrix}^{-1}, A \right], \\ \left. \frac{d}{dt} \right|_A A_{\mathcal{E}}(t) &= \begin{pmatrix} I & 0 \\ Q & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & * \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ Q & I \end{pmatrix}^{-1}, \end{aligned}$$

где звездочками обозначены элементы, для нас несущественные.

Применив формулу (7), получим равенство $\omega_{\mathcal{O}(J)}(\partial_{\mathcal{E}}, \partial_{\mathcal{O}}) = 0$. Пусть $\partial_{\mathcal{Q}}^i \in T_A(\bigcup A)|_{\mathcal{O}=\text{const}}$, $i = 1, 2$, — два касательных вектора к множеству уровня функции P , т. е. касательные к линиям

$$A_{\mathcal{P}\mathcal{O}}^i(t) = \begin{pmatrix} \mathbf{I} & 0 \\ Q_i(t) & \mathbf{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & P \\ 0 & \tilde{A} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{I} & 0 \\ Q_i(t) & \mathbf{I} \end{pmatrix}^{-1} + \lambda_0 \mathbf{I}.$$

Вычисление дает

$$\omega_{\mathcal{O}(J)}(\partial_{\mathcal{Q}}^1, \partial_{\mathcal{Q}}^2) = \text{tr} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \dot{Q}_1 & 0 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \dot{Q}_2 & 0 \end{pmatrix}, A \right] = 0.$$

Пусть $\partial_{\mathcal{P}}^i \in T_A(\bigcup A)|_{\mathcal{O}=\text{const}}$, $i = 1, 2$, — векторы, касательные к множеству уровня функции Q , т. е. касательные к линиям

$$A_{\mathcal{Q}\mathcal{O}}^i(t) = \begin{pmatrix} \mathbf{I} & 0 \\ Q & \mathbf{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & P_i(t) \\ 0 & \tilde{A} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{I} & 0 \\ Q & \mathbf{I} \end{pmatrix}^{-1} + \lambda_0 \mathbf{I}.$$

Поскольку след произведения матриц не зависит от сопряжения их одинаковыми матрицами, можно положить $Q = 0$. Вычисление касательных векторов дает

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{dt} \right|_A \begin{pmatrix} 0 & P_i(t) \\ 0 & \tilde{A} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & \dot{P}_i \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \left. \frac{d}{dt} \right|_A \begin{pmatrix} \hat{g}_i(t) & \hat{P}_i(t) \\ 0 & g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & J_P \\ 0 & \tilde{J} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{g}_i(t) & \hat{P}_i(t) \\ 0 & g \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \left[\begin{pmatrix} * & * \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & P \\ 0 & \tilde{A} \end{pmatrix} \right], \end{aligned}$$

следовательно,

$$\omega_{\mathcal{O}(J)}(\partial_{\mathcal{P}}^1, \partial_{\mathcal{P}}^2) = \text{tr} \begin{pmatrix} 0 & \dot{P}_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0.$$

Простое вычисление дает $\omega_{\mathcal{O}(J)}(\partial_{\mathcal{P}}, \partial_{\mathcal{Q}}) = \text{tr} PQ$, а это означает, что

$$\omega_{\mathcal{O}(J)}|_{\mathcal{O}=\text{const}} = \epsilon_{F \oplus E}^* \omega_{\mathcal{E}(F \oplus E)}.$$

Рассмотрим теперь два вектора ∂^1, ∂^2 , касательных к линиям $A_i(t)$, лежащим на поверхности уровня $(\bigcup A)|_{\mathcal{E}=\text{const}}$. По тем же причинам опять положим $Q = 0$:

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_A \begin{pmatrix} 0 & P \\ 0 & \tilde{A}_i(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \dot{\tilde{A}}_i \end{pmatrix}.$$

Используя представление (3), получаем

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_A \begin{pmatrix} 0 & P \\ 0 & \tilde{A}_i(t) \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} * & * \\ 0 & g^{-1}\dot{g}_i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & P \\ 0 & \tilde{A} \end{pmatrix} \right].$$

Применение формулы (7) дает $\omega_{\mathcal{O}(J)}(\partial^1, \partial^2) = \text{tr} g^{-1}\dot{g}_1 \tilde{A}_2$, что равно значению $\omega_{\mathcal{O}(\tilde{J})}$ на проекциях векторов ∂^1, ∂^2 . Осталось доказать бирациональность, которая следует из того, что построение как проекции $\epsilon_{F \oplus E}$, так и проекции $\pi_{\{\lambda_0\}}$ включает в себя лишь операции отыскания собственных векторов, соответствующих данным собственным значениям, а также проектирования вдоль подпространств. Обратное преобразование состоит в перемножении блочных матриц, см. ниже формулы (8) и (10). $\square$

Хотя найти координаты базисных векторов собственного подпространства и несложно, например, методом Гаусса, явные формулы заведомо будут необозримы. Поэтому формул для отображения $\mathcal{O}'(J) \rightarrow \mathcal{E}(F_1 \oplus E_1) \times \cdots \times \mathcal{E}(F_M \oplus E_M)$, приводить мы не будем, а опишем составляющие его отображения $\mathcal{Q}_k, \mathcal{P}_k$ словами.

Предложение 6. Координатное отображение $\mathcal{Q}_k$ задается матрицей координат нормированных собственных векторов матрицы A_{k-1} . Сопряженное ему координатное отображение $\mathcal{P}_k$ задается матричными элементами симметричного блока Q_k блока самой матрицы A_{k-1} , что эквивалентно следующей рекурсии:

$$A_{k-1} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ Q_k & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda'_k I & P_k \\ 0 & A_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ Q_k & I \end{pmatrix}^{-1}, \quad A_0 := A. \quad (8)$$

Приведем окончательные формулы для отображения

$$\mathcal{E}(F_1 \oplus E_1) \times \mathcal{E}(F_2 \oplus E_2) \times \cdots \times \mathcal{E}(F_M \oplus E_M) \rightarrow \mathcal{O}'(J).$$

Обозначим через Q следующую блочную нижнетреугольную матрицу:

$$\begin{pmatrix} I_{n_1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ q_2^1 & I_{n_2} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ q_3^1 & q_3^2 & I_{n_3} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ q_{M-2}^1 & q_{M-2}^2 & q_{M-2}^3 & \cdots & I_{n_{M-2}} & 0 & 0 \\ q_{M-1}^1 & q_{M-1}^2 & q_{M-1}^3 & \cdots & q_{M-1}^{M-2} & I_{n_{M-1}} & 0 \\ q_M^1 & q_M^2 & q_M^3 & \cdots & q_M^{M-2} & q_M^{M-1} & I_{n_M} \end{pmatrix}.$$

Ее диагональная часть образована M квадратными блоками размера $n_k \times n_k$. Каждый диагональный блок пропорционален единичной матрице соответствующего размера. Блок q_i^j имеет размеры $n_i \times n_j$.

Обозначим через $[Q]_k$ правый нижний диагональный блок матрицы Q , имеющий блочный размер $k \times k$:

$$[Q]_k := \begin{pmatrix} I_{n_{M-k+1}} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ q_{M-k+2}^{M-k+1} & I_{n_{M-k+2}} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ q_{M-k+3}^{M-k+1} & q_{M-k+3}^{M-k+2} & I_{n_{M-k+3}} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ q_{M-2}^{M-k+1} & q_{M-2}^{M-k+2} & q_{M-2}^{M-k+3} & \cdots & I_{n_{M-2}} & 0 & 0 \\ q_{M-1}^{M-k+1} & q_{M-1}^{M-k+2} & q_{M-1}^{M-k+3} & \cdots & q_{M-1}^{M-2} & I_{n_{M-1}} & 0 \\ q_M^{M-k+1} & q_M^{M-k+2} & q_M^{M-k+3} & \cdots & q_M^{M-2} & q_M^{M-1} & I_{n_M} \end{pmatrix},$$

так что $Q = [Q]_M, [Q]_1 = I_{n_M}$.

Обозначим нетривиальную часть блочного вектор-столбца этой матрицы через $\vec{q}^k$:

$$\vec{q}^k := (q_{k+1}^k, q_{k+2}^k, \dots, q_{M-2}^k, q_{M-1}^k, q_M^k)^T.$$

Это прямоугольная матрица размера $(n_{k+1} + n_{k+2} + \cdots + n_{M-2} + n_{M-1} + n_M) \times n_k$.

Рассмотрим теперь блочные вектор-строки

$$\vec{p}_k := (p_k^{k+1}, p_k^{k+2}, \dots, p_k^{M-2}, p_k^{M-1}, p_k^M)$$

Это матрицы размера $n_k \times (n_{k+1} + n_{k+2} + \dots + n_{M-2} + n_{M-1} + n_M)$. Тут блоки q_i^j и p_i^j имеют размеры $n_i \times n_j$ и $n_j \times n_i$ соответственно.

Определим блочную верхнетреугольную матрицу

$$\rho := \begin{pmatrix} \lambda'_1 I_{n_1} & \rho_1^2 & \rho_1^3 & \dots & \rho_1^{M-2} & \rho_1^{M-1} & \rho_1^M \\ 0 & \lambda'_2 I_{n_2} & \rho_2^3 & \dots & \rho_2^{M-2} & \rho_2^{M-1} & \rho_2^M \\ 0 & 0 & \lambda'_3 I_{n_3} & \dots & \rho_3^{M-2} & \rho_3^{M-1} & \rho_3^M \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda'_{n_{M-2}} I_{n_{M-2}} & \rho_{M-2}^{M-1} & \rho_{M-2}^M \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda'_{n_{M-1}} I_{n_{M-1}} & \rho_{M-1}^M \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \lambda'_{n_M} I_{n_M} \end{pmatrix}, \quad (9)$$

и обозначим через $\vec{\rho}_k$ нетривиальные части блочных векторов-строк:

$$\vec{\rho}_k := (\rho_k^{k+1}, \rho_k^{k+2}, \dots, \rho_k^{M-2}, \rho_k^{M-1}, \rho_k^M).$$

Теорема 4. *Матрица*

$$A = Q\rho Q^{-1}, \quad (10)$$

у которой блочные строки матрицы ρ имеют вид

$$\vec{\rho}_k := \vec{p}_k[Q]_{M-k},$$

осуществляет каноническую параметризацию орбиты $\mathcal{O}(J) \ni A$, при которой парой сопряженных координат является пара $(p_j^i)_{st}, (q_i^j)_{ts}$, $1 \leq s \leq n_j$, $1 \leq t \leq n_i$, $1 \leq n_i, n_j \leq M$, матричных элементов блоков p_j^i, q_i^j .

Доказательство. Из предложения 2 следует, что на открытом множестве матричных элементов ρ_i^j матрица A имеет фиксированную жорданову форму, для которой набор пар $\{(\lambda'_1, n_1) \dots (\lambda'_M, n_M)\}$ определяется скалярными диагональными блоками матрицы ρ : числа n_k — это размеры блоков, а λ'_k — их собственные значения. Проведя описанный в этой статье процесс, убедимся, что матричные элементы блоков p_j^i, q_i^j — это канонические координаты. $\square$

§5. Примеры

Пример 1. Случай 2×2 -матриц. Если известно, что λ_1 и λ_2 — собственные значения матрицы $A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$, то, решая однородную линейную систему, получим, что собственный вектор, соответствующий λ_1 , — это $(A_{12}, \lambda_1 - A_{11})^T$, так что $q = (\lambda_1 - A_{11})/A_{12}$, $p = A_{12}$. Предъявим обратное отображение. Оно тоже рационально:

$$A(p, q) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ q & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & p \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -q & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 - pq & p \\ -q(pq + \lambda_2 - \lambda_1) & pq + \lambda_2 \end{pmatrix}. \quad (11)$$

Вычисление канонической формы Ли–Пуассона–Кириллова–Костанта показывает, что это координаты Дарбу. Легко видеть, что при $\lambda_1 = \lambda_2$ формула параметризует жорданову орбиту — конус и только на замкнутом множестве $p = 0$ матрица «уходит с данной орбиты на орбиту меньшей размерности», в данном

случае орбиту нульмерную, в вершину конуса. Распространение значения параметров и симплектической формы на $p = 0$ соответствует раздутию вершины конуса в проективную прямую; подробнее см. [16], [17].

В следующих примерах приводить формулы для $q = q(A_{ij})$, $p = p(A_{ij})$ мы не будем. Везде далее каноническая параметризация матрицы $A \in \mathcal{O}'$ задается произведением $Q\rho Q^{-1}$.

Пример 2. Пусть $N = 4$, $\lambda_i = \lambda_j \iff i = j$:

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ q_4 & 1 & 0 & 0 \\ q_5 & q_2 & 1 & 0 \\ q_6 & q_3 & q_1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \rho = \begin{pmatrix} \lambda_4 & p_4 + p_5 q_2 + p_6 q_3 & p_5 + p_6 q_1 & p_6 \\ 0 & \lambda_3 & p_2 + p_3 q_1 & p_3 \\ 0 & 0 & \lambda_2 & p_1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}.$$

Пример 3. Пусть $N = 5$, $\lambda_i = \lambda_j \iff i = j$:

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ q_7 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ q_8 & q_4 & 1 & 0 & 0 \\ q_9 & q_5 & q_2 & 1 & 0 \\ q_{10} & q_6 & q_3 & q_1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\rho = \begin{pmatrix} \lambda_5 & p_7 + p_8 q_4 + p_9 q_5 + p_{10} q_6 & p_8 + p_9 q_2 + p_{10} q_3 & p_9 + p_{10} q_1 & p_{10} \\ 0 & \lambda_4 & p_4 + p_5 q_2 + p_6 q_3 & p_5 + p_6 q_1 & p_6 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & p_2 + p_3 q_1 & p_3 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 & p_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}.$$

Пример 4. Один жорданов блок 4×4 с нулевым собственным значением:

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ q_4 & 1 & 0 & 0 \\ q_5 & q_2 & 1 & 0 \\ q_6 & q_3 & q_1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \rho = \begin{pmatrix} 0 & p_4 + p_5 q_2 + p_6 q_3 & p_5 + p_6 q_1 & p_6 \\ 0 & 0 & p_2 + p_3 q_1 & p_3 \\ 0 & 0 & 0 & p_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Пример 5. Пусть $N = 6$, $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$:

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ q_{10} & q_6 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ q_{11} & q_7 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ q_{12} & q_8 & q_4 & q_2 & 1 & 0 \\ q_{13} & q_9 & q_5 & q_3 & q_1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\rho = \begin{pmatrix} 0 & 0 & p_{10} + p_{12}q_4 + p_{13}q_5 & p_{11} + p_{12}q_2 + p_{13}q_3 & p_{12} + p_{13}q_1 & p_{13} \\ 0 & 0 & p_6 + p_8q_4 + p_9q_5 & p_7 + p_8q_2 + p_9q_3 & p_8 + p_9q_1 & p_9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & p_4 + p_5q_1 & p_5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & p_2 + p_3q_1 & p_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

ЛИТЕРАТУРА

- [1] М. В. Баби́ч, *On birational Darboux coordinates on coadjoint orbits of classical complex Lie groups*, Зап. научн. сем. ПОМИ, **432** (2015), 36–57; <ftp://ftp.pdmi.ras.ru/pub/publicat/zns1/v432/p036.pdf>.
- [2] А. П. Веселов, С. П. Новиков, *Скобки Пуассона и комплексные торы*, Алгебраическая геометрия и ее приложения, Труды МИАН, **165** (1984), 49–61.
- [3] М. R. Adams, J. Harnad, J. Hurtubise, *Darboux coordinates on coadjoint orbits of Lie algebras*, Lett. Math. Phys., **40**:1 (1997), 41–57.
- [4] A. Gerasimov, S. Kharchev, D. Lebedev, *Representation theory and quantum inverse scattering method: the open Toda chain and hyperbolic Sutherland model*, Int. Math. Res. Not., **2004**:1 (2004), 823–854.
- [5] B. Dubrovin, M. Mazzocco, *Canonical structure and symmetries of the Schlesinger equations*, Comm. Math. Phys., **271**:2 (2007), 289–373.
- [6] И. М. Кричевер, *Аналог формулы Даламбера для уравнений главного кирального поля и уравнения Sine-Gordon*, Докл. АН СССР, сер. матем., **253**:2 (1980), 288–292.
- [7] A. Alekseev, L. Faddeev, S. Shatashvili, *Quantization of symplectic orbits of compact Lie groups by means of the functional integral*, J. Geom. Phys., **5**:3 (1988), 391–406.
- [8] S. E. Derkachov, A. N. Manashov, *R-matrix and Baxter Q-operators for the non-compact $SL(N; \mathbb{C})$ invariant spin chain*, SIGMA, **2** (2006), paper 084; <http://arxiv.org/abs/nlin/0612003>.
- [9] М. В. Баби́ч, С. Э. Деркачев, *О рациональной симплектической параметризации коприсоединенной орбиты $GL(N, \mathbb{C})$, диагонализуемый случай*, Алгебра и анализ, **22**:3 (2010), 16–30.
- [10] М. В. Баби́ч, *О координатах на фазовых пространствах системы уравнений Шлезингера и системы уравнений Гарнье–Пенлеве 6*, Докл. РАН, сер. матем., **412**:4 (2007), 1–5.
- [11] N. Hitchin, *Geometrical aspects of Schlesinger’s equation*, J. Geom. Phys., **23** (1997), 287–300.
- [12] А. Г. Рейман, М. А. Семенов-Тянь-Шанский, *Интегрируемые системы. Теоретико-групповой подход*, Институт компьютерных исследований, Москва–Ижевск, 2003.
- [13] V. Guillemin, E. Lerman, S. Sternberg, *Symplectic fibrations and multiplicity diagrams*, Cambridge University Press, Cambridge, 1996.
- [14] D. MacDuff, D. Salmon, *Introduction to symplectic topology*, Oxford University Press, Oxford, 1998.
- [15] J. Harris, *Algebraic geometry. A first course*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 133, Springer-Verlag, New York, 1992.
- [16] K. Okamoto, *Sur les feuilletages associés aux équations du second ordre à points critiques fixes de P. Painlevé*, Espaces des conditions initiales, Japan. J. Math., **5**:1 (1979), 1–79.

- [17] T. Shioda, K. Takano, *On some Hamiltonian structures of Painlevé systems I*, Funkcial. Ekvac., **40**:2 (1997), 271–291.
- [18] И. М. Гельфанд, М. И. Наймарк, *Унитарные представления классических групп*, Труды МИАН, **36** (1950).

Санкт-Петербургское отделение
Математического института им. В. А. Стеклова
e-mail: mbabich@pdmi.ras.ru

Поступила в редакцию
22 сентября 2014 г.