Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. С. Оганесян, Коммутирующие дифференциальные операторы ранга 2 с полиномиальными коэффициентами, *Функц. анализ и его прил.*, 2016, том 50, выпуск 1, 67–75

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa3224>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.187.69

26 апреля 2023 г., 13:27:42

Коммутирующие дифференциальные операторы ранга 2 с полиномиальными коэффициентами*

© 2016. В. С. Оганесян

В данной работе рассматриваются самосопряженные коммутирующие дифференциальные операторы с полиномиальными коэффициентами. Эти операторы образуют коммутативную подалгебру первой алгебры Вейля. В работе найдены новые примеры коммутирующих дифференциальных операторов ранга 2.

§1. Введение

Если два дифференциальных оператора

$$L_n = \sum_{i=0}^n u_i(x) \partial_x^i, \quad L_m = \sum_{i=0}^m v_i(x) \partial_x^i$$

коммутируют, то существует полином $R(z, w)$, такой, что $R(L_n, L_m) = 0$ (см. [1]). Кривая Γ , определенная соотношением $R(z, w) = 0$, называется *спектральной кривой* этой пары операторов. Если

$$L_n \psi = z \psi, \quad L_m \psi = w \psi,$$

то $(z, w) \in \Gamma$. Для почти всех $(z, w) \in \Gamma$ размерность пространства общих собственных функций ψ одна и та же. Размерность пространства общих собственных функций пары коммутирующих дифференциальных операторов называется ее *рангом*. Ранг является общим делителем порядков операторов m и n . Род спектральной кривой пары коммутирующих операторов иногда называют родом этой пары. Коэффициенты пары коммутирующих операторов ранга 1 явно выражаются через η -функцию Римана [2]. Случай ранга больше 1 значительно сложнее. Первые примеры пар коммутирующих дифференциальных операторов ранга 2 со спектральной кривой рода $g = 1$ были построены Диксмье [8] для невырожденной эллиптической кривой $w^2 = z^3 - \alpha$ с произвольным числом α :

$$L = (\partial_x^2 + x^3 + \alpha)^2 + 2x, \\ M = (\partial_x^2 + x^3 + \alpha)^3 + 3x\partial_x^2 + 3\partial_x + 3x(x^2 + \alpha),$$

где L и M — пара коммутирующих операторов Диксмье ранга 2 и рода 1. Общая классификация пар коммутирующих операторов ранга, большего единицы, была получена Кричевером [3]. Общая форма пары коммутирующих операторов ранга 2 с произвольной эллиптической спектральной кривой была получена Кричевером и Новиковым [4]. Общий вид пары коммутирующих операторов

*Работа выполнена при поддержке гранта президента РФ по государственной поддержке ведущих научных школ (грант НШ-4833.2014.1).

ранга 3 с произвольной эллиптической спектральной кривой (общий вид пары операторов ранга 3 и рода 1 параметризуется двумя произвольными функциями) был найден Моховым ([5], [6]). Более того, примеры пар коммутирующих операторов рода 1 с полиномиальными коэффициентами были построены для произвольного ранга. При этом даже в тех случаях, когда были получены явные формулы для общего вида коммутирующих операторов, задача выделения коммутирующих операторов с полиномиальными коэффициентами является нетривиальной и полностью не решена до сих пор. Задача полного описания коммутирующих операторов с полиномиальными коэффициентами была поставлена и рассматривалась Моховым в [10]. Миронов в [7] построил примеры пары коммутирующих операторов L, M ранга 2 и произвольного рода g :

$$L = (\partial_x^2 + A_3x^3 + A_2x^2 + A_1x + A_0)^2 + g(g+1)A_3x, \\ M^2 = L^{2g+1} + a_{2g}L^{2g} + \dots + a_1L + a_0,$$

где A_i — произвольные константы, $A_3 \neq 0$, a_i — некоторые константы. Кроме того, Мироновым в [9] было доказано, что операторы L_1, M_1 , заданные формулами

$$L_1 = (\partial_x^2 + \alpha_1\mathcal{P}(x) + \alpha_0)^2 + \alpha_1g_2g(g+1)\mathcal{P}(x), \quad \alpha_1 \neq 0, \\ M_1^2 = L_1^{2g+1} + a_{2g}L_1^{2g} + \dots + a_1L_1 + a_0,$$

где $\mathcal{P}$ удовлетворяет уравнению

$$(\mathcal{P}'(x))^2 = g_2\mathcal{P}^2(x) + g_1\mathcal{P}(x) + g_0, \quad g_2 \neq 0,$$

— коммутирующая пара ранга 2 и рода g . В той же работе доказано, что если

$$L_2 = (\partial_x^2 + \alpha_1\wp(x) + \alpha_0)^2 + s_1\wp(x) + s_2\wp^2(x), \\ M_2^2 = L_2^{2g+1} + b_{2g}L_2^{2g} + \dots + b_1L_2 + b_0,$$

где $\wp(x)$ — эллиптическая функция Вейерштрасса, $\alpha_1 = \frac{1}{4} - 2g^2 - 2g$, $s_1 = \frac{1}{4}g(g+1)(16\alpha_0+5g_2)$, $s_2 = -4g(g+2)(g^2-1)$, то L_2, M_2 — тоже коммутирующая пара ранга 2 и рода g .

Примеры пар коммутирующих операторов произвольного рода и произвольного ранга с полиномиальными коэффициентами были построены Моховым в [11]. В настоящей работе найдены новые примеры пар коммутирующих операторов ранга 2. Доказаны следующие три теоремы.

Теорема 1. Оператор $L = (\partial_x^2 + A_6x^6 + A_2x^2)^2 + 16g(g+1)A_6x^4$, где $g \in \mathbb{N}$, $A_6 \neq 0$, а A_2 — произвольное число, коммутирует с некоторым дифференциальным оператором M порядка $4t+2$ при любом $t \geq g$. Пара операторов L, M имеет ранг 2, а ее спектральная кривая имеет вид $w^2 = z^{2m+1} + a_{2m}z^{2m} + \dots + a_1z + a_0$.

Теорема 2. Оператор $L = (\partial_x^2 + A_4x^4 + A_2x^2 + A_0)^2 + 4g(g+1)A_4x^2$, где $g \in \mathbb{N}$, $A_4 \neq 0$ и A_2, A_0 — произвольные числа, коммутирует с некоторым дифференциальным оператором M порядка $4t+2$ при любом $t \geq g$. Пара операторов L, M имеет ранг 2, а ее спектральная кривая имеет вид $w^2 = z^{2m+1} + a_{2m}z^{2m} + \dots + a_1z + a_0$.

Теорема 3. (i) Если $L = (\partial_x^2 + A_nx^n + A_{n-1}x^{n-1} + \dots + A_0)^2 + B_kx^k + B_{k-1}x^{k-1} + \dots + B_0$, где $n > 3$, $A_n \neq 0$, $B_k \neq 0$, коммутирует с оператором M порядка

$4g + 2$ и пара M, L имеет ранг 2, то $k = n - 2$ и $B_{n-2} = (n - 2)^2 m(m + 1)A_n$ для некоторого m .

(ii) Если $L = (\partial_x^2 + Ax^n)^2 + Bx^{n-2}$, то при $n > 6$ не существует дифференциального оператора M порядка $4g + 2$, коммутирующего с L , такого, чтобы пара M, L имела ранг 2.

(iii) Если $n = 5$, то оператор $L = (\partial_x^2 + Ax^5)^2 + 18Ax^3$, $A \neq 0$, коммутирует с оператором M порядка $4g + 2$ для любого g и M, L — пара операторов ранга 2.

(iv) Оператор $L = (\partial_x^2 + Ax^5)^2 + 9m(m + 1)Ax^3$ при $m > 1$, $A \neq 0$, не коммутирует ни с каким оператором M порядка $4g + 2$, с которым он образовывал бы пару ранга 2.

Отметим, что, как показывают выкладки, в случае рода меньше 9 при $m = g$ спектральная кривая пары операторов из теоремы 1 невырожденна для любого ненулевого A_6 и почти всех A_2 . По-видимому, при $m = g$ спектральная кривая невырожденна для любого рода g , но пока это не доказано. При $m > g$, по-видимому, спектральная кривая получается всегда вырожденной. Приведем несколько примеров. При $m = g = 1$ спектральная кривая пары операторов из теоремы 1 имеет вид

$$w^2 = (z + 16A_2)(z^2 + 16A_2z + 192A_6).$$

При $g = 1$, $m = 3$ это

$$w^2 = (z + 16A_2)(z^2 + 16A_2z + 192A_6)(256A_2^2 + C_2 - 16A_2C_1 - z(16A_2 - C_1) + z^2)^2,$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные константы. При $m = g = 3$ и $A_2 = 0$ это

$$w^2 = z(z^2 + 288000A_6)(273715200A_6^2 + 289152A_6z^2 + z^4).$$

У пары операторов из теоремы 2 для почти всех A_2, A_0 спектральная кривая является невырожденной для $m = g < 9$. По-видимому, спектральная кривая является невырожденной при любых $m = g$. Приведем несколько примеров. При $m = g = 1$ получается спектральная кривая следующего вида:

$$w^2 = z^3 + 8A_2z^2 + 16(A_2^2 + A_0A_4)z + 64A_0A_2A_4 + 16A_4^2.$$

При $g = 1, m = 3$ и $A_2 = A_0 = 0$ это

$$w^2 = (z^3 + 16A_4^2)(C_2 + C_1z + z^2)^2,$$

где C_1, C_2 — произвольные константы. При $g = m = 3$ и $A_2 = A_0 = 0$ это

$$w^2 = z(3382560000A_4^4 + 117216A_4^2z^3 + z^6).$$

Теорема 3 не выполняется для полиномов более общего вида $Ax^n + A_{n-1}x^{n-1} + \dots + A_1x + A_0$ и $Bx^{n-2} + B_{n-1}x^{n-1} + \dots + B_1x + B_0$. Например, для любого n существует дифференциальный оператор порядка 6, с которым L коммутирует. Есть основания полагать, что L коммутирует с оператором порядка $4g + 2$ при $g > 1$ только при $n = 3, 4, 5, 6$, но пока это не доказано.

Автор выражает благодарность профессору О. И. Мохову за научное руководство и помощь в написании работы.

§3. Доказательство теоремы 1

Пусть $V = A_6x^6 + A_2x^2$, а $W = 16A_6g(g+1)x^4$, где $g \in \mathbb{N}$, т. е. оператор имеет вид

$$L = (\partial_x^2 + A_6x^6 + A_2x^2)^2 + 16A_6g(g+1)x^4. \quad (5)$$

Докажем, что константы $C_1, \dots, C_g$ можно выбрать таким образом, что $a_{g+1} = \text{const}$. Прямым подсчетом получаем, что

$$a_1 = C_1 + 8A_6g(g+1)x^4.$$

Из преобразования (4) видно, что a_{i+1} всегда является полиномом и зависит от a_i линейно. Применим (4) к $a_i = x^{4k}$ и получим

$$\begin{aligned} a_{i+1} = C_{i+1} - k(4k-1)(4k-2)(4k-3)x^{4k-4} - 16A_2k^2x^{4k} \\ + \frac{8A_6}{k+1}(2k+1)(g-k)(g+k+1)x^{4k+4}. \end{aligned}$$

Далее вычисляем с помощью найденного выше закона преобразования

$$\begin{aligned} a_2 = \tilde{C}_2 + 8A_6(\tilde{C}_1 - 16A_2)g(g+1)x^4 + 96A_6^2g(g+1)(g-1)(g+2)x^8, \\ a_3 = \tilde{C}_3 + 8A_6g(g+1)(256A_2^2 - 16A_2\tilde{C}_1 + \tilde{C}_2 - 5040A_6(g-1)(g+2))x^4 \\ - 96A_6^2(80A_2 - \tilde{C}_1)g(g+1)(g-1)(g+2)x^8 \\ + 1280A_6^3g(g+1)(g-1)(g+2)(g-2)(g+3)x^{12}, \end{aligned}$$

где $\tilde{C}_i$ — константы, зависящие от C_i . У полинома a_3 есть свободный член $\tilde{C}_3$. При преобразовании (4) он умножится на $8A_6g(g+1)x^4$ и из него вычтется $16A_2 \cdot \text{const} \cdot x^4$ и четвертая производная члена $\text{const} \cdot x^8$. Полином a_4 содержит свободный член $\tilde{C}_4$.

В общем случае пусть $a_i = \tilde{C}_i + K_i^1x^4 + K_i^2x^8 + \dots + K_i^ix^{4i}$. Тогда

$$\begin{aligned} a_{i+1} = \tilde{C}_{i+1} + (8A_6g(g+1)\tilde{C}_i - 16A_2K_i^1 - 2 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5K_i^2)x^4 \\ + (\text{const} \cdot K_i^1 - \text{const} \cdot K_i^2 - \text{const} \cdot K_i^3)x^8 + \dots \\ + \frac{8A_6(2i+1)}{i+1}(g-i)(g+i+1)K_i^ix^{4i+4}. \end{aligned}$$

Также заметим, что все слагаемые, кроме старшего члена, содержат константы $C_1, C_2, C_3, \dots$, причем K_i^{i-1} содержит только C_1 , K_i^{i-2} содержит только C_1, C_2 , а K_i^{i-3} — только C_1, C_2, C_3 и т. д. Самый старший член не содержит констант интегрирования.

У a_{g+1} старший член $\text{const} \cdot x^{4(g+1)}$ обращается в нуль, так как он домножается на $\frac{8A_6(2g+1)}{g+1} \cdot (g-g)(g+g+1) = 0$. Таким образом, необходимо выбрать константы $C_1, C_2, \dots$ так, чтобы $K_{g+1}^m = 0$ для всех m . Это всегда можно сделать, так как старший член у a_{g+1} , равный $\text{const} \cdot x^{4g}$, зависит только от C_1 , предпоследний — от C_1 и C_2 и т. д.

Пусть мы не стали обращать в нуль a'_{g+1} , а продолжили применять преобразование (4). Рассмотрим a_{g+1+m} , $m > 0$. Заметим, что a_{g+1+m} имеет такое же строение, как и a_{g+1} , с той лишь разницей, что a_{g+1+m} зависит от констант $C_1, \dots, C_{g+m}, C_{g+1+m}$. Значит, мы можем выбрать константы $C_1, \dots, C_{g+1+m}$

такими, чтобы $a'_{g+1+m} \equiv 0$. А это значит, что найдется дифференциальный оператор порядка $4(g+m)+2$, который будет коммутировать с L , и вместе они составляют пару операторов ранга 2.

§4. Доказательство теоремы 2

Наш оператор имеет вид

$$L = (\partial_x^2 + A_4x^4 + A_2x^2 + A_0)^2 + 4g(g+1)A_4x^2. \quad (6)$$

Как и в предыдущем доказательстве, докажем, что константы $C_1, \dots, C_g$ можно выбрать таким образом, что $a_{g+1} = \text{const}$.

Прямым подсчетом получаем, что

$$a_1 = C_1 + 2A_4g(g+1)x^2.$$

Как и в предыдущем доказательстве, заметим, что a_{i+1} является всегда много-членом и зависит от a_i линейно. Применим (4) к $a_i = x^{2k}$:

$$a_{i+1} = C_{i+1} - k(2k-1)(k-1)(2k-3)x^{2k-4} - 2A_0k(2k-1)x^{2k-2} - 4A_2k^2x^{2k} + \frac{2A_4(2k+1)(g-k)(g+k+1)x^{2k+2}}{k+1}. \quad (7)$$

Далее вычисляем с помощью закона преобразования, выписанного выше:

$$\begin{aligned} a_2 &= \tilde{C}_2 + 2A_4(C_1 - 4A_2)g(g+1)x^2 + 6A_4^2g(g+1)(g-1)(g+2)x^4, \\ a_3 &= \tilde{C}_3 + 2A_4g(g+1)(16A_2^2 - 4A_2\tilde{C}_1 + \tilde{C}_2 - 36A_0A_4(g-1)(g+2))x^2 \\ &\quad - 6A_4^2(20A_2 - C_1)g(g+1)(g-1)(g+2)x^4 \\ &\quad + 20A_4^3g(g+1)(g-1)(g+2)(g-2)(g+3)x^6, \end{aligned}$$

где $\tilde{C}_i$ — константы, зависящие от C_i .

В общем случае пусть $a_i = \tilde{C}_i + K_i^1x^2 + K_i^2x^4 + \dots + K_i^ix^{2i}$. Тогда

$$\begin{aligned} a_{i+1} &= \tilde{C}_{i+1} + (2A_4g(g+1)\tilde{C}_i - 4A_2K_i^1 - 12A_0K_i^2 - 90K_i^3)x^2 \\ &\quad + (\text{const} \cdot K_i^1 - \text{const} \cdot K_i^2 - \text{const} \cdot K_i^3 - \text{const} \cdot K_i^4)x^4 + \dots \\ &\quad + \frac{2A_4(2i+1)}{i+1}(g-i)(g+i+1)K_i^ix^{2i+2}. \end{aligned}$$

Все слагаемые, кроме старшего члена, содержат константы $C_1, C_2, \dots$, причем K_i^{i-1} содержит только C_1 , K_i^{i-2} содержит только C_1, C_2 , а K_i^{i-3} — только C_1, C_2, C_3 и т.д. Самый старший член не содержит констант интегрирования.

У a_{g+1} старший член $\text{const} \cdot x^{2(g+1)}$ обращается в нуль, так как он домножается на $\frac{2A_4(2g+1)}{g+1}(g-g)(g+g+1) = 0$. Таким образом, необходимо выбрать константы $C_1, C_2, \dots$ так, чтобы $K_{g+1}^m = 0$ для всех m . Это всегда можно сделать, так как старший член у a_{g+1} , равный $\text{const} \cdot x^{2(g-1)}$, зависит только от C_1 , предпоследний — от C_1 и C_2 и т.д.

Пусть мы не стали обращать в нуль a'_{g+1} , а продолжили применять преобразование (4). Рассмотрим a_{g+1+m} , $m > 0$. Заметим, что a_{g+1+m} имеет такое же строение, как и a_{g+1} , с той лишь разницей, что a_{g+1+m} зависит от констант $C_1, \dots, C_{g+m}, C_{g+1+m}$. Следовательно, мы можем выбрать константы

$C_1, \dots, C_{g+1+m}$ такими, чтобы $a'_{g+1+m} \equiv 0$. А это значит, что найдется дифференциальный оператор порядка $4(g+m)+2$, который будет коммутировать с L , и вместе они составляют пару операторов ранга 2.

§5. Доказательство теоремы 3

Наш оператор имеет вид

$$L = (\partial_x^2 + A_n x^n + A_{n-1} x^{n-1} + \dots + A_0)^2 + B_k x^k + B_{k-1} x^{k-1} + \dots + B_0.$$

Докажем п. (i). Пусть L коммутирует с оператором порядка $4g+2$, а это значит, что $a'_{g+1} \equiv 0$. Рассмотрим внимательно выражение (4), учитывая, что все a_i — полиномы по x . Пусть степень полинома a_g равна l . Слагаемые в $-4V a_g''' - 6V' a_g'' - 2a_g' V''$ имеют степень $n+l-3$. Сумма $-4V a_i''' - 6V' a_i'' - 2a_i' V''$ не может равняться нулю, так как все коэффициенты при старших членах имеют один знак. Сумма $2a_g W' + 4a_g' W$ также не может равняться нулю, так как коэффициенты при старших членах имеют один знак. Степень полинома $2a_g W' + 4a_g' W$ равна $k+l-1$. Таким образом, если $a'_{g+1} \equiv 0$, то $n+l-3 = k+l-1$, т. е. $k = n-2$.

Теперь докажем, что $B_{n-2} = (n-2)^2 m(m+1) A_n$ для некоторого m . Будем следить за коэффициентом при старшем члене у полинома a_i . Для упрощения выкладок можно без ограничения общности положить

$$L = (\partial_x^2 + A_n x^n)^2 + B_{n-2} x^{n-2},$$

так как из (4) видно, что остальные члены на коэффициент у старшей степени в a_i не влияют. Имеем

$$a_1 = C_1 + \frac{1}{2} B x^{n-2}.$$

Как и в предыдущих доказательствах, используем то, что (4) зависит от a_i линейно. Применим (4) к $a_i = x^k$ и получим, что

$$a_{i+1} = -\frac{1}{4} k(k-1)(k-2)(k-3) x^{k-4} + \frac{(n+2k-2)}{2(n+k-2)} (B - Ak(n+k-2)) x^{n+k-2} + C_{i+1}. \quad (8)$$

Из (8) видно, что старший член у a_i имеет степень $(n-2)i$.

Так как найдется такое g , что $a'_{g+1} \equiv 0$, то при некотором $m \leq g$ старший член у a_{m+1} должен обратиться в нуль. Применим (4) к $a_i = x^{i(n-2)}$:

$$a_{i+1} = -\frac{1}{4} i(n-2)(i(n-2)-1)(i(n-2)-2)(i(n-2)-3) x^{i(n-2)-4} + \frac{(2i+1)}{2(i+1)} (B_{n-2} - Ai(i+1)(n-2)^2) x^{i(n-2)+n-2} + C_{i+1}.$$

Из этого выражения получаем, что

$$B_{n-2} = (n-2)^2 m(m+1) A_n.$$

Пункт (i) доказан.

Докажем пп. (ii)–(iv). Пусть далее

$$L = (\partial_x^2 + A x^n)^2 + (n-2)^2 m(m+1) A x^{n-2}.$$

Выражение (8) переписывается в виде:

$$a_{i+1} = -\frac{1}{4}k(k-1)(k-2)(k-3)x^{k-4} + \frac{A(n+2k-2)}{2(n+k-2)}(m(n-2)-k)((m+1)(n-2)+k)x^{n+k-2} + C_{i+1}. \quad (9)$$

Пусть $n > 6$. Тогда коэффициент старшего члена $x^{(n-2)i}$ у a_i при $i < m$ будет положительным, так как из (9) видно, что при переходе к a_{i+1} он будет домножаться на

$$\frac{A(2i+1)}{2(i+1)}(n-2)^2(m-i)(m+i+1)x^{n-2}.$$

Число $\frac{(n+2k-2)}{2(n+k-2)}(m(n-2)-k)((m+1)(n-2)+k)$ обозначим через N_k . Как было замечено выше, $N_{i(n-2)} \geq 0$ при $i \leq m$. Также легко проверить, что $N_{i(n-2)-4} > 0$ при $i \leq m, i \geq 1$. Далее,

$$a_2 = \tilde{C}_2 - \frac{1}{8}Am(m+1)(n-5)(n-4)(n-3)(n-2)^3x^{n-6} + \text{const} \cdot x^{n-2} + \frac{3}{8}A^2(m-1)m(m+1)(m+2)(n-2)^4x^{2n-4},$$

где $\tilde{C}_i$ — константа, зависящая от C_i . Обратим внимание на то, что коэффициент при x^{n-6} отрицательный. Из (9) видно, что при переходе к a_3 член $A \cdot \text{const} \cdot x^{n-6}$ умножится на $AN_{n-6}x^{n-2} = AN_{(n-2)-4}x^{n-2}$ и из него вычтется четвертая производная члена $A^2 \cdot \text{const} \cdot x^{2n-4}$. Значит, коэффициент при x^{2n-8} будет иметь вид $A^2 \cdot \text{const} \cdot x^{2n-8}$, где константа — отрицательное число. И далее, при $i \leq m$ при переходе от a_i к a_{i+1} коэффициент при $x^{(i-1)(n-2)-4}$ умножается на $AN_{(i-1)(n-2)-4}x^{n-2}$ и из него вычитается положительное число (четвертая производная от $\text{const} \cdot x^{i(n-2)}$). Таким образом, при $i \leq m$ член $A^{i-1} \cdot \text{const} \cdot x^{(i-1)(n-2)-4}$ может обратиться в нуль только при $A = 0$, так как $\text{const} < 0$.

При переходе от a_m к a_{m+1} старший член $x^{m(n-2)}$ умножится на 0 и исчезнет.

Если $i > m$, то при переходе от a_i к a_{i+1} из члена $A^{i-1} \cdot \text{const} \cdot x^{(i-1)(n-2)-4}$ уже ничего вычитаться не будет. Из (9) видно, что при этом переходе в случае $i > m$ член $\text{const} \cdot x^{(i-1)(n-2)-4}$ может обратиться в нуль только из-за множителя $m(n-2) - (i-1)(n-2) + 4$. Когда $i - m \geq 2$, мы, учитывая, что $n > 6$, получаем

$$m(n-2) - (i-1)(n-2) + 4 = (n-2)(m-i+1) + 4 \leq -(n-2) + 4 < 0,$$

а когда $i - m = 1$, то

$$m(n-2) - (i-1)(n-2) + 4 = 4.$$

Таким образом, при $n > 6$ не будет существовать такого g , что $a'_{g+1} \equiv 0$.

Пусть теперь $n = 5$. Рассмотрим оператор

$$L = (\partial_x^2 + Ax^5)^2 + 18Ax^3. \quad (10)$$

Прямым подсчетом убеждаемся, что

$$a_2 = \tilde{C}_2 + 9A\tilde{C}_1x^3,$$

т. е. если $\tilde{C}_1 = 0$, то $a'_2 \equiv 0$. Следовательно, существует оператор порядка 6, который коммутирует с L , и вместе они составляют пару ранга 2. Далее,

$$a_3 = \tilde{C}_3 + 9A\tilde{C}_2x^3.$$

При $\tilde{C}_2 = 0$ существует оператор порядка 10, коммутирующий с L , и вместе они составляют пару ранга 2. В общем случае

$$a_{g+1} = \tilde{C}_{g+1} + 9A\tilde{C}_gx^3.$$

Следовательно, при $\tilde{C}_g = 0$ существует оператор порядка $4g + 2$, коммутирующий с L , и вместе они составляют пару ранга 2.

Пусть теперь $L = (\partial_x^2 + Ax^5)^2 + 9m(m+1)Ax^3$, где $m > 1$. Тогда

$$\begin{aligned} a_2 &= \tilde{C}_2 + 9\tilde{C}_1m(m+1)x^3 + \frac{243}{8}A^2m(m+1)(m+2)(m-1)x^6, \\ a_3 &= \tilde{C}_3 - \frac{10935}{4}A^2m(m+1)(m+2)(m-1)x^2 \\ &\quad + \text{const} \cdot x^3 + \text{const} \cdot x^6 + A^3 \cdot \text{const} \cdot x^9. \end{aligned}$$

Рассуждая, как выше, приходим к выводу, что коэффициент при члене x^{3i-7} у a_i , где $i > 3$, никогда не будет равным нулю.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] J. L. Burchnell, I. W. Chaundy, *Commutative ordinary differential operators*, Proc. London Math. Soc. (2), **21**:1 (1923), 420–440.
- [2] И. М. Кричевер, *Интегрирование нелинейных уравнений методами алгебраической геометрии*, Функц. анализ и его прил., **11**:1 (1977), 15–31.
- [3] И. М. Кричевер, *Коммутативные кольца обыкновенных линейных дифференциальных операторов*, Функц. анализ и его прил., **12**:3 (1978), 20–31.
- [4] И. М. Кричевер, С. П. Новиков, *Голоморфные расслоения над алгебраическими кривыми и нелинейные уравнения*, УМН, **35**:6(216) (1980), 47–68.
- [5] О. И. Мохов, *Коммутирующие обыкновенные дифференциальные операторы ранга 3, отвечающие эллиптической кривой*, УМН, **37**:4(226) (1982), 169–170.
- [6] О. И. Мохов, *Коммутирующие дифференциальные операторы ранга 3 и нелинейные уравнения*, Изв. АН СССР, сер. матем., **53**:6 (1989), 1291–1315.
- [7] A. E. Mironov, *Self-adjoint commuting differential operators and commutative subalgebras of the Weyl algebra*, Invent. Math., **197** (2014), 417–431.
- [8] J. Dixmier, *Sur les algèbres de Weyl*, Bull. Soc. Math. France, **96** (1968), 209–242.
- [9] A. E. Mironov, *Periodic and rapid decay rank two self-adjoint commuting differential operators*, in: Amer. Math. Soc. Transl., Ser. 2, vol. 234, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2014, 309–322; <http://arxiv.org/abs/1302.5735>.
- [10] О. И. Мохов, *О коммутативных подалгебрах алгебр Вейля, связанных с коммутирующими операторами произвольного ранга и рода*, Матем. заметки, **94**:2 (2013), 314–316.
- [11] O. I. Mokhov, *Commuting ordinary differential operators of arbitrary genus and arbitrary rank with polynomial coefficients*, in: Amer. Math. Soc. Trans., Ser. 2, vol. 234, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2014, 323–336.