Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Т. Ю. Байгускаров, Б. Н. Хабибуллин, Голоморфные миноранты плюрисубгармонических функций, *Функц. анализ и его прил.*, 2016, том 50, выпуск 1, 76–79

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa3225>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.23.180.231

26 апреля 2023 г., 16:31:29

Голоморфные миноранты плюрисубгармонических функций*

© 2016. Т. Ю. БАЙГУСКАРОВ, Б. Н. ХАБИБУЛЛИН

Пусть D — область в n -мерном комплексном пространстве $\mathbb{C}^n$ с евклидовой нормой $|\cdot|$, $n \geq 1$. Через $\text{psh}(D)$ и $\text{sbs}(D)$, а также $\text{Hol}(D)$ обозначаем классы плюрисубгармонических и субгармонических, включая функцию $-\infty$, тождественно равную $-\infty$ на D , а также голоморфных в D функций соответственно; $B(z, r) := \{z' \in \mathbb{C}^n : |z' - z| < r\}$ — открытый шар с центром $z \in \mathbb{C}^n$ радиуса $r > 0$. Наиболее глубокий результат о существовании ненулевой функции $f \in \text{Hol}(D)$, в некотором смысле минорирующей $\varphi \in \text{psh}(D)$, — это следующая теорема, доказанная Э. Бомбьери [1, теорема существования] методом Л. Хёрмандера:

Теорема НВ [2, теорема 4.2.7]. Пусть $D \subset \mathbb{C}^n$ — псевдовыпуклая область, $\varphi \in \text{psh}(D)$, $z_0 \in D$ и

$$I_\varphi^2(z_0, r) := \int_{B(z_0, r) \cap D} e^{-2\varphi} d\lambda, \quad \text{где } \lambda \text{ — мера Лебега на } \mathbb{C}^n.$$

Тогда для каждого числа $a > 0$ найдется функция $f_a \in \text{Hol}(D)$, такая, что $f_a(z_0) = 1$ и

$$I_\varphi^2(z_0; f_a) := \int_D \frac{|f_a(z)|^2 e^{-2\varphi(z)}}{(1 + |z - z_0|^2)^{n+a}} d\lambda(z) \leq \left(2 + \frac{(1 + r^2)^2 (n+1)^2}{ar^{2n+2}}\right) I_\varphi^2(z_0, r).$$

Поскольку при $-\infty \neq \varphi \in \text{psh}(D)$ для любой точки $z_0 \notin \{z \in \mathbb{C}^n : \varphi(z) = -\infty\}$ найдется число $r > 0$, для которого $I_\varphi^2(z_0, r) < +\infty$ [3, следствие 5.11], справедливо

Следствие НВ. В условиях теоремы НВ для каждого $a > 0$ найдутся $z_0 \in D$ и ненулевая функция $f_a \in \text{Hol}(D)$, такие, что $I_\varphi^2(z_0; f_a) < +\infty$. В частности, для достаточно малого числа $b > 0$

$$\log |bf_a(z)| \leq \sup_{z' \in B(z, r)} \varphi(z') + n \log \frac{1}{r} + (n+a) \log(1 + |z| + r) \quad (1)$$

для всех $z \in D$ и при всех $0 < r < \text{dist}(z, \mathbb{C}^n \setminus D)$, где dist — функция евклидова расстояния.

Вывод неравенства (1) из конечности $I_\varphi^2(z_0; f_a)$ элементарен, поскольку использует лишь субгармоничность функции $|f_a|^2$ (см., например, [4, лемма 9.1]), но это неравенство находит весьма широкие применения в теории функций комплексных переменных и ее приложениях. В случае $n = 1$ и/или специальных

областей $D \subset \mathbb{C}$ известны и более тонкие результаты, усиливающие (1) и отчасти учитывающие как субгармоничность функций $\log |f_a|$ и φ , так и то, что $f_a \in \text{Hol}(D)$:

[1991 г.] при $D = \mathbb{C}$ для $r = 1$ в правой части неравенства (1) можно оставить лишь $\sup_{z' \in B(z,1)} \varphi(z')$ [5, доказательство основной теоремы, 2а)–2б)], [4, предложение 9.2];

[1992 г.] для непрерывной ограниченной сверху функции $r: D \rightarrow (0, +\infty)$ в области $D \subset \mathbb{C}$, когда $r(z) < \text{dist}(z, \mathbb{C} \setminus D)$, $\sup\{r(z)/r(z'): z, z' \in D, |z - z'| \leq r(z) + r(z')\} < +\infty$ и $-\log r \in \text{sbh}(D)$, оценки (1) можно усилить усреднением функции φ , заменив правую часть на

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(z + r(z)e^{i\theta}) d\theta + \log \frac{1}{r(z)} + 4 \log(1 + |z|) \quad (\text{см. [6, лемма]}); \quad (2)$$

[2015 г.] при $D = \mathbb{C}$ для любого числа $r \in (0, 1]$ при достаточно малом $b > 0$ правую часть в (1) можно заменить на усреднение $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(z + re^{i\theta}) d\theta$ [7, теорема 2].

Теорема 1. Для псевдовыпуклой области $D \subset \mathbb{C}^n$ при $-\infty \neq \varphi \in \text{psh}(D)$ для любого числа $a > 0$ найдется ненулевая функция $f \in \text{Hol}(D)$, удовлетворяющая оценке

$$\log |f(z)| \leq \frac{n!}{\pi^n r^{2n}} \int_{B(z,r)} \varphi d\lambda + n \log \frac{1}{r} + (n+a) \log(1 + |z| + r) \quad (3)$$

для всех $z \in D$ и всех r , $0 < r < \text{dist}(z, \mathbb{C}^n \setminus D)$, где $n!/(\pi^n r^{2n}) = 1/\lambda(B(0, r))$, т.е. первое слагаемое в правой части неравенства (3) — усреднение функции φ в шаре $B(z, r)$ по мере Лебега λ .

Доказательство. По первому утверждению следствия НВ найдутся точка $z_0 \in D$, ненулевая функция $f_a \in \text{Hol}(D)$ и число $C_a > 0$, для которых $I_\varphi^2(z_0; f_a) \leq C_a$, т.е.

$$\int_D |f_a|^2 e^{-2\psi} d\lambda \leq C_a, \quad \psi(z) := \varphi(z) + \frac{1}{2}(n+a) \log(1 + |z - z_0|^2), \quad z \in D.$$

Лемма. Пусть $u \in \text{sbh}(B(z, r'))$ и $r' > r > 0$. Тогда для любой функции v , интегрируемой по мере Лебега λ на $B(z, r)$, справедливы неравенства

$$\begin{aligned} \exp \left(u(z) - \frac{1}{\lambda(B(0, r))} \int_{B(z, r)} v d\lambda \right) &\leq \exp \left(\frac{1}{\lambda(B(0, r))} \int_{B(z, r)} (u - v) d\lambda \right) \\ &\leq \frac{1}{\lambda(B(0, r))} \int_{B(z, r)} e^{u-v} d\lambda. \end{aligned}$$

Первое неравенство здесь следует из условия $u \in \text{sbh}(B(z, r'))$, а второе — из интегрального неравенства Йенсена для выпуклой функции $\exp$ [8, теорема 2.1].

Применим лемму к $u := 2 \log |f_a| \in \text{psh}(D) \subset \text{sbh}(D)$ и $v := 2\psi$ для произвольных точки $z \in D$ и r , $0 < r < \text{dist}(z, \mathbb{C}^n \setminus D)$ (ниже V_{2n} — объем единичного

шара в $\mathbb{C}^n$):

$$\begin{aligned}
 2 \log |f_a(z)| &\leq \frac{2}{\lambda(B(0, r))} \int_{B(z, r)} \psi d\lambda + \log \frac{1}{\lambda(B(0, r))} + \log \int_{B(z, r)} e^{2 \log |f_a| - 2\psi} d\lambda \\
 &\leq \frac{2}{\lambda(B(0, r))} \int_{B(z, r)} \varphi d\lambda + \frac{n+a}{\lambda(B(0, r))} \int_{B(z, r)} \log(1 + |z' - z_0|^2) d\lambda(z') \\
 &\quad + 2n \log \frac{1}{r} - \log V_{2n} + \log \int_{B(z, r)} |f_a| e^{-2\psi} d\lambda \\
 &\leq \frac{2}{\lambda(B(0, r))} \int_{B(z, r)} \varphi d\lambda + (n+a) \log(1 + (|z - z_0| + r)^2) \\
 &\quad + 2n \log \frac{1}{r} - \log V_{2n} + \log C_a \\
 &\leq \frac{2}{\lambda(B(0, r))} \int_{B(z, r)} \varphi d\lambda + 2n \log \frac{1}{r} + 2(n+a) \log(1 + |z| + r) \\
 &\quad + 2(n+a) \log(1 + |z_0|) - \log V_{2n} + \log C_a.
 \end{aligned}$$

Деление неравенств на 2 при $f := bf_a$ с числом $b := (1 + |z_0|)^{-n-a} \sqrt{V_{2n}/C_a}$ дает (3). $\square$

Замечание 1. При $n = 1$ правая часть в (3) всегда, причем зачастую и существенно, меньше и лучше, чем (2). Этого нельзя сказать о двух других предшествующих результатах от 1991 г. и 2015 г. Более тонкие результаты для голоморфных функций одной комплексной переменной см. в [9], в частности, для целых функций, следствие 2.

Пусть $\mathcal{M}_c^+(D)$ — класс всех положительных борелевских мер с компактным носителем в области $D \subset \mathbb{C}^n$, а $\mathcal{M}_{ac}^+(D)$ — подкласс всех абсолютно непрерывных относительно λ мер в нем. Мера $\mu \in \mathcal{M}_c^+(D)$ называется *выметанием меры* $\mu_0 \in \mathcal{M}_c^+(D)$ относительно $\text{psh}(D)$, если

$$\int \varphi d\mu_0 \leq \int \varphi d\mu \quad \text{для всех } \varphi \in \text{psh}(D) \quad (\text{пишем } \mu_0 \prec_{\text{psh}(D)} \mu).$$

Теорема 2. Пусть область $D \subset \mathbb{C}^n$ псевдовыпукла, $\mu_0 \in \mathcal{M}_c^+(D)$, а $F: D \rightarrow [-\infty, +\infty]$ — интегрируемая по μ_0 и локально интегрируемая в D по мере Лебега λ функция. Если

$$-\infty < \inf \left\{ \int F d\mu : \mu_0 \prec_{\text{psh}(D)} \mu \in \mathcal{M}_{ac}^+(D) \right\}, \quad (4)$$

то для любых числа $a > 0$ и непрерывной функции $d: D \rightarrow (0, +\infty)$, удовлетворяющей условию $d(z) < \text{dist}(z, \mathbb{C}^n \setminus D)$ при всех $z \in D$, для «переменного» усреднения

$$F^{*d}(z) := \frac{1}{\lambda(B(0, d(z)))} \int_{B(z, d(z))} F d\lambda, \quad z \in D, \quad (5)$$

найдется функция $f \in \text{Hol}(D)$, для которой

$$\log |f(z)| \leq \frac{1}{\lambda(B(0, r))} \int_{B(z, r)} F^{*d} d\lambda + n \log \frac{1}{r} + (n+a) \log(1 + |z| + r) \quad (6)$$

для всех $z \in D$ и $0 < r < \text{dist}(z, \mathbb{C}^n \setminus D)$.

Доказательство. Условие (4) означает, что для функции F^{*d} из (5) найдется миноранта $\varphi \leq F^{*d}$ на D , $-\infty \neq \varphi \in \text{psh}(D)$, если воспользоваться теоремой 7.1 из [4] в пространстве $\mathbb{C}^n$, отождествленном с $2n$ -мерным вещественным пространством, с $H := \text{psh}(D) \subset \text{sbh}(D)$ и $F^{(d)} := F^{*d}$. Применение теоремы 1 к миноранте $\varphi \in \text{psh}(D)$ завершает доказательство. $\square$

Замечание 2. Условие (4), достаточное для существования ненулевой голоморфной миноранты для переменного усреднения функции F , в форме (6) очень близко к необходимому [4, предложение 7.1], если отвлечься от «логарифмических добавок» в правой части неравенства (6).

ЛИТЕРАТУРА

- [1] E. Bombieri, *Invent. Math.*, **10** (1970), 248–263. [2] L. Hörmander, *Notions of Convexity*, Birkhäuser, Boston, 1994. [3] П. Лелон, Л. Груман, *Целые функции многих комплексных переменных*, Мир, М., 1989. [4] Б. Н. Хабибуллин, *Изв. РАН, сер. матем.*, **65**:5 (2001), 167–190. [5] Б. Н. Хабибуллин, *Изв. АН СССР, сер. матем.*, **55**:5 (1991), 1101–1123. [6] О. В. Епифанов, *Матем. заметки*, **51**:1 (1992), 83–92. [7] Т. Ю. Байгускаров, Г. Р. Талипова, Б. Н. Хабибуллин, *Алгебра и анализ* (2016), в печати. [8] У. Хейман, П. Кеннеди, *Субгармонические функции*, Мир, М., 1980. [9] Б. Н. Хабибуллин, Т. Ю. Байгускаров, *Матем. заметки*, **99**:4 (2016), 591–605.

Башкирский государственный университет
e-mail: t.bayguskarov@gmail.com

Поступила в редакцию
3 апреля 2015 г.

Башкирский государственный университет
e-mail: khabib-bulat@mail.ru

УДК 512.667.3

Об усиленном законе взаимности Суслина и его приложениях к вопросам равносоставленности гиперболических многогранников

© 2016. Д. Г. Руденко

1. Введение. Для совершенного поля F и гладкого алгебраического многообразия X над ним Воеводский определил мотивные кохомологии $H_{\mathcal{M}}^{p,q}(X, \mathbb{Q})$. В частном случае, когда $X = \text{Spec}(F)$, эти группы определяются как кохомологии явно заданного комплекса свободных абелевых групп $H^p(\mathbb{Q}(q)(F))$ (см., например, [5]). А. Б. Гончаровым было предложено иное и значительно более явное гипотетическое описание групп мотивных кохомологий поля произвольного веса. Подробное изложение гипотез Гончарова содержится, например, в [4]. Из предложенного им описания, в частности, можно вывести гипотезы Загье о выражении дзета-функций числовых полей в целых точках через полилогорифмы. Ниже мы рассмотрим группу $H_{\mathbb{G}}^{n-1,n}(F, \mathbb{Q})$, которая, в соответствии с гипотезами Гончарова, должна совпадать с группой $H_{\mathcal{M}}^{n-1,n}(F, \mathbb{Q})$. Мы докажем для этой группы некоторые свойства мотивных кохомологий, в частности, гомотопическую инвариантность и закон взаимности Суслина. Затем будут описаны приложения этих результатов к геометрии гиперболических многогранников.