Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. А. Неретин, О сферичности подгруппы $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ в группе диффеоморфизмов окружности, *Функц. анализ и его прил.*, 2016, том 50, выпуск 2, 91–94

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa3227>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.67.100

26 апреля 2023 г., 15:34:53

ЛИТЕРАТУРА

- [1] L. Nachbin, Trans. Amer. Math. Soc., **68** (1950), 28–46. [2] D. Goodner, Trans. Amer. Math. Soc., **69** (1950), 89–108. [3] J. L. Kelley, Trans. Amer. Math. Soc., **72** (1952), 323–326. [4] M. Hasumi, Tohoku Math. J. (2), **10:2** (1958), 135–142. [5] E. G. Effros, Z.-J. Ruan, *Operator Spaces*, The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 2000. [6] А. Я. Хелемский, Труды ММО, **47** (1984), 179–218. [7] А. Я. Хелемский, Матем. сб., **204:7** (2013), 127–158. [8] M. Hamana, Tohoku Math. J. (2), **30:3** (1978), 439–453. [9] M. Takesaki, Kodai Math. Sem. Rep., **12:1** (1960), 1–10. [10] J. Diestel, H. Jarchow, A. Tonge, *Absolutely Summing Operators*, Cambridge Studies in Advanced Math., vol. 43, Cambridge University Press, Cambridge, 1995. [11] A. T.-M. Lau, R. J. Loy, G. A. Willis, Studia Math., **119:2** (1996), 161–178. [12] Y. Gordon, D. R. Lewis, Acta Math., **133:1** (1974), 27–48. [13] B. Blackadar, *Operator Algebras*, Encyclopedia of Math. Sciences, vol. 122, Springer-Verlag, Berlin, 2006. [14] R. R. Smith, D. P. Williams, J. Operator Theory, **16:1** (1986), 51–74.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
e-mail: nemeshnorbert@yandex.ru

Поступила в редакцию
8 сентября 2015 г.

УДК 517.986.4+515.164.85

О сферичности подгруппы $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ в группе диффеоморфизмов окружности*

© 2016. Ю. А. НЕРЕТИН

1. Утверждение. Пусть $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ — группа вещественных матриц порядка 2 с определителем 1, пусть $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ — ее фактор по центру и $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim$ — универсальное накрытие над $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$. Обозначим через Diff (соответственно через Diff^3) группу C^∞ -гладких (соответственно C^3 -гладких) диффеоморфизмов, сохраняющих ориентацию. Через $\mathrm{Diff}^\sim$ мы обозначим универсальную накрывающую группы Diff , мы реализуем ее как группу гладких диффеоморфизмов q прямой $\mathbb{R}$, удовлетворяющих условию

$$q(\phi + 2\pi) = q(\phi) + 2\pi.$$

Коцикл Ботта $c(q_1, q_2)$ на $\mathrm{Diff}^\sim$ определяется формулой

$$c(q_1, q_2) = \int_0^{2\pi} \ln q'_1(q_2(\phi)) d \ln q'_2(\phi).$$

Рассмотрим центральное расширение $\widetilde{\mathrm{Diff}}$ группы $\mathrm{Diff}^\sim$, определенное коциклом Ботта (см., например, [1, §3.4]). Через $\widetilde{\mathrm{Diff}}^3$ мы обозначим аналогичное центральное расширение группы Diff^3 .

Теорема. (а) Подгруппа $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ является сферической в Diff^3 в следующем смысле: для любого неприводимого унитарного представления группы Diff^3 размерность пространства $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ -инвариантных векторов не превосходит 1.

(б) Подгруппа $\mathrm{PSL}_2^\sim(\mathbb{R})$ сферична в группе $\widetilde{\mathrm{Diff}}^3$.

*Поддержано грантом FWF, проект P25142.

Замечание. (а) Несколько серий сферических представлений групп Diff и $\text{Diff}^\sim$ были построены в [4], см. также [5, §IX.6]. Все такие сферические представления непрерывны в C^3 -топологии.

(б) Соболевские диффеоморфизмы окружности класса $s > 3/2$ образуют группу (см. [3, теорема 1.2 и приложение В]). Наше доказательство выживает для соболевских диффеоморфизмов класса $H^{4.5}$.

2. Доказательство для Diff . Фиксируем точку a на окружности. Через $G_0 \subset \text{Diff}$ мы обозначим группу диффеоморфизмов q , таких, что $q(x) = x$ в некоторой окрестности точки a . Через G_* мы обозначим группу диффеоморфизмов q , плоских в a , т. е. таких, что

$$q(a) = a, \quad q'(a) = 1, \quad q''(a) = q'''(a) = \dots = 0.$$

Пусть ρ — неприводимое унитарное представление группы Diff в H . Обозначим через V подпространство всех $\text{PSL}_2(\mathbb{R})$ -неподвижных векторов. Пусть P — оператор ортогонального проектирования на V . Для $h \in \text{PSL}_2(\mathbb{R})$ мы имеем $P\rho(h) = \rho(h)P = P$. Положим

$$\hat{\rho}(g) := P\rho(g)P.$$

Этот оператор зависит лишь от двойного класса смежности группы Diff по $\text{PSL}_2(\mathbb{R})$,

$$\hat{\rho}(h_1gh_2) := \hat{\rho}(g), \quad h_1, h_2 \in \text{PSL}_2(\mathbb{R}).$$

Лемма. Если ρ непрерывно в C^3 -топологии, то операторы $\hat{\rho}(g)$ попарно коммутируют.

Доказательство. Нашим основным доводом является следующее утверждение:

Пусть последовательность $h_j \in \text{PSL}_2(\mathbb{R})$ сходится к бесконечности¹⁾. Тогда для любого унитарного представления ρ последовательность $\rho(h_j)$ слабо сходится к P ; см. работу Хау и Мура [2, теорема 5.1] (это общее утверждение для полупростых групп, в случае $\text{PSL}_2(\mathbb{R})$ оно легко доказывается перебором).

Реализуем окружность как вещественную проективную прямую $\mathbb{RP}^1 = \mathbb{R} \cup \infty$. Без ограничения общности мы можем положить $a = \infty$. Через $U_t(x) = x + t$ мы обозначим сдвиг на $\mathbb{R}$, он содержится в $\text{PSL}_2(\mathbb{R})$. Рассмотрим диффеоморфизмы $r, q \in G_0$. Для достаточно больших t носители диффеоморфизмов r и $U_t \circ q \circ U_{-t}$ не пересекаются. Поэтому эти диффеоморфизмы коммутируют и

$$\rho(r)\rho(U_t)\rho(q)\rho(U_{-t}) = \rho(U_t)\rho(q)\rho(U_{-t})\rho(r).$$

Отсюда вытекает, что $P\rho(r)\rho(U_t)\rho(q)P = P\rho(q)\rho(U_{-t})\rho(r)P$. Переходя к слабому пределу при $t \rightarrow +\infty$, мы получаем, что $P\rho(r)P\rho(q)P = P\rho(q)P\rho(r)P$. Итак,

$$\hat{\rho}(r)\hat{\rho}(q) = \hat{\rho}(q)\hat{\rho}(r), \quad \text{где } r, q \in G_0.$$

Но G_0 плотна в G_* . Следовательно, то же равенство имеет место для $r, q \in G_*$. Действительно, пусть $r_j, q_j \in G_0$ — последовательности, сходящиеся к r, q соответственно. Переходя к повторному пределу

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \left(\lim_{k \rightarrow \infty} \hat{\rho}(r_j)\hat{\rho}(q_k) \right) = \lim_{j \rightarrow \infty} \left(\lim_{k \rightarrow \infty} \hat{\rho}(q_k)\hat{\rho}(r_j) \right)$$

¹⁾То есть для любого компактного подмножества B , начиная с некоторого места, выполнено $h_j \notin B$.

и учитывая раздельную непрерывность произведения операторов в слабой топологии, мы получаем желаемое утверждение.

Наш следующий довод: множество $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R}) \cdot G_* \cdot \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ плотно в Diff в C^3 -топологии. Докажем это. Выберем координату на $\mathbb{RP}^1$, такую, что $a = 0$. Пусть $q \in \mathrm{Diff}$. Рассмотрим его производную Шварца

$$S(q) = (q'q''' - \tfrac{3}{2}(q'')^2)(q')^{-2}.$$

Возьмем точку b , в которой $S(q)(b) = 0$ (по теореме Жиса производная Шварца диффеоморфизма окружности имеет, по крайней мере, четыре нуля, см. [6, теорема 4.2.1]). Тогда для

$$r := U_{-q(b)} \circ q \circ U_b$$

мы имеем $r(0) = 0$, $S(r)(0) = 0$. Рассмотрим отображения

$$\sigma(x) = ux/(u^{-1} + vx);$$

такие $\sigma \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ оставляют 0 на месте. Выбирая параметры u, v , мы можем получить

$$(r \circ \sigma)'(0) = 1, \quad (r \circ \sigma)''(0) = 0.$$

Напомним следующую формулу для преобразований производной Шварца:

$$S(r \circ \sigma) = (S(r) \circ \sigma) \cdot (\sigma')^2 + S(\sigma).$$

Так как наше σ дробно-линейно, то $S(\sigma) = 0$. Следовательно, $S(r \circ \sigma)(0) = 0$ и $(r''' \circ \sigma)(0) = 0$. Такой диффеоморфизм r может быть аппроксимирован в C^3 -топологии элементами из G_* . Это доказывает лемму. $\square$

Утверждение (а) теоремы является следствием леммы. Заметим, что $\hat{\rho}(g)^* = \hat{\rho}(g^{-1})$. Итак, мы получили семейство коммутирующих операторов в V , замкнутое относительно взятия сопряжения. Если $\dim V > 1$, то такое семейство имеет нетривиальное инвариантное подпространство в V , обозначим его через W . Возьмем Diff -циклическую оболочку подпространства W , т. е. подпространство Z , порожденное векторами $\rho(g)w$, где $g \in \mathrm{Diff}^3$, а $w \in W$. Тогда

$$P\rho(g)w = P\rho(g)Pw = \hat{\rho}(g)w \in W.$$

Следовательно, $PZ = W$, а потому Z является собственным подпространством в H .

3. Доказательство для $\widetilde{\mathrm{Diff}}$. Мы повторяем предыдущее доказательство с двумя небольшими добавлениями.

(1) Рассмотрим гомоморфизм $\pi: \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim \rightarrow \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R}) \simeq \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim/\mathbb{Z}$. Мы говорим, что последовательность $h_j \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\sim$ сходится к ∞ , если $\pi(h_j) \rightarrow \infty$. Теорема Хау–Мура остается в силе.

(2) Для пары диффеоморфизмов p, q с непересекающимися носителями коцикл Ботта $c(q, p)$ равен нулю. Следовательно, диффеоморфизмы p, q коммутируют в расширенной группе.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Д. Б. Фукс, *Когомологии бесконечномерных алгебр Ли*, Наука, М., 1984.
 [2] R. E. Howe, C. C. Moore, J. Funct. Anal., **32**:1 (1979), 72–96. [3] H. Inci, T. Karpeler, P. Topalov, Mem. Amer. Math. Soc., **226**:1062 (2013). [4] Ю. А. Неретин, Докл.

АН СССР, **294:1** (1987), 37–41. [5] Ю. А. Неретин, *Категории симметрий и бесконечные группы*, УРСС, М., 1998. [6] В. Овсиенко, С. Табачников, *Проективная дифференциальная геометрия. Старое и новое*, МЦНМО, М., 2008.

University of Vienna
Институт теоретической и экспериментальной физики
Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
e-mail: neretin@mccme.ru

Поступила в редакцию
3 марта 2015 г.

УДК 517.36

Об устойчивости неподвижных точек дискретных динамических систем в пространстве $\text{conv } \mathbb{R}^n$

© 2016. В. И. Слынько*

Проблемы теории управления динамическими системами в пространстве $\mathbb{R}^n$, в частности, построение, аппроксимации и качественный анализ множеств достижимости [1] тесно связаны с исследованиями динамических систем в метрическом пространстве $\text{conv } \mathbb{R}^n$. Некоторые результаты, посвященные качественному анализу дискретных динамических систем (ДДС) в пространстве $\text{conv } \mathbb{R}^n$, приведены в [2].

Пусть $\text{conv } \mathbb{R}^n$ — метрическое пространство выпуклых компактов из $\mathbb{R}^n$, в котором введена метрика Хаусдорфа d_H . Это пространство обладает структурой линейной полугруппы относительно операций сложения Минковского и умножения на неотрицательный скаляр. Разность двух элементов в этом пространстве не всегда определена. В работе [3, с. 967] описано вложение пространства $\text{conv } \mathbb{R}^n$ в линейное нормированное пространство, пополнение которого изоморфно банахову пространству $C(S^{n-1})$. Соответствие $\text{conv } \mathbb{R}^n \ni u \rightarrow h_u(p) \in C(S^{n-1})$, $h_u(p)$ — опорная функция выпуклого компакта u , является изометрическим изоморфизмом. Таким образом, можно определить разность двух элементов пространства $\text{conv } \mathbb{R}^n$ как элемент пространства $C(S^{n-1})$.

Рассмотрим в пространстве $\text{conv } \mathbb{R}^n$ следующую ДДС:

$$\bar{u} = G(u, V[u]), \quad u \in \text{conv } \mathbb{R}^n, \quad G: \text{conv } \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \text{conv } \mathbb{R}^n, \quad (1)$$

где $V[u]$ — объем компакта u , а отображение G удовлетворяет следующему предположению: для любого $(u_0, v_0) \in \text{conv } \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+$ существуют $G'_u(u_0, v_0) \in L(C(S^{n-1}))$, $G'_v(u_0, v_0) \in C(S^{n-1})$ и окрестность $\mathcal{U} \subset \text{conv } \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, такие, что при всех $(u, v) \in \mathcal{U}$ выполняется равенство

$$G(u, v) = G(u_0, v_0) + G'_u(u_0, v_0)\Delta u + G'_v(u_0, v_0)\Delta v + o(\|(\Delta u, \Delta v)\|),$$

где $\Delta u = u - u_0$, $\Delta v = v - v_0$, $\|(u, v)\| = \|u\|_{C(S^{n-1})} + |v|$, $L(X)$ — банахова алгебра линейных ограниченных операторов, действующих в банаховом пространстве X .

Предположим, что существует неподвижная точка $u^* \in \text{conv } \mathbb{R}^n$ ДДС (1), т. е. $u^* = G(u^*, V[u^*])$. Определим, следуя [3, с. 968], вариации $\delta u = u - u^*$, $\delta \bar{u} = \bar{u} - u^*$ как элементы пространства $C(S^{n-1})$; тогда, учитывая формулы

*Работа выполнена при частичной поддержке Министерства образования и науки Украины, проект №0116U004691.