Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. Руденко, Об усиленном законе взаимности
Суслина и его приложениях к вопросам равно-
составленности гиперболических многогранников,
Функц. анализ и его прил., 2016, том 50, вы-
пуск 1, 79–84

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa3229>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.81.137.203

26 апреля 2023 г., 18:28:25

Доказательство. Условие (4) означает, что для функции F^{*d} из (5) найдется миноранта $\varphi \leq F^{*d}$ на D , $-\infty \neq \varphi \in \text{psh}(D)$, если воспользоваться теоремой 7.1 из [4] в пространстве $\mathbb{C}^n$, отождествленном с $2n$ -мерным вещественным пространством, с $H := \text{psh}(D) \subset \text{sbh}(D)$ и $F^{(d)} := F^{*d}$. Применение теоремы 1 к миноранте $\varphi \in \text{psh}(D)$ завершает доказательство. $\square$

Замечание 2. Условие (4), достаточное для существования ненулевой голоморфной миноранты для переменного усреднения функции F , в форме (6) очень близко к необходимому [4, предложение 7.1], если отвлечься от «логарифмических добавок» в правой части неравенства (6).

ЛИТЕРАТУРА

- [1] E. Bombieri, *Invent. Math.*, **10** (1970), 248–263. [2] L. Hörmander, *Notions of Convexity*, Birkhäuser, Boston, 1994. [3] П. Лелон, Л. Груман, *Целые функции многих комплексных переменных*, Мир, М., 1989. [4] Б. Н. Хабибуллин, *Изв. РАН, сер. матем.*, **65**:5 (2001), 167–190. [5] Б. Н. Хабибуллин, *Изв. АН СССР, сер. матем.*, **55**:5 (1991), 1101–1123. [6] О. В. Епифанов, *Матем. заметки*, **51**:1 (1992), 83–92. [7] Т. Ю. Байгускаров, Г. Р. Талипова, Б. Н. Хабибуллин, *Алгебра и анализ* (2016), в печати. [8] У. Хейман, П. Кеннеди, *Субгармонические функции*, Мир, М., 1980. [9] Б. Н. Хабибуллин, Т. Ю. Байгускаров, *Матем. заметки*, **99**:4 (2016), 591–605.

Башкирский государственный университет
e-mail: t.bayguskarov@gmail.com

Поступила в редакцию
3 апреля 2015 г.

Башкирский государственный университет
e-mail: khabib-bulat@mail.ru

УДК 512.667.3

Об усиленном законе взаимности Суслина и его приложениях к вопросам равносоставленности гиперболических многогранников

© 2016. Д. Г. Руденко

1. Введение. Для совершенного поля F и гладкого алгебраического многообразия X над ним Воеводский определил мотивные кохомологии $H_{\mathcal{M}}^{p,q}(X, \mathbb{Q})$. В частном случае, когда $X = \text{Spec}(F)$, эти группы определяются как кохомологии явно заданного комплекса свободных абелевых групп $H^p(\mathbb{Q}(q)(F))$ (см., например, [5]). А. Б. Гончаровым было предложено иное и значительно более явное гипотетическое описание групп мотивных кохомологий поля произвольного веса. Подробное изложение гипотез Гончарова содержится, например, в [4]. Из предложенного им описания, в частности, можно вывести гипотезы Загье о выражении дзета-функций числовых полей в целых точках через полилогорифмы. Ниже мы рассмотрим группу $H_{\mathcal{G}}^{n-1,n}(F, \mathbb{Q})$, которая, в соответствии с гипотезами Гончарова, должна совпадать с группой $H_{\mathcal{M}}^{n-1,n}(F, \mathbb{Q})$. Мы докажем для этой группы некоторые свойства мотивных кохомологий, в частности, гомотопическую инвариантность и закон взаимности Суслина. Затем будут описаны приложения этих результатов к геометрии гиперболических многогранников.

2. Определения. С каждой абелевой группой A можно связать ее рационализацию: векторное пространство $A \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$. Не указывая этого каждый раз явно, мы будем заменять каждую абелеву группу на соответствующее $\mathbb{Q}$ -векторное пространство.

В работе [7] Суслин показал, что при $p = 1$, $q = 2$ группа мотивных когомологий совпадает с так называемой группой Блоха, определение которой мы сейчас приведем. Рассмотрим подгруппу $R_2(F)$ свободной группы $\mathbb{Q}[\mathbb{P}^1(F)]$ с базисом, состоящим из точек проективной прямой $\mathbb{P}^1(F)$, порожденную элементами

$$[0], \quad [\infty] \quad \text{и} \quad \sum_{i=1}^5 (-1)^i [r(x_1, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_5)],$$

где $(x_1, \dots, x_5)$ — всевозможные пятерки различных точек проективной прямой $\mathbb{P}^1(F)$. Здесь $r(a, b, c, d) = (a - b)(c - d)/((c - b)(a - d))$ является обозначением для двойного отношения четырех точек. Группа $B_2(F)$ определяется как следующий фактор:

$$B_2(F) := \mathbb{Q}[\mathbb{P}^1(F)]/R_2(F).$$

Можно доказать, что отображение $\delta: \mathbb{Q}[\mathbb{P}^1(F)] \rightarrow F^\times \wedge F^\times$, переводящее базисный элемент $[x] \in \mathbb{Q}[\mathbb{P}^1(F)]$ в элемент Стейнберга $x \wedge (1 - x)$, равно нулю на группе $R_2(F)$. Группой Блоха поля F , совпадающей по теореме Суслина с группой мотивных когомологий $H_{\mathcal{M}}^{1,2}(F, \mathbb{Q})$, называется ядро факторотображения $\delta: B_2(F) \rightarrow F^\times \wedge F^\times$. Образ элемента $[x]$ в $B_2(F)$ будем обозначать через $\{x\}_2$.

Определение 1. Группа $H_G^{n-1,n}(F, \mathbb{Q})$ — это ядро отображения

$$B_2(F) \otimes_a \bigwedge^{n-2} F^\times \xrightarrow{\delta} \bigwedge^n F^\times.$$

Здесь символом $B_2(F) \otimes_a \bigwedge^{n-2} F^\times$ обозначен фактор группы $B_2(F) \otimes_{\mathbb{Q}} \bigwedge^{n-2} F^\times$ по подгруппе, порожденной элементами вида $\{x\}_2 \otimes x \wedge x_1 \wedge \dots \wedge x_{n-3}$ для некоторых $x, x_1, \dots, x_{n-3} \in F$, а отображение δ задается формулой

$$\delta(\{x\}_2 \otimes x_1 \wedge \dots \wedge x_{n-2}) = x \wedge (1 - x) \wedge x_1 \wedge \dots \wedge x_{n-2}.$$

Заметим, что коядро отображения δ совпадает с группой $H_{\mathcal{M}}^{n,n}(F, \mathbb{Q})$, т.е. с K -теорией Милнора.

Приведем некоторые соображения, мотивирующие данное выше определение. В статье [1] Бейлинсон высказал предположение, что для произвольного поля F существует положительно градуированная коалгебра Ли $\mathcal{L}_{\mathcal{M}}(F)$, для которой выполнено соотношение

$$H_{[q]}^p(\mathcal{L}_{\mathcal{M}}(F), \mathbb{Q}) = H_{\mathcal{M}}^{p,q}(F, \mathbb{Q}).$$

Символом $H_{[q]}^p$ мы обозначаем p -е когомологии градуировки q . Можно показать, что если такая коалгебра существует, то компонента градуировки 1 совпадает с $F^\times$, а компонента градуировки 2 — с описанной выше группой $B_2(F)$. При этом коумножение задается отображением δ . Гончаров высказал предположение о схожем описании коалгебры $\mathcal{L}_{\mathcal{M}}(F)$ в градуировке 3. В соответствии с этим предположением $\mathcal{L}_{\mathcal{M}}(F)_3$ совпадает с группой $B_3(F)$, являющейся фактором свободной группы $\mathbb{Q}[\mathbb{P}^1(F)]$ по некоторой группе $R_3(F)$ соотношений, связанных с функциональными уравнениями для функции трилогарифм,

$B_3(F) := \mathbb{Q}[\mathbb{P}^1(F)]/R_3(F)$. При этом коумножение является отображением

$$\delta: B_3(F) \rightarrow B_2(F) \otimes F^\times,$$

заданным на образующих группы $B_3(F)$ формулой $\delta(\{x\}_3) = \{x\}_2 \otimes x$. Рассмотрим три последних члена коцепного комплекса коалгебры Ли $\mathcal{L}_{\mathcal{M}}(F)$ в градуировке n :

$$B_3(F) \otimes \bigwedge^{n-3} F^\times \xrightarrow{\delta} B_2(F) \otimes \bigwedge^{n-2} F^\times \xrightarrow{\delta} \bigwedge^n F^\times.$$

Легко видеть, что первая группа когомологий этого комплекса совпадает с группой $H_G^{n-1,n}(F, \mathbb{Q})$, определенной выше. В соответствии с гипотезами Гончарова она также должна совпадать с $H_{\mathcal{M}}^{n-1,n}(F, \mathbb{Q})$.

Определение 2. Рассмотрим поле L с дискретным нормированием ν и полем вычетов $\bar{L}$. Определим *отображение вычета*

$$\partial_\nu: B_2(L) \otimes_a \bigwedge^{n-2} L^\times \longrightarrow B_2(\bar{L}) \otimes_a \bigwedge^{n-3} \bar{L}^\times$$

на элементе $X = \{x\}_2 \otimes x_1 \wedge \cdots \wedge x_{n-2}$ следующими правилами: если $\nu(x) \neq 0$, то положим $\partial_\nu(X) = 0$; если все нормирования элементов x_i равны нулю, то также положим $\partial_\nu(X) = 0$; наконец, если $\nu(x_1) = 1$, $\nu(x_2) = 0$, $\dots$, $\nu(x_{n-2}) = 0$, положим

$$\partial_\nu(X) = \{\bar{x}\}_2 \otimes \bar{x}_2 \wedge \cdots \wedge \bar{x}_{n-2}.$$

На остальные элементы группы $B_2(L) \otimes_a \bigwedge^{n-2} L^\times$ определение вычета распространяется по линейности. Аналогично можно определить *отображение вычета*

$$\partial_\nu: \bigwedge^n L^\times \longrightarrow \bigwedge^{n-1} \bar{L}^\times.$$

В итоге определено цепное отображение

$$\begin{array}{ccc} B_2(L) \otimes_a \bigwedge^{n-2} L^\times & \xrightarrow{\delta} & \bigwedge^n L^\times \\ \downarrow \partial_\nu & & \downarrow \partial_\nu \\ B_2(\bar{L}) \otimes_a \bigwedge^{n-3} \bar{L}^\times & \xrightarrow{\delta} & \bigwedge^{n-1} \bar{L}^\times. \end{array}$$

Нетрудно показать, что отображение ∂_ν индуцирует классическое отображение вычета в K -теории Милнора. В дальнейшем нам будет важен случай, когда L — поле рациональных функций на гладкой кривой над полем F , а ν — дискретное нормирование, связанное с некоторой точкой P этой кривой. В этом случае поле вычетов будет обозначаться символом F_P , а отображение вычета — через ∂_P .

3. Основные результаты. Основным результатом является следующая теорема гомотопической инвариантности:

Теорема 1. Для произвольного поля F следующая последовательность точна:

$$0 \longrightarrow H_G^{n-1,n}(F, \mathbb{Q}) \longrightarrow H_G^{n-1,n}(F(t), \mathbb{Q}) \xrightarrow{\oplus \partial_P} \bigoplus_{P \neq \infty} H_G^{n-2,n-1}(F_P, \mathbb{Q}) \longrightarrow 0.$$

В этой последовательности инъективное отображение индуцировано вложением поля F в поле $F(t)$, а сюръективное есть прямая сумма отображений вычета, построенных выше.

В статье [6] Суслин построил отображение нормы для K -теории Милнора и доказал закон взаимности, опираясь на теорему гомотопической инвариантности Милнора, в точности аналогичную теореме 1. Доказательство Суслина полностью переносится на случай групп $H_G^{n-1,n}(F, \mathbb{Q})$, что позволяет построить на этих группах отображения нормы, доказать их свойства и вывести закон взаимности:

Следствие 1. Для гладкой проективной кривой $\mathcal{X}$ над $\mathbb{C}$ отображение полного вычета

$$\text{Res}: H_G^{n-1,n}(\mathbb{C}(\mathcal{X}), \mathbb{Q}) \rightarrow H_G^{n-2,n-1}(\mathbb{C}, \mathbb{Q}),$$

определяемое как сумма отображений вычета ∂_P по всем точкам кривой $\mathcal{X}$, тождественно равно нулю.

Следующий результат был сформулирован Гончаровым как гипотеза об усиленном законе взаимности Суслина в [3].

Следствие 2. Для гладкой проективной кривой $\mathcal{X}$ над $\mathbb{C}$ цепное отображение полного вычета

$$\begin{array}{ccc} B_2(\mathbb{C}(\mathcal{X})) \otimes_a \mathbb{C}(\mathcal{X})^\times & \xrightarrow{\delta} & \bigwedge^3 \mathbb{C}(\mathcal{X})^\times \\ \downarrow \text{Res} & & \downarrow \text{Res} \\ B_2(\mathbb{C}) & \xrightarrow{\delta} & \mathbb{C}^\times \wedge \mathbb{C}^\times \end{array}$$

определяемое как сумма отображений вычета ∂_P по всем точкам кривой $\mathcal{X}$, цепно гомотопно нулю. Следовательно, существует стягивающее отображение

$$h: \bigwedge^3 \mathbb{C}(\mathcal{X})^\times \longrightarrow \mathbb{C}^\times \wedge \mathbb{C}^\times,$$

такое, что $h \circ \delta = \text{Res}$ и $\delta \circ h = \text{Res}$.

4. Приложения к теории равноставленности. Перед тем как сформулировать следующую теорему, напомним некоторые определения из теории равноставленности многогранников в пространстве Лобачевского $\mathbb{H}^3$. Подробное изложение можно найти, например, в [2].

Определение 3. Группа $\mathcal{P}(\overline{\mathbb{H}}^3)$ — это абелева группа, заданная образующими $[T]$, соответствующими гиперболическим многогранникам T , возможно, с вершинами на абсолюте, и следующими соотношениями. Во-первых, $[T_1 \sqcup T_2] = [T_1] + [T_2]$, если внутренности многогранников T_1 и T_2 не пересекаются. Во-вторых, элементы группы, соответствующие изометричным многогранникам, совпадают.

Каждому комплексному числу $z \in \mathbb{C}$ соответствует элемент $[z] \in \mathcal{P}(\overline{\mathbb{H}}^3)$, отвечающий тетраэдру с вершинами на абсолюте, имеющими координаты ∞ , 0, 1, z в модели Пуанкаре в верхней полуплоскости.

У каждого элемента $[T] \in \mathcal{P}(\overline{\mathbb{H}}^3)$ однозначно определен гиперболический объем $\text{Vol}(T) \in \mathbb{R}$ и инвариант Дена $D(T) \in \mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. Для многогранника с

длинами ребер l_i и соответствующими двугранными углами α_i инвариант Дена определяется формулой $D(T) = \sum l_i \otimes \alpha_i$.

Неформально содержание следующей теоремы можно описать так: по каждой тройке обратимых мероморфных функций на компактной гладкой кривой можно канонически построить класс равноставленности гиперболического многогранника. Полученное отображение полилинейно и антисимметрично. Инвариант Дена полученного многогранника выражается через значения одних функций в нулях и полюсах других, а гиперболический объем выражается как интеграл по кривой от некоторой явно заданной дифференциальной формы. Желание доказать существование подобной конструкции и было первоначальной мотивировкой данной работы.

Обозначим через p проекцию $\mathbb{C}^\times \wedge \mathbb{C}^\times \rightarrow \mathbb{R} \otimes (\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$, заданную формулой $p(z \wedge w) = z \wedge w - \bar{z} \wedge \bar{w}$. Нетрудно проверить, что $D([z]) = p(z \wedge (1 - z))$.

Теорема 2. *Для гладкой проективной кривой $\mathcal{X}$ над $\mathbb{C}$ существует линейное отображение*

$$H: \mathbb{C}(\mathcal{X})^\times \wedge \mathbb{C}(\mathcal{X})^\times \wedge \mathbb{C}(\mathcal{X})^\times \rightarrow \mathcal{P}(\overline{\mathbb{H}})$$

со следующими свойствами:

- (1) [инвариант Дена] $D \circ H = \sum_{P \in \mathcal{X}} p \circ \partial_P$,
- (2) $H(f \wedge (1 - f) \wedge g) = \sum_{P \in \mathcal{X}} \text{ord}_P(g) \cdot [f(P)]$,
- (3) [объем] $\text{Vol} \circ H(f_1 \wedge f_2 \wedge f_3) = (2\pi i)^{-1} \int_{\mathcal{X}(\mathbb{C})} r_2(f_1, f_2, f_3)$, где

$$r_2(f_1, f_2, f_3) = \text{Alt}_3 \left(\frac{1}{6} \log |f_1| d \log |f_2| \wedge d \log |f_3| - \frac{1}{2} \log |f_1| d \arg(f_2) \wedge d \arg(f_3) \right).$$

Эту теорему несложно вывести из следствия 2, используя результаты Дюпона [2] и Гончарова [3].

5. Идея доказательства теоремы 1. Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccc} B_2(F) \otimes_a \bigwedge^{n-2} F^\times & \xrightarrow{i_2} & B_2(F(t)) \otimes_a \bigwedge^{n-2} F(t)^\times & \xrightarrow{\oplus \partial_P} & \bigoplus_{P \neq \infty} B_2(F_P) \otimes_a \bigwedge^{n-3} F_P^\times \\ \downarrow \delta & & \downarrow \delta & & \downarrow \oplus \delta \\ \bigwedge^n F^\times & \xrightarrow{i_1} & \bigwedge^n F(t)^\times & \xrightarrow{\oplus \partial_P} & \bigoplus_{P \neq \infty} \bigwedge^{n-1} F_P^\times. \end{array}$$

Обозначим через $Y \cong \text{Ker}(\bigoplus \partial_P) / \text{Im}(i_2)$ первую группу когомологий верхней строки коммутативной диаграммы, а через $X \cong \text{Ker}(\bigoplus \partial_P) / \text{Im}(i_1)$ первую группу когомологий нижней строки. Содержательная часть доказательства теоремы 1 сводится к проверке изоморфизма $X \cong Y$. Оказывается, что группу X можно явно задать с помощью образующих и соотношений, хотя и весьма громоздко. После этого нетрудно найти элементы группы Y , переходящие под действием δ в образующие группы X . Используя результаты Суслина для случая $n = 2$, можно свести доказательство изоморфизма $X \cong Y$ к проверке нескольких соотношений в группе $B_2(F(t)) \otimes_a F(t)$. Чтобы дать читателю представление о типе возникающих здесь вычислений, приведем эти соотношения.

Обозначим через $F(t)_d^\times$ подгруппу в $F(t)^\times$, порожденную многочленами степени, не превышающей d . Аналогично, обозначим через $B_2^d(F(t))$ подгруппу в $B_2(F(t))$, порожденную элементами, образ которых при отображении δ попадает в группу $F(t)_d^\times \wedge F(t)_d^\times < F(t)^\times \wedge F(t)^\times$. Наконец, для неприводимого многочлена P и взаимно простых с ним многочленов G и H символом $x_P(G, H)$ будем обозначать рациональную функцию $(\overline{G} \cdot \overline{H})/\overline{GH}$, где чертой обозначается остаток от деления соответствующего многочлена на P .

Лемма 3. Для неприводимого унитарного многочлена P степени $d \geq 1$ и произвольных многочленов $G_1, G_2, G_3 \in F[t]$, не делящихся на P , следующая линейная комбинация элементов из $B_2^d(F(t))$ попадает в $B_2^{d-1}(F(t))$:

$$\{x_P(G_1, G_2)\}_2 - \{x_P(G_1 \cdot G_3, G_2)\}_2 - \{x_P(G_1, G_3)\}_2 + \{x_P(G_1 \cdot G_2, G_3)\}_2.$$

Лемма 4. Для неприводимого унитарного многочлена P степени $d \geq 1$ и произвольных многочленов $F_1, F_2, G_1, G_2 \in F[t]$, взаимно простых с P , следующий элемент попадает в $B_2^{d-1}(F(t)) \otimes_a F(t)_{d-1}^\times$:

$$\{x_P(F_1, F_2)\}_2 \otimes x_P(G_1, G_2) + \{x_P(G_1, G_2)\}_2 \otimes x_P(F_1, F_2).$$

Лемма 5. Пусть P — унитарный полином степени $d \geq 1$, а R_1, R_2 — произвольные ненулевые элементы поля вычетов F_P . Пусть последовательность элементов поля F_P определена следующим правилом: $R_{i+1} = (1 - R_i)/R_{i+1}$. Заметим, что при этом $R_{i+5} = R_i$. Тогда

$$\sum_{i=1}^5 \{\overline{R_i}\}_2 \otimes P + \sum_{i=1}^5 \{\overline{R_{i-1}} \overline{R_{i+1}} / \overline{1 - R_i}\}_2 \otimes \overline{R_i} \in B_2^{d-1}(F(t)) \otimes_a F(t)_{d-1}^\times.$$

Этих соотношений оказывается достаточно для того, чтобы доказать теорему 1. Все остальные результаты, описанные в этой статье, без труда из нее выводятся.

Автор глубоко признателен А. А. Суслину, А. Б. Гончарову и А. А. Бейлинсону за полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] A. A. Beilinson, P. Deligne, in: *Motives*, Proc. Symp. Pure Math., vol. 55, part. 2, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1994, 97–121. [2] J. L. Dupont, *Osaka J. Math.*, **19:3** (1982), 599–641. [3] A. B. Goncharov, *J. Amer. Math. Soc.*, **18:1** (2005), 1–60. [4] A. B. Goncharov, in: *Proc. Sympos. Pure Math.*, vol. 55, part 2, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1994, 43–96. [5] A. Suslin, V. Voevodsky, in: *The Arithmetic and Geometry of Algebraic Cycles* (Banff, AB, 1998), NATO Sci. Ser. C Math. Phys. Sci., Vol. 548, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 2000, 117–189. [6] А. А. Суслин, *Изв. АН СССР, сер. матем.*, **43:6** (1979), 1394–1429. [7] А. А. Суслин, в кн.: *Теория Галуа, кольца, алгебраические группы и их приложения*, Труды МИАН, т. 183, Наука, Ленинградское отд., Л., 1990, 180–199.