Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. А. Короткин, В. Б. Матвеев,
О тэта-функциональных решениях системы Шле-
зингера и уравнения Эрнста, *Функц. анализ и его
прил.*, 2000, том 34, выпуск 4, 18–34

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa323>

Использование Общероссийского математического портала Math-
Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользователь-
ским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.174.16.151

26 апреля 2023 г., 15:01:38

УДК 517.9

О тэта-функциональных решениях системы Шлезингера и уравнения Эрнста

© 2000. Д. А. Короткин, В. Б. Матвеев

§1. Введение

Алгебро-геометрический подход к решению солитонных уравнений возник из работ Новикова, Лакса, М. Каца, Итса, Матвеева, Дубровина, Мак-Кина, ван Мёрбеке и Кричевера, выполненных в 1974–1976 гг. Общей чертой большинства алгебро-геометрических решений является то, что динамика линеаризуется на якобиане фиксированной алгебраической кривой.

Концептуально новым явилось применение алгебро-геометрической идеологии к стационарному осесимметрическому уравнению Эйнштейна (уравнению Эрнста). Вложение этого уравнения в схему метода обратной задачи было инициировано работами [1, 2], где было найдено соответствующее лаксово представление¹. В отличие от большинства интегрируемых систем эта пара параметризуется рациональной алгебраической кривой, зависящей от пространственно-временных переменных. Эта особенность влечет за собой коренные изменения в конструкции и качественных свойствах алгебро-геометрических решений, которые были впервые получены в 1988 г. в работах [4, 5]. Эти решения строятся по гиперэллиптическим кривым, у которых две точки ветвления зависят от пространственно-временных координат. Алгебро-геометрические решения уравнения Эрнста не обладают свойствами периодичности или почти периодичности, которые имеют место для всех уравнений типа КдФ. Более того, в случае уравнения Эрнста алгебро-геометрическая конструкция явно содержит функциональный параметр, что не имеет аналогов в $1+1$ -интегрируемых системах типа КдФ. Широкий класс алгебро-геометрических решений уравнения Эрнста оказывается асимптотически плоским [6]. В вырожденном случае они включают весь класс многосолитонных решений Белинского и Захарова [1]. Простейшие эллиптические решения были изучены в работе [6]. Несмотря на многие интересные свойства, как оказалось, они содержат кольцевые сингулярности, что делает проблематичным их непосредственное физическое истолкование. Интересное физическое применение некоторого подсемейства алгебро-геометрических решений было предложено в работах [7, 8, 10], которые посвящены исследованию граничной задачи, соответствующей бесконечно тонкому вращающемуся пылевому диску. В статье [10] была отмечена тесная связь теории алгебро-геометрических решений уравнения Эрнста с теорией скалярных задач Римана–Гильберта на гиперэллиптических кривых (см. обзор [11]). Сопоставление формул статей [4] и [7, 8] было дано в работе [9], где

¹Интересно отметить, что по существу та же пара Лакса фигурировала еще в работах Бьянки [3], посвященных специального вида конгруэнциям, называемым в настоящее время конгруэнциями Бьянки.

было показано, что пылевой диск, описанный в [7, 8], является частным случаем решений рода 2 работы [4].

Данная статья имеет двоякую цель. Во-первых, мы устанавливаем связь между алгебро-геометрическими решениями уравнения Эрнста и алгебро-геометрическими решениями системы Шлезингера, построенными в недавней работе [13]. Это позволяет получить для алгебро-геометрических решений уравнения Эрнста простое выражение

$$\mathcal{E}(\xi, \bar{\xi}) = \frac{\Theta[\mathbf{r}](V(\xi) - V(\infty^1))}{\Theta[\mathbf{s}](V(\xi) - V(\infty^2))} \quad (1.1)$$

в терминах тэта-функций с постоянными характеристиками $\mathbf{r}, \mathbf{s} \in \mathbb{C}^{g_0}$ и отображения Абеля, построенных по гиперэллиптической кривой $\mathcal{L}_0$ рода g_0 с двумя движущимися точками ветвления, заданной уравнением $v^2 = (w - \xi)(w - \bar{\xi}) \times \prod_{j=1}^{2g_0} (w - w_j)$. С помощью предельных переходов из формулы (1.1) можно получить все остальные алгебро-геометрические решения уравнения Эрнста. Во-вторых, мы получаем явные формулы для всех коэффициентов метрики, соответствующих алгебро-геометрическим решениям уравнения Эрнста. Наиболее нетривиальным при этом является вычисление так называемого конформного фактора; для этого мы используем связь между конформным фактором и тау-функцией системы Шлезингера, найденную в [14], и формулу для тау-функции, полученную в работе [13]. Формула для конформного фактора, отвечающего решению (1.1), выглядит следующим образом:

$$e^{2k} = \frac{\Theta[\mathbf{r}](0)\Theta[\mathbf{s}](\frac{1}{2}\mathbf{e})}{\Theta(0)\Theta(\frac{1}{2}\mathbf{e})},$$

где $\mathbf{e} \equiv (1, \dots, 1)$.

§2. Система Шлезингера и стационарные осесимметричные уравнения Эйнштейна

Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение для функции $\Psi(\lambda) \in SL(2, \mathbb{C})$

$$\frac{d\Psi}{d\gamma} = \sum_{j=1}^N \frac{A_j}{\gamma - \gamma_j} \Psi, \quad (2.1)$$

где матрицы $A_j \in sl(2, \mathbb{C})$ не зависят от γ . Наложим начальное условие $\Psi(\gamma = \infty) = I$. Функция $\Psi(\gamma)$ однозначна на универсальной накрывающей X римановой сферы с выколотыми точками $\mathbb{C}P^1 \setminus \{\gamma_1, \dots, \gamma_N\}$. Асимптотика функции $\Psi(\gamma)$ в окрестности сингулярностей γ_j имеет (в ситуации общего положения) следующий вид: $\Psi(\gamma) = Q_j(I + O(\gamma - \gamma_j))(\gamma - \gamma_j)^{T_j} C_j$, где $Q_j, C_j \in SL(2, \mathbb{C})$ и T_j — бесследовая диагональная матрица. Матрицы $M_j = C_j^{-1} e^{2\pi i T_j} C_j$, $j = 1, \dots, N$, называются матрицами монодромии. Условие независимости матриц M_j от полюсов γ_j называется условием изомонодромии; в ситуации общего положения (когда разность собственных значений ни одной из матриц A_j не является целой) условие изомонодромии задает следующую зависимость $\Psi(\gamma)$ от γ_j : $\partial\Psi/\partial\gamma_j = -A_j(\gamma - \gamma_j)^{-1}\Psi$. Условия совместности этих уравнений с (2.1) эквивалентны системе [12] на вычеты A_j :

$$\frac{\partial A_j}{\partial \gamma_i} = \frac{[A_i, A_j]}{\gamma_i - \gamma_j}, \quad i \neq j, \quad \frac{\partial A_i}{\partial \gamma_i} = - \sum_{j \neq i} \frac{[A_i, A_j]}{\gamma_i - \gamma_j}. \quad (2.2)$$

Функция $\tau(\{\gamma_j\})$, определенная уравнениями

$$\frac{\partial}{\partial \gamma_j} \ln \tau = \sum_{k \neq j} \frac{\operatorname{tr} A_j A_k}{\gamma_j - \gamma_k}, \quad (2.3)$$

называется тау-функцией системы Шлезингера. Совместность уравнений (2.3) следует из системы Шлезингера.

Уравнения Эйнштейна для метрики вида

$$ds^2 = f^{-1}[e^{2k}(dz^2 + d\rho^2) + \rho^2 d\varphi^2] - f(dt + F d\varphi)^2, \quad (2.4)$$

где все коэффициенты f , k , F зависят только от ρ и z , сводятся к уравнению Эрнста

$$(\mathcal{E} + \bar{\mathcal{E}})(\mathcal{E}_{zz} + \rho^{-1}\mathcal{E}_\rho + \mathcal{E}_{\rho\rho}) = 2(\mathcal{E}_z^2 + \mathcal{E}_\rho^2). \quad (2.5)$$

Метрические коэффициенты могут быть найдены по комплекснозначному потенциалу Эрнста $\mathcal{E}(z, \rho)$ с помощью следующих уравнений:

$$f = \operatorname{Re} \mathcal{E}, \quad \frac{\partial F}{\partial \xi} = 2\rho \frac{(\mathcal{E} - \bar{\mathcal{E}})_\xi}{(\mathcal{E} + \bar{\mathcal{E}})^2}, \quad \frac{\partial k}{\partial \xi} = 2i\rho \frac{\mathcal{E}_\xi \bar{\mathcal{E}}_\xi}{(\mathcal{E} + \bar{\mathcal{E}})^2}, \quad (2.6)$$

где $\xi = z + i\rho$. Уравнение Эрнста (2.5) является условием совместности следующей линейной системы:

$$\Psi_\xi = \frac{G_\xi G^{-1}}{1 - \gamma} \Psi, \quad \Psi_{\bar{\xi}} = \frac{G_{\bar{\xi}} G^{-1}}{1 + \gamma} \Psi, \quad (2.7)$$

где

$$\gamma = \frac{2}{\xi - \bar{\xi}} \left\{ w - \frac{\xi + \bar{\xi}}{2} + \sqrt{(w - \xi)(w - \bar{\xi})} \right\}, \quad (2.8)$$

$w \in \mathbb{C}$ — спектральный параметр и

$$G = \frac{1}{\mathcal{E} + \bar{\mathcal{E}}} \begin{pmatrix} 2 & i(\mathcal{E} - \bar{\mathcal{E}}) \\ i(\mathcal{E} - \bar{\mathcal{E}}) & 2\mathcal{E}\bar{\mathcal{E}} \end{pmatrix}. \quad (2.9)$$

В терминах матрицы G уравнение Эрнста может быть эквивалентным образом переписано в виде

$$(\rho G_\rho G^{-1})_\rho + (\rho G_z G^{-1})_z = 0. \quad (2.10)$$

Связь между системой Шлезингера и уравнением Эрнста была установлена в работе [14] и описывается следующий теоремой:

ТЕОРЕМА 2.1. Пусть матрицы $A_j \in sl(2)$ удовлетворяют системам Шлезингера (2.2). Обозначим через $\Psi(\gamma)$ соответствующее решение системы (2.1). Пусть функция $\Psi(\gamma)$ удовлетворяет следующим дополнительным условиям:

$$\Psi^t(1/\gamma)\Psi^{-1}(0)\Psi(\gamma) = I, \quad (2.11)$$

$$\Psi(-\bar{\gamma}) = \overline{\Psi(\gamma)}. \quad (2.12)$$

Пусть, кроме того, $\gamma_j = \gamma(w_j, \xi, \bar{\xi})$, $w_j \in \mathbb{C}$ для всех j , где функция $\gamma(w, \xi, \bar{\xi})$ задается формулой (2.8). Тогда матрица

$$G(\xi, \bar{\xi}) \equiv \Psi(\gamma = 0, \xi, \bar{\xi}) \quad (2.13)$$

вещественна, симметрична и удовлетворяет уравнению Эрнста (2.10), а функция Ψ удовлетворяет уравнениям (2.7). Коэффициент e^{2k} метрики (2.4) связан с τ -функцией системы Шлезингера следующим образом:

$$e^{2k} = C \prod_{j=1}^N \left\{ \frac{\partial \gamma_j}{\partial w_j} \right\}^{\text{tr } A_j^2 / 2} \tau, \quad (2.14)$$

где C — постоянная интегрирования.

§3. Решения системы Шлезингера в терминах тэта-функций

Пусть $N = 2g + 2$. Рассмотрим гиперэллиптическую кривую $\mathcal{L}$ рода g , определенную уравнением

$$y^2 = \prod_{j=1}^{2g+2} (\gamma - \gamma_j), \quad (3.1)$$

и выберем базисные циклы (a_j, b_j) на $\mathcal{L}$ в соответствии с рис. 1.

Рис. 1

Базисные голоморфные дифференциалы на $\mathcal{L}$ имеют вид $\gamma^{k-1} d\gamma/y$, $k = 1, \dots, g$. Рассмотрим матрицы a - и b -периодов этих дифференциалов:

$$\mathcal{A}_{kj} = \oint_{a_j} \frac{\gamma^{k-1} d\gamma}{y}, \quad \mathcal{B}_{kj} = \oint_{b_j} \frac{\gamma^{k-1} d\gamma}{y}. \quad (3.2)$$

Тогда голоморфные потенциалы $dU_k = \frac{1}{y} \sum_{j=1}^g (\mathcal{A}^{-1})_{kj} \gamma^{j-1} d\gamma$ будут удовлетворять условиям нормировки $\oint_{a_j} dU_k = \delta_{jk}$. По матрицам $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ строится симметричная матрица b -периодов кривой $\mathcal{L}$: $\mathbf{B} = \mathcal{A}^{-1} \mathcal{B}$. Рассмотрим стандартную тэта-функцию с характеристиками $\Theta[\mathbf{p}][\mathbf{q}](\mathbf{z}|\mathbf{B})$ ($\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{z} \in \mathbb{C}^g$). Она обладает следующими свойствами периодичности:

$$\begin{aligned} \Theta[\mathbf{p}][\mathbf{q}](\mathbf{z} + \mathbf{e}_j) &= e^{2\pi i p_j} \Theta[\mathbf{p}][\mathbf{q}](\mathbf{z}), \\ \Theta[\mathbf{p}][\mathbf{q}](\mathbf{z} + \mathbf{B} \mathbf{e}_j) &= e^{-2\pi i q_j} e^{-\pi i \mathbf{B}_{jj} - 2\pi i \mathbf{z}_j} \Theta[\mathbf{p}][\mathbf{q}](\mathbf{z}), \end{aligned} \quad (3.3)$$

где $\mathbf{e}_j \equiv (0, \dots, 1, \dots, 0)^t$ (1 стоит на j -м месте). Разрежем кривую $\mathcal{L}$ вдоль всех базисных циклов, начинающихся из любой фиксированной точки; получившийся фундаментальный многоугольник обозначим через $\hat{\mathcal{L}}$. Мы будем также использовать следующее обозначение: $W|_Q^P \equiv \int_Q^P dW$, где dW — произвольный мероморфный дифференциал на $\mathcal{L}$ и контур интегрирования лежит внутри $\hat{\mathcal{L}}$ (если dW имеет полюсы первого порядка, то этот интеграл зависит также

от выбора контура интегрирования внутри $\hat{\mathcal{L}}$). Через $U|_Q^P$ мы обозначим вектор с компонентами $U_j|_Q^P$. Вектор римановых констант, соответствующий нашему выбору начальной точки интегрирования, выглядит следующим образом [15]: $K = \frac{1}{2}\mathbf{B}(\mathbf{e}_1 + \dots + \mathbf{e}_g) + \frac{1}{2}(\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + \dots + g\mathbf{e}_g)$.

Векторы характеристик с компонентами $\mathbf{p} \in \mathbb{C}^g/2\mathbb{C}^g$, $\mathbf{q} \in \mathbb{C}^g/2\mathbb{C}^g$ называются полуцелыми; они находятся во взаимно однозначном соответствии с полупериодами $\mathbf{B}\mathbf{p} + \mathbf{q}$. Если скалярное произведение $4\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle$ нечетно, то нечетна и соответствующая тэта-функция как функция от $\mathbf{z}$ и вектор характеристик $[\mathbf{p}]$ называется нечетным; в противном случае $\Theta[\mathbf{p}](\mathbf{z})$ четна и вектор характеристик $[\mathbf{p}]$ называется четным. Нас будут в дальнейшем интересовать нечетные векторы характеристик, которые могут быть построены по произвольному набору $S = \{\gamma_{i_1}, \dots, \gamma_{i_{g-1}}\}$ из $g-1$ несовпадающих точек ветвления. Нечетный полупериод, соответствующий набору S , задается формулой

$$\mathbf{B}\mathbf{p}^S + \mathbf{q}^S = \sum_{j=1}^{g-1} U|_{\gamma_1}^{\gamma_{i_j}} - K, \quad (3.4)$$

где $dU = (dU_1, \dots, dU_g)^t$. Обозначим через $\Omega_\gamma \subset \mathbb{C}$ произвольную окрестность $\Omega_\gamma \subset \mathbb{C}$ бесконечной точки $\gamma = \infty$, такую, что Ω_γ не имеет пересечений с проекциями базисных циклов на γ -плоскость. Определим матричнозначную 2×2 -функцию $\Phi(\gamma)$ в области Ω_γ , лежащей на первом листе кривой $\mathcal{L}$, по формуле

$$\Phi(\gamma \in \Omega_\gamma) = \begin{pmatrix} \varphi(\gamma) & \varphi(\gamma^*) \\ \psi(\gamma) & \psi(\gamma^*) \end{pmatrix}, \quad (3.5)$$

где функции φ и ψ определены внутри $\hat{\mathcal{L}}$ формулами

$$\begin{aligned} \varphi(\gamma) &= \Theta[\mathbf{p}](U|_{\gamma_1}^\gamma + U|_{\gamma_1}^{\gamma_\varphi} | \mathbf{B}) \Theta[S](U|_{\gamma_\varphi}^\gamma | \mathbf{B}), \\ \psi(\gamma) &= \Theta[\mathbf{p}](U|_{\gamma_1}^\gamma + U|_{\gamma_1}^{\gamma_\psi} | \mathbf{B}) \Theta[S](U|_{\gamma_\psi}^\gamma | \mathbf{B}), \end{aligned} \quad (3.6)$$

γ_φ и $\gamma_\psi \in \mathcal{L}$ — две произвольные (возможно, зависящие от $\{\gamma_j\}$) точки на $\mathcal{L}$, $[\mathbf{p}]$ — произвольный вектор характеристик, не зависящих от $\{\gamma_j\}$, $*$ — переставляющая листы инволюция на $\mathcal{L}$, $\Theta[S](\mathbf{z}) \equiv \Theta[\mathbf{p}_S^S](\mathbf{z})$ и нечетный вектор характеристик $[\mathbf{p}_S^S]$ построен по произвольному набору S из $g-1$ точек ветвления посредством формулы (3.4). Поскольку область Ω_γ не пересекается с проекциями базисных циклов на γ -плоскость, область Ω_γ^* не пересекается с границей фундаментального многоугольника $\hat{\mathcal{L}}$, и, следовательно, функции $\varphi(\gamma^*)$ и $\psi(\gamma^*)$ из (3.5) определяются формулами (3.6) при $\gamma \in \Omega_\gamma$ единственным образом. Выберем теперь некоторый лист универсальной накрывающей X и определим новую функцию $\Psi(\gamma)$ в области Ω_γ , лежащей на этом листе, по формуле

$$\Psi(\gamma \in \Omega_\gamma) = \sqrt{\frac{\det \Phi(\infty^1)}{\det \Phi(\gamma)}} \Phi^{-1}(\infty^1) \Phi(\gamma). \quad (3.7)$$

Аналитически продолжим функцию $\Psi(\gamma)$ на всю X . Функция $\Psi(\gamma)$ из (3.7) преобразуется следующим образом при обходе вокруг базисных циклов (обозначим через T_{a_j} и T_{b_j} соответствующие операторы аналитического продол-

жения): $T_{a_j}[\Psi(\gamma)] = \Psi(\gamma)M_{a_j}$, $T_{b_j}[\Psi(\gamma)] = \Psi(\gamma)M_{b_j}$, $j = 1, \dots, 2g_0 - 1$, где

$$M_{a_j} = \begin{pmatrix} e^{2\pi i p_j} & 0 \\ 0 & e^{-2\pi i p_j} \end{pmatrix}, \quad M_{b_j} = \begin{pmatrix} e^{-2\pi i q_j} & 0 \\ 0 & e^{2\pi i q_j} \end{pmatrix}. \quad (3.8)$$

ТЕОРЕМА 3.1 ([13]). Обозначим через $(\mathbf{p}, \mathbf{q})$, $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbb{C}^g$, произвольный набор из $2g$ констант, таких, что вектор характеристик $[\mathbf{p}]$ не является полуцелым. Тогда

(1) функция $\Psi(Q \in X)$, заданная формулой (3.7), не зависит от γ_φ и γ_ψ и удовлетворяет уравнению (2.1), причем вычеты $A_j \equiv \text{res}_{|\gamma=\gamma_j} \{\Psi_\gamma \Psi^{-1}\}$ удовлетворяют системе Шлезингера (2.2);

(2) монодромии функции $\Psi(\gamma)$ вокруг точек γ_j имеют вид $M_j = \begin{pmatrix} 0 & -m_j \\ m_j^{-1} & 0 \end{pmatrix}$, где матричные элементы m_j выражаются через $\mathbf{p}$ и $\mathbf{q}$ (см. [13]);

(3) тау-функция, соответствующая этому решению системы Шлезингера, имеет вид

$$\tau(\{\gamma_j\}) = [\det \mathcal{A}]^{-1/2} \prod_{j < k} (\gamma_j - \gamma_k)^{-1/8} \Theta[\mathbf{p}](0|\mathbf{B}). \quad (3.9)$$

§4. Алгебро-геометрические решения уравнения Эрнста

Теорема 2.1 позволяет получить решения уравнения Эрнста, исходя из решений системы Шлезингера, описанных выше. Необходимая дополнительная работа состоит в выборе параметров конструкции (т. е. точек w_j и векторов $\mathbf{p}, \mathbf{q}$) таким образом, чтобы обеспечить выполнение уравнений (2.11) и (2.12). Для этого необходимо предположить, что кривая $\mathcal{L}$ инвариантна относительно голоморфной инволюции σ и антиголоморфной инволюции μ , действующих на каждом листе кривой $\mathcal{L}$ следующим образом: $\sigma: \gamma \rightarrow 1/\gamma$, $\mu: \gamma \rightarrow -\bar{\gamma}$. Уравнения (2.11) и (2.12) совместны, только если кривая $\mathcal{L}$ имеет нечетный род, $g = 2g_0 - 1$. Мы пронумеруем точки ветвления γ_j , $j = 1, \dots, 4g_0$, таким образом, что $\gamma_j = \gamma_{j+2g_0}^{-1}$, $j = 1, \dots, 2g_0$, и $\gamma_j \in i\mathbb{R}$, $j \leq 2k$, $\gamma_{2j+1} + \bar{\gamma}_{2j+2} = 0$, $j \geq 2k + 1$ для некоторого $k \leq g_0$. Рассмотрим два случая:

1. Кривая $\mathcal{L}$ является кривой неразделяющегося типа по отношению к антиинволюции μ , т. е. $k \geq 1$. Тогда базисные циклы (a_j, b_j) , $j = 1, \dots, 2g_0 - 1$, на $\mathcal{L}$ могут быть выбраны так, как показано на рис. 2а).

2. Кривая $\mathcal{L}$ является кривой разделяющегося типа по отношению к антиинволюции μ , т. е. $k = 0$. Тогда базисные циклы могут быть выбраны, как показано на рис. 2б).

В обоих случаях базисные циклы преобразуются следующим образом под действием инволюции σ :

$$\sigma(a_1) = -a_1, \quad \sigma(b_1) = -b_1, \quad (4.1)$$

$$\sigma(a_j) = a_{j+g_0-1}, \quad \sigma(b_j) = b_{j+g_0-1}, \quad 2 \leq j \leq g_0. \quad (4.2)$$

Уравнение (2.11) налагает такие условия на монодромии M_{a_j} и M_{b_j} , заданные формулами (3.8): $M_{a_j}^t M_{a_{j+g_0-1}} = I$, $M_{b_j}^t M_{b_{j+g_0-1}} = I$, $2 \leq j \leq g_0$. (Уравнения $M_{a_1}^t = M_{a_1}$ и $M_{b_1}^t = M_{b_1}$, которые возникают при вычислении монодромий левой части условия (2.11) вокруг базисных циклов a_1 и b_1 , выполнены автоматически.) В свою очередь, для компонент векторов $\mathbf{p}$ и $\mathbf{q}$ мы получаем следующие

уравнения:

$$p_j + p_{j+g_0-1} = 0, \quad q_j + q_{j+g_0-1} = 0, \quad 2 \leq j \leq g_0. \quad (4.3)$$

Рис. 2

Осталось понять, какие ограничения на $\mathbf{p}$ возникают из-за «условий вещественности» (2.12). Рассмотрим два случая по отдельности.

1. *Неразделяющийся случай* ($k \geq 1$). Базисные циклы, изображенные на рис. 2а), ведут себя следующим образом под действием μ : $\mu(a_j) = -a_j$ для любого j , $\mu(b_1) = b_1 + 2a_1$, $\mu(b_j) = b_j$ при $2 \leq j \leq k$, $\mu(b_j) = b_j - a_j$ при $k+1 \leq j \leq g_0$ (поскольку мы уже предположили инвариантность $\mathcal{L}$ относительно σ , достаточно определить действие μ только на первых g_0 циклах b_j). Уравнение (2.12) налагает следующие условия на монодромии: $\overline{M}_{a_j} = M_{a_j}^{-1}$ для любого j , $\overline{M}_{b_1} = M_{b_1} M_{a_1}^2$, $\overline{M}_{b_j} = M_{b_j}$ при $2 \leq j \leq k$, $\overline{M}_{b_j} = M_{b_j} M_{a_j}^{-1}$ при $k+1 \leq j \leq g_0$, которые могут быть переписаны в терминах $\mathbf{p}$ и $\mathbf{q}$:

$$p_j \in \mathbb{R} \text{ при любом } j, \quad \operatorname{Re} q_1 = p_1, \quad (4.4)$$

$$\operatorname{Re} q_j = 0 \text{ при } 2 \leq j \leq k, \quad \operatorname{Re} q_j = -\frac{1}{2}p_j \text{ при } k+1 \leq j \leq g_0.$$

2. *Разделяющийся случай* ($k = 0$). Выберем базисные циклы в соответствии с рис. 2б). Они преобразуются следующим образом под действием μ : $\mu(a_j) = -a_j$

для любого j , $\mu(b_1) = b_1 + \sum_{l=2}^{g_0} (a_{l+g_0-1} - a_l)$, $\mu(b_j) = b_j - a_j + \sum_{l=1}^{g_0} a_l$ при $2 \leq j \leq g_0$, что налагает следующие условия на $\mathbf{p}$ и $\mathbf{q}$:

$$\begin{aligned} p_j &\in \mathbb{R} \quad \text{для любого } j, & \operatorname{Re} q_1 &= -\frac{1}{2} \sum_{l=2}^{g_0} p_l, \\ \operatorname{Re} q_j &= -\frac{1}{2} \sum_{l=1}^{g_0} p_l - \frac{p_j}{2} & \text{при } 2 \leq j \leq g_0. \end{aligned} \quad (4.5)$$

ТЕОРЕМА 4.1. Пусть род кривой $\mathcal{L}$ нечетен, $g = 2g_0 - 1$; пусть базисные циклы на $\mathcal{L}$ выбраны, как показано на рис. 2а), если кривая $\mathcal{L}$ относится к неразделяющемуся типу, или как показано на рис. 2б), если кривая $\mathcal{L}$ относится к разделяющемуся типу. Возьмем два произвольных постоянных вектора $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbb{C}^{2g_0-1}$, удовлетворяющие условиям (4.3). Пусть, кроме того, $\mathbf{p}$ и $\mathbf{q}$ удовлетворяют условиям (4.4), если кривая $\mathcal{L}$ относится к неразделяющемуся типу, или условиям (4.5), если кривая $\mathcal{L}$ относится к разделяющемуся типу. Определим функцию $\Psi(\gamma)$ выражениями (3.5)–(3.7). Тогда функция

$$G(x, \rho) \equiv \Psi(x, \rho, \gamma = 0) \quad (4.6)$$

удовлетворяет уравнению Эрнста (2.10) и может быть представлена в виде (2.9).

Рис. 3

С помощью (4.6) можно получить выражение для потенциала Эрнста в терминах тэта-функций, связанных с кривой $\mathcal{L}$. Это выражение может быть существенно упрощено, если использовать инвариантность $\mathcal{L}$ по отношению к инволюции σ и перейти к спектральному параметру w из (2.8). А именно, кривая $\mathcal{L}$ может быть реализована как четырехлистное накрытие над плоскостью w ; ее диаграмма Гурвица изображена на рис. 3. При такой реализации инволюция σ осуществляет перестановку листов $1 \leftrightarrow 3$ и $2 \leftrightarrow 4$, а инволюция $*$ осуществляет перестановку листов $1 \leftrightarrow 2$ и $3 \leftrightarrow 4$. Введем новую кривую $\mathcal{L}_0$ рода g_0 , определенную уравнением

$$\nu^2 = (w - \xi)(w - \bar{\xi}) \prod_{j=1}^{2g_0} (w - w_j). \quad (4.7)$$

Рис. 4

Базис циклов (a_j^0, b_j^0) на $\mathcal{L}_0$ выбран, как показано на рис. 4. Нормированный базис голоморфных 1-форм на $\mathcal{L}_0$ выглядит следующим образом:

$$dV_j = \frac{1}{\nu} \sum_{k=1}^{g_0} (\mathcal{A}_0^{-1})_{jk} w^{k-1} dw, \quad j = 1, \dots, g_0,$$

где

$$(\mathcal{A}_0)_{kj} \equiv \oint_{a_j^0} \frac{w^{k-1} dw}{\nu}, \quad j, k = 1, \dots, g_0. \quad (4.8)$$

Матрица b -периодов кривой $\mathcal{L}_0$ будет обозначаться через $\mathbf{B}_0$. Кривая $\mathcal{L}$ является двулиственным неразветвленным накрытием Π над $\mathcal{L}_0$; точки кривой $\mathcal{L}$, связанные инволюцией σ , проектируются в одну и ту же точку на $\mathcal{L}_0$. Антиинволюция μ действует на каждом листе кривой $\mathcal{L}_0$ как $w \rightarrow \bar{w}$. Наличие уравнения (2.11) позволяет написать альтернативные формулы для функции Ψ в терминах тэта-функций, связанных с кривой $\mathcal{L}_0$. Обозначим через Ω_w проекцию области Ω_γ на w -плоскость. Определим функцию $\Phi_0(w \in \Omega_w)$ по формуле

$$\Phi_0(w \in \Omega_w) = \begin{pmatrix} \varphi_0(w) & \varphi_0(w^*) \\ \psi_0(w) & \psi_0(w^*) \end{pmatrix}, \quad (4.9)$$

где унаследованная с $\mathcal{L}$ инволюция $*$ переставляет листы кривой $\mathcal{L}_0$,

$$\varphi_0(w) = \Theta[\mathbf{r}_s](V|_\xi^w | \mathbf{B}_0), \quad \varphi_0(w^*) = -i\Theta[\mathbf{r}_s](-V|_\xi^w | \mathbf{B}_0), \quad (4.10)$$

$$\psi_0(w) = \Theta[\mathbf{r}_s](V|_\xi^w + \frac{1}{2} | \mathbf{B}_0), \quad \psi_0(w^*) = i\Theta[\mathbf{r}_s](-V|_\xi^w + \frac{1}{2} | \mathbf{B}_0), \quad (4.11)$$

$w \in \Omega_w$, а постоянные векторы $\mathbf{r}, \mathbf{s} \in \mathbb{C}^{g_0}$ удовлетворяют условиям вещественности

$$\mathbf{r} \in \mathbb{R}^{g_0}, \quad \text{Re } \mathbf{s}_j = \sum_{l=1}^{g_0} \frac{\mathbf{r}_l}{2}, \quad j \leq k, \quad \text{Re } \mathbf{s}_j = \sum_{l=1, l \neq j}^{g_0} \frac{\mathbf{r}_l}{2}, \quad j \geq k+1. \quad (4.12)$$

Базисные циклы кривой $\mathcal{L}_0$ преобразуются следующим образом под действием μ : $\mu(a_j^0) = -a_j^0$ для любого j , $\mu(b_j^0) = b_j^0 + \sum_{l=1}^{g_0} a_l^0$, $j \leq k$, $\mu(b_j^0) = b_j^0 + \sum_{l \neq j} a_l^0$, $j > k$, что влечет за собой следующие соотношения на матрицу b -периодов кривой $\mathcal{L}_0$: $\text{Re}(\mathbf{B}_0)_{jl} = -1/2$, $j \leq k$, $\text{Re}(\mathbf{B}_0)_{jl} = -1/2 + \delta_{jl}/2$, $j > k$. Поэтому условия (4.12) могут быть эквивалентным образом переписаны в виде $\text{Re}(\mathbf{B}_0 \mathbf{r} + \mathbf{s}) = 0$, что, в частности, дает следующее соотношение между функциями φ_0 и ψ_0 : $\psi_0(P) = \overline{\varphi_0(\bar{P})}$.

Теперь определим функцию

$$\Psi_0(w \in \Omega_w) \equiv \sqrt{\frac{\det \Phi_0(\infty^1)}{\det \Phi_0(w)}} \Phi_0^{-1}(\infty^1) \Phi_0(w) \quad (4.13)$$

и продолжим ее аналитически на все X ; тем самым мы получаем функцию $\Psi_0(P \in X)$. Имеет место следующее утверждение:

ТЕОРЕМА 4.2. *Определим функцию $\Psi(P \in X)$ формулами (3.5)–(3.7). Определим также функцию $\Psi_0(P \in X)$ формулами (4.9), (4.10), (4.13). Пусть компоненты векторов $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbb{C}^{2g_0-1}$ и $\mathbf{r}, \mathbf{s} \in \mathbb{C}^{g_0}$ связаны следующим образом:*

$$p_1 = -\sum_{l=1}^{g_0} r_l, \quad q_1 = -2s_1, \quad p_j = r_j, \quad q_j = s_j - s_1, \quad 2 \leq j \leq g_0 \quad (4.14)$$

(соотношения (4.3) автоматически дают оставшиеся $g_0 - 1$ элементов из $\mathbf{p}$ и из $\mathbf{q}$). Потребуем также, чтобы $[\frac{\mathbf{r}}{\mathbf{s}}]$ не совпадала ни с какой полуцелой характеристикой. Тогда функции Ψ и Ψ_0 совпадают: $\Psi(P \in X) = \Psi_0(P \in X)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Функции φ_0 и ψ_0 были выбраны таким образом, что аналитическое продолжение функции Ψ_0 с Ω_w на все X не нарушает уравнения (2.11). Принимая во внимание условие несовпадения $[\frac{\mathbf{r}}{\mathbf{s}}]$ ни с какой полуцелой характеристикой и совпадение условий нормировки функций Ψ и Ψ_0 в точке $\gamma = \infty$, достаточно показать, что монодромии функций Ψ и Ψ_0 вокруг первых g_0 пар базисных циклов кривой $\mathcal{L}$ совпадают. Базисные циклы на $\mathcal{L}$ и $\mathcal{L}_0$ связаны соотношениями

$$\Pi(a_1) = -(a_1^0 + \dots + a_{g_0}^0), \quad \Pi(b_1) = -2b_1^0, \quad \Pi(a_j) = a_j^0, \quad \Pi(b_j) = b_j^0 - b_1^0,$$

которые дают следующие выражения для монодромий функции Ψ_0 вокруг (a_j, b_j) :

$$M_{a_1}^0 = \exp \left\{ -2\pi i \sum_{j=1}^{g_0} r_j \sigma_3 \right\}, \quad M_{b_1}^0 = \exp \{ 4\pi i s_1 \sigma_3 \}, \quad (4.15)$$

$$M_{a_j}^0 = \exp \{ 2\pi r_j \sigma_3 \}, \quad M_{b_j}^0 = \exp \{ 2\pi (s_1 - s_j) \sigma_3 \}, \quad 2 \leq j \leq g_0. \quad (4.16)$$

Эти выражения совпадают с монодромиями кривой Ψ , которые даются формулами (3.8), если учесть соотношения (4.14) (уравнение (2.11) обеспечивает совпадение остальных монодромий вокруг циклов (a_j, b_j) , $g_0 + 1 \leq j \leq 2g_0$). [Заметим, что функции φ_0 и ψ_0 преобразуются по-разному (некоторые их монодромии отличаются знаком) при обходе вокруг базисных циклов кривой $\mathcal{L}_0$, но их аналитические продолжения на $\mathcal{L}$ преобразуются одинаковым образом при обходе вокруг базисных циклов кривой $\mathcal{L}$.]

ТЕОРЕМА 4.3. *Рассмотрим два произвольных постоянных вектора $\mathbf{r}, \mathbf{s} \in \mathbb{C}^{g_0}$, удовлетворяющие условиям вещественности (4.12). Тогда функция*

$$\mathcal{E}(\xi, \bar{\xi}) = \frac{\Theta[\frac{\mathbf{r}}{\mathbf{s}}](V|_{\xi}^{\infty} | \mathbf{B}_0)}{\Theta[\frac{\mathbf{r}}{\mathbf{s}}](V|_{\xi}^{\infty^2} | \mathbf{B}_0)} \quad (4.17)$$

удовлетворяет уравнению Эрнста (2.5). Функция Ψ , определенная формулой (3.7) или (4.13), решает линейную систему (2.7), где матрица $G(\xi, \bar{\xi})$ задается формулой (2.9).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нетривиальной частью является проверка формулы (4.17). А именно, матрицу $\Psi(w = \infty^1)$, задаваемую формулой (4.13), можно представить в виде (2.9), где $\mathcal{E} = -i\varphi_0(\infty^1)/\varphi_0(\infty^2)$, что дает (4.17) после подстановки (4.10).

ТЕОРЕМА 4.4. Метрический коэффициент $F(\xi, \bar{\xi})$ (см. (2.6)), соответствующий потенциалу Эрнста (4.17), задается формулой

$$F = \frac{2}{\operatorname{Re} \mathcal{E}} \operatorname{Im} \left\{ \sum_{j=1}^{g_0} (\mathcal{A}_0^{-1})_{g_0 j} \frac{\partial}{\partial z_j} \ln \Theta[\mathbf{r}_s](V|\xi^\infty|\mathbf{B}_0) \right\} \quad (4.18)$$

с точностью до произвольной постоянной интегрирования, где $\mathcal{A}_0$ — матрица a -периодов голоморфных 1-форм на (4.8), а $\partial\Theta/\partial z_j$ обозначает производную тэта-функции по ее j -му аргументу.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Напишем следующее простое тождество:

$$(\Psi^{-1}\Psi_{w^{-1}})_\xi \equiv \Psi^{-1}(\Psi_\xi\Psi^{-1})_{1/w}\Psi.$$

Принимая во внимание линейную систему (2.7), уравнение (2.6) на F и условие нормировки $\Psi(\infty) = I$, легко видеть, что $(1, 2)$ -матричный элемент в правой части этого тождества равен $\frac{1}{2}F_\xi$. Следовательно, $F = 2(\Psi^{-1}\Psi_{w^{-1}})_{12}(\gamma = \infty)$. Подстановка формул (4.10), (4.11) и (4.13) в эту формулу дает следующий результат:

$$F = -\frac{2}{\operatorname{Re} \mathcal{E}} \operatorname{Im} \left\{ \frac{dW_0(P)}{d(1/w)}(w = \infty^2) \right\},$$

где 1-форма $dW_0(P \in \mathcal{L}_0)$ задается выражением

$$dW_0(P) = \sum_{j=1}^{g_0} dV_j(P) \frac{\partial}{\partial z_j} \ln \Theta[\mathbf{r}_s](V|_P^P|\mathbf{B}_0).$$

Используя формулу для базисных 1-форм dV_j , мы получаем (4.18).

ТЕОРЕМА 4.5. Метрический коэффициент $k(\xi, \bar{\xi})$, соответствующий потенциалу Эрнста (4.17), задается выражением

$$e^{2k} = \frac{\Theta[\mathbf{p}_q](0|\mathbf{B})}{\sqrt{\det \mathcal{A}_0}} \prod_{j=1}^{2g_0} |w_j - \xi|^{-1/4} \quad (4.19)$$

с точностью до произвольного постоянного множителя, где $\mathbf{B}$ — матрица b -периодов кривой $\mathcal{L}$, определяемой уравнением (3.1), матрица $\mathcal{A}_0$ определена уравнениями (4.8), а векторы $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbb{C}^{2g_0-1}$ связаны с векторами $\mathbf{r}, \mathbf{s} \in \mathbb{C}^{g_0}$ формулами (4.14).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нужно использовать совпадение функций Ψ_0 и Ψ и подставить формулу для тау-функции системы Шлезингера (3.9) в соотношение (2.14), связывающее тау-функцию и коэффициент e^{2k} (в нашем случае $\operatorname{tr} A_j^2 = 1/8$). Кроме того, нужно использовать следующее соотношение между определителями матриц a -периодов голоморфных 1-форм на кривых $\mathcal{L}$ и $\mathcal{L}_0$: $\det \mathcal{A} = \operatorname{const} \rho^{g_0^2} \det \mathcal{A}_0$, где константа не зависит от $(\xi, \bar{\xi})$. Доказательство этого равенства можно получить элементарными преобразованиями, используя разложение

голоморфных 1-форм на $\mathcal{L}$ в комбинацию голоморфных 1-форм на $\mathcal{L}_0$ и голоморфных 1-форм на не зависящей от $(\xi, \bar{\xi})$ гиперэллиптической кривой рода $g_0 - 1$, задаваемой уравнением $\delta^2 = \prod_{j=1}^{2g_0} (w - w_j)$. Для завершения доказательства формулы (4.19) остается использовать тождества

$$\gamma^{-1}\gamma_w = \{(w-\xi)(w-\bar{\xi})\}^{-1/2}, \quad \prod_{j < k} (\gamma_j - \gamma_k) = \text{const } \rho^{-4g_0^2} \prod_{j=1}^{2g_0} \{(w_j - \xi)(w_j - \bar{\xi})\}^{1/2}.$$

СЛЕДСТВИЕ 4.1. *Метрический коэффициент (4.19) может быть выражен следующим образом через тэта-функции кривой $\mathcal{L}_0$:*

$$e^{2k} = \frac{\Theta[\mathbf{r}](0|\mathbf{B}_0)\Theta[\mathbf{s}](\frac{1}{2}\mathbf{e}|\mathbf{B}_0)}{\Theta(0|\mathbf{B}_0)\Theta(\frac{1}{2}\mathbf{e}|\mathbf{B}_0)},$$

где $\mathbf{e} \equiv (1, \dots, 1)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Эта формула следует из (4.19), если использовать связь между тэта-функциями на $\mathcal{L}$ и $\mathcal{L}_0$ [15, р. 64] и тот факт, что $k = 0$ при $\mathbf{r} = \mathbf{s} = 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.1. Вырождение $w_{2j+1}, w_{2j+1} \rightarrow \kappa_j \in \mathbb{R}$ кривой $\mathcal{L}_0$ дает при подходящем выборе $\mathbf{r}$ и $\mathbf{s}$ все семейство многосолитонных решений. В частности, чтобы получить решение Керра-НУТ, нужно взять $g_0 = 2$, $r_j = 1/2$, $s_j = 1/4 + i\alpha_j$, $\alpha_j \in \mathbb{R}$. Тогда формула (4.17) дает [4]

$$\mathcal{E} = \frac{1 - \Gamma}{1 + \Gamma}, \quad \Gamma^{-1} = \frac{i(a_1 - a_2)}{1 - a_1 a_2 + i(a_1 + a_2)} \mathcal{X}^+ + \frac{1 + a_1 a_2}{1 - a_1 a_2 + i(a_1 + a_2)} \mathcal{X}^-,$$

где $a_j = e^{-2\pi i \alpha_j}$ и сплюсненные эллипсоидальные координаты задаются формулами $\mathcal{X}^\pm = (\kappa_1 - \kappa_2)^{-1} \left\{ \sqrt{(\kappa_1 - \xi)(\kappa_1 - \bar{\xi})} \pm \sqrt{(\kappa_2 - \xi)(\kappa_2 - \bar{\xi})} \right\}$.

В работе [4] были построены тэта-функциональные решения уравнения Эрнста (в обозначениях, введенных в [6, 9])

$$\mathcal{E} = \frac{\Theta(V|_\xi^\infty + B_W|\mathbf{B}_0)}{\Theta(V|_\xi^\infty + B_W|\mathbf{B}_0)} \exp\{W|_\infty^1\}, \quad (4.20)$$

где $dW(P)$ — произвольная 1-форма на $\mathcal{L}_0$, удовлетворяющая следующим условиям:

1. dW является произвольной конечной, бесконечной или непрерывной линейной комбинацией с не зависящими от $(\xi, \bar{\xi})$ коэффициентами абелевых дифференциалов второго и третьего рода, полюсы и сингулярные части которых не зависят от $(\xi, \bar{\xi})$.

2. (Условия вещественности.) $dW(\bar{P}) = \overline{dW(P)}$ и $2\pi i B_W \in \mathbb{R}^{g_0}$, где вектор $2\pi i B_W$ — это вектор b -периодов дифференциала dW : $2\pi i (B_W)_j = \oint_{b_j} dW(P)$.

3. (Условия нормировки.) $\oint_{a_j} dW = 0$ для любого j .

Для прояснения роли дифференциала dW рассмотрим сначала простейший случай $g = 0$, когда потенциал Эрнста (4.20) становится вещественным,

$$\ln \mathcal{E} = W|_\infty^1, \quad (4.21)$$

и уравнение Эрнста сводится к уравнению Эйлера–Дарбу $(\partial_\rho^2 + \rho^{-1}\partial_\rho + \partial_z^2)\ln \mathcal{E} = 0$. Естественно возникает вопрос о возможности представления общего решения уравнения Эйлера–Дарбу, инвариантного по отношению к изменению знака ρ , в форме (4.21). Ответ оказывается положительным. А именно, фиксируем некоторую область D в (ρ, z) -плоскости, симметричную относительно отражения $\rho \rightarrow -\rho$ (область D может захватывать бесконечно удаленную точку с асимптотическим граничным условием $\ln \mathcal{E} \rightarrow 0$ при $\rho, z \rightarrow \infty$). Тогда общее несингулярное решение уравнения Эйлера–Дарбу в области D , симметричное по отношению к тому же отражению, может быть записано в виде интеграла вдоль границы ∂D :

$$\ln \mathcal{E} = \int_{\partial D} \frac{f(\kappa) d\kappa}{\{(\kappa - \xi)(\kappa - \bar{\xi})\}^{1/2}}, \quad (4.22)$$

где $f(\kappa)$ — произвольная функция, определенная на ∂D и удовлетворяющая условию вещественности $f(\bar{\kappa}) = \overline{f(\kappa)}$. Решение (4.22) может быть записано в виде (4.21), где $dW(w) = \frac{1}{2} \oint_{\partial D} f(\kappa)(dW_\kappa(w) - dW_{\kappa^*}(w)) d\kappa$ и $dW_\kappa(w)$ — дифференциал второго рода на кривой $\mathcal{L}_0$ с $g_0 = 0$. Дифференциал $dW_\kappa(w)$ имеет единственный полюс второго порядка в точке $w = \kappa$ со следующим асимптотическим разложением в его окрестности: $dW_\kappa(w) = ((w - \kappa)^{-2} + O(1)) dw$ при $w \rightarrow \kappa$. Поскольку $g_0 = 0$, мы можем записать $dW_\kappa(w)$ явным образом:

$$dW_\kappa(w) = \frac{\gamma'(\kappa)\gamma'(w) dw}{(\gamma(w) - \gamma(\kappa))^2}, \quad (4.23)$$

и, следовательно,

$$\int_{\infty^1}^{\infty^2} dW_\kappa = \partial_\kappa(\ln \gamma)|_{\gamma=\infty}^{\gamma=0} = \{(\kappa - \xi)(\kappa - \bar{\xi})\}^{-1/2}, \quad (4.24)$$

что показывает совпадение решений (4.21) и (4.22). Интегрирование по частям дает следующее альтернативное представление для dW :

$$dW(w) = \oint_{\partial D} h(\kappa) dW_{\kappa\kappa^*}(w) d\kappa, \quad (4.25)$$

где $h(\kappa) = -f'(\kappa)/2$, а $dW_{\kappa\kappa^*}(w)$ — стандартный дифференциал третьего рода с полюсами в точках κ и κ^* , задаваемый формулой

$$dW_{\kappa\kappa^*}(w) = \left(\frac{\gamma'(w)}{\gamma(w) - \gamma(\kappa)} - \frac{\gamma'(w)}{\gamma(w) - \gamma^{-1}(\kappa)} \right) dw. \quad (4.26)$$

Интегральное представление (4.25) дифференциала dW соответствует проинтегрированному по частям соотношению (4.22): $\ln \mathcal{E} = 2 \int_{\partial D} h(\kappa) \ln \gamma(\kappa, \xi, \bar{\xi}) d\kappa$. Повторяя интегрирование по частям, мы можем представить dW в виде контурного интеграла по κ от мероморфных дифференциалов, имеющих полюс произвольного фиксированного порядка при $w = \kappa$ и $w = \kappa^*$. Таким образом, с точки зрения локальных решений не все 1-формы dW в (4.21) являются независимыми, и для получения общего локального статического решения достаточно ограничиться формами вида (4.25).

Рассмотрим форму dW в случае $g_0 > 0$. Обозначим через $dW_{QR}(P)$ дифференциал третьего рода на $\mathcal{L}_0$, имеющий полюсы первого порядка в точках Q и R с вычетами $+1$ и -1 соответственно и удовлетворяющий условиям нормировки

$\oint_{a_j} dW_{QR}(P) = 0$ для любого j . Его вектор b -периодов $2\pi i(B_{QR})_j \equiv \oint_{b_j} dW_{QR}$ может быть выражен через базисные формы dV_j :

$$(B_{QR})_j = \int_R^Q dV_j. \quad (4.27)$$

При $g_0 \geq 1$, как и в случае $g_0 = 0$, одна и та же форма $dW(P \in \mathcal{L}_0)$ может быть представлена разными способами в виде контурного интеграла от элементарных 1-форм. Для наших целей будет удобно использовать представление, являющееся обобщением представления (4.25) на случай $g_0 \geq 1$:

$$dW = \oint_{\partial D} h(\kappa) dW_{\kappa\kappa^*} d\kappa. \quad (4.28)$$

Соответствующий этому представлению вектор b -периодов дается формулой $(B_W)_j = 2 \oint_{\partial D} h(\kappa) V_j|_{\xi}^{\kappa} d\kappa$.

Далее мы собираемся установить связь между решениями (4.17) и (4.20). На первый взгляд кажется, что решения (4.17) содержат меньшее число параметров, однако оказывается, что на самом деле оба класса решений совпадают.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.2. Класс мероморфных дифференциалов dW , удовлетворяющих условиям 1–3, тесно связан с классом дифференциалов, которые были введены Кричевером [17] в конструкции точных решений уравнений Уизема, описывающих специального вида деформации конечнозонных решений уравнений типа Кортевега–де Фриза¹. Такого же типа объекты возникают в некоторых примерах фробениусовых многообразий [18], связанных с пространствами Гурвица. Поскольку, как известно, уравнения, описывающие фробениусовы многообразия, сводятся, как и уравнение Эрнста, к уравнениям изомонодромных деформаций, возникает естественный вопрос о соотношении соответствующих классов алгебро-геометрических решений. Поверхностный анализ не обнаруживает простой связи между двумя ситуациями в общем случае; однако мы надеемся, что такого рода связь может проявиться при более детальном рассмотрении.

Чтобы понять, как решения (4.17) возникают из решений (4.20), мы сначала обсудим, как голоморфные дифференциалы на $\mathcal{L}_0$ возникают в пределе дифференциалов третьего рода. А именно, рассмотрим дифференциал $dW_{QR}(P)$ в фундаментальном многоугольнике $\widehat{\mathcal{L}}_0$, граница которого состоит из контуров a_j^{0+} , b_j^{0+} , a_j^{0-} , b_j^{0-} . Очевидно, что в пределе $Q \rightarrow R$ дифференциал dW_{QR} должен превращаться в некоторый голоморфный дифференциал. Самый наивный способ перейти к этому пределу — это предположить, что $Q \rightarrow R$ внутри $\widehat{\mathcal{L}}_0$; тогда $dW_{QR} \rightarrow 0$ и $B_{QR} \rightarrow 0$. Однако этот предел может быть вычислен и двумя нетривиальными способами:

1. Устремим Q к какой-нибудь граничной точке многоугольника $\widehat{\mathcal{L}}_0$, скажем, к точке, лежащей на контуре b_j^{0+} , и пусть R одновременно стремится к той же точке кривой $\mathcal{L}_0$, лежащей на контуре b_j^{0-} . Этот предельный переход не влияет на условие нормировки по a -циклам, и, следовательно, $dW_{QR} \rightarrow 0$ при $Q \rightarrow R \in b_j^0$. Однако вектор b -периодов дифференциала dW_{QR} не обращается в нуль даже в пределе: в силу (4.27) мы видим, что $(B_{QR})_k \rightarrow -\delta_{jk}$ при $Q \rightarrow R \in b_j^0$.

¹Мы благодарим рецензента, который обратил наше внимание на данное обстоятельство.

2. Аналогично мы можем перейти к пределу, предполагая, что Q стремится к некоторой точке, лежащей на контуре a_j^{0+} , а R стремится к соответствующей точке контура a_j^{0-} . Поскольку полюсы дифференциала dW_{QR} встречаются в точности на контуре a_j^0 , мы видим, что интеграл $\oint_{a_j^0} dW_{QR}$ в пределе не обращается в нуль. Поскольку $\oint_{a_k^0} dW_{QR}$ по-прежнему равен нулю при $k \neq j$, мы заключаем, что в нашем пределе dW_{QR} становится пропорционален dV_j . Чтобы вычислить коэффициент пропорциональности, мы вычислим предельное значение вектора b -периодов формы dW_{QR} в соответствии с (4.27) и получим, что $B_{QR} \rightarrow \mathbf{B}_{0j}$ при $Q \rightarrow R \in a_j^0$, где $\mathbf{B}_{0j}$ обозначает j -й столбец матрицы b -периодов. Следовательно, $dW_{QR} \rightarrow 2\pi i dV_j$ при $Q \rightarrow R \in a_j^0$.

Теперь выберем форму dW в решении (4.20) в следующем виде:

$$dW = \sum_{j=1}^{g_0} (r_j dW_{Q_j R_j} - s_j dW_{\tilde{Q}_j \tilde{R}_j})$$

с постоянными векторами $\mathbf{r}, \mathbf{s} \in \mathbb{C}^{g_0}$, и вычислим пределы $Q_j \rightarrow R_j \in a_j^0$, $\tilde{Q}_j \rightarrow \tilde{R}_j \in b_j^0$, как описано в пп. 1 и 2 соответственно. Тогда, в соответствии с тем, что полученными формулами, мы имеем $B_W \rightarrow \mathbf{B}_0 \mathbf{r} + \mathbf{s}$, $W|_{\infty^1}^1 \rightarrow \sum_{j=1}^{g_0} r_j V_j|_{\infty^1}^1$. Условие вещественности $dW(\overline{P}) = \overline{dW(P)}$ налагает следующее ограничение на константы $\mathbf{r}$ и $\mathbf{s}$: $\text{Re}\{\mathbf{B}_0 \mathbf{r} + \mathbf{s}\} = 0$. Таким образом, решение (4.20) принимает в нашем пределе следующий вид:

$$\mathcal{E} = \frac{\Theta(V|_{\xi}^{\infty^1} + \mathbf{B}_0 \mathbf{r} + \mathbf{s} | \mathbf{B}_0)}{\Theta(V|_{\xi}^{\infty^2} + \mathbf{B}_0 \mathbf{r} + \mathbf{s} | \mathbf{B}_0)} \exp \left\{ \sum_{j=1}^{g_0} r_j V_j|_{\infty^1}^1 \right\},$$

что совпадает с (4.17), если учесть, что тэта-функция с характеристиками есть обычная тэта-функция от сдвинутого аргумента, домноженная на некоторый экспоненциальный множитель.

Теперь опишем несколько более нетривиальную процедуру перехода от решения (4.17) к (4.20), (4.28). Рассмотрим решение (4.17), в котором кривая $\mathcal{L}_0$ заменена на кривую $\mathcal{L}_1$ рода $g_1 = g_0 + n$, задаваемую уравнением

$$\nu^2 = (w - \xi)(w - \bar{\xi}) \prod_{j=1}^{2g_0+2n} (w - w_j), \quad (4.29)$$

и выберем векторы $\mathbf{r}, \mathbf{s} \in \mathbb{C}^{g_0+n}$ следующим образом: $\mathbf{s} = 0$, $r_j = 0$, $1 \leq j \leq g_0$, $r_{g_0+j} = h_j \in \mathbb{R}$, $1 \leq j \leq n$. Без потери общности мы будем считать, что $h_j \in [0, 1]$. Матрицу b -периодов кривой $\mathcal{L}_1$ мы обозначим через $\mathbf{B}_1$, а базис голоморфных 1-форм — через $dV_1, \dots, dV_{g_0+n}$. Напишем решение (4.17), построенное по этим данным:

$$\mathcal{E} = \frac{\Theta[\mathbf{f}](V|_{\xi}^{\infty^1} | \mathbf{B}_1)}{\Theta[\mathbf{f}](V|_{\xi}^{\infty^2} | \mathbf{B}_1)}, \quad (4.30)$$

и совершим предельный переход $w_{2g_0+2j-1}, w_{2g_0+2j} \rightarrow \kappa_j \in \mathbb{R}$. Кривая $\mathcal{L}_1$ превращается в кривую $\mathcal{L}_0$ с двойными точками в κ_j , $j = 1, \dots, n$. Канонический базис голоморфных 1-форм на $\mathcal{L}_1$ превращается в $dV_1, \dots, dV_{g_0}, \frac{1}{2\pi i} dW_{\kappa_1 \kappa_1^*}, \dots, \frac{1}{2\pi i} dW_{\kappa_n \kappa_n^*}$, где $dV_1, \dots, dV_{g_0}$ — канонический базис голоморфных 1-форм на

$\mathcal{L}_0$ и $dW_{\kappa_j \kappa_j^*}$ — нормированные дифференциалы 3-го рода на $\mathcal{L}_0$. Следовательно, матрица b -периодов кривой $\mathcal{L}_1$ ведет себя в пределе следующим образом: $(\mathbf{B}_1)_{jk} = (\mathbf{B}_0)_{jk} + o(1)$, $1 \leq j, k \leq g_0$, $(\mathbf{B}_1)_{j,k+g_0} = 2V_j|_{\xi}^{\kappa_k} + o(1)$, $1 \leq j \leq g_0$, $1 \leq k \leq n$, $(\mathbf{B}_1)_{g_0+j,g_0+j} = -\frac{1}{\pi i} \ln |w_{2g_0+2j-1} - w_{2g_0+2j}| + O(1)$, $1 \leq j \leq n$, $(\mathbf{B}_1)_{g_0+k,g_0+j} = O(1)$, $1 \leq j \neq k \leq n$. Подставляя эти соотношения в определение тэта-функции, мы получаем в нашем пределе следующее выражение для решения (4.30), в котором все объекты строятся по кривой $\mathcal{L}_0$:

$$\mathcal{E} = \frac{\Theta(V|_{\xi}^{\infty^1} + 2 \sum_{j=1}^n h_j V|_{\xi}^{\kappa_j} | \mathbf{B}_0)}{\Theta(V|_{\xi}^{\infty^2} + 2 \sum_{j=1}^n h_j V|_{\xi}^{\kappa_j^*} | \mathbf{B}_0)} \exp \left\{ \sum_{j=1}^n h_j W_{\kappa_j \kappa_j^*} |_{\infty^2}^{\infty^1} \right\}. \quad (4.31)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 4.3. Предположение $\kappa_j \in \mathbb{R}$, $h_j \in \mathbb{R}$ было сделано из соображений удобства; мы можем также предположить наличие в (4.31) сопряженных пар $\kappa_j = \bar{\kappa}_l$, $h_j = \bar{h}_l$, которые возникают из склеивания двух «вертикальных» разрезов.

Мы можем вычислить непрерывный предел в (4.31), распределяя точки κ_j вдоль произвольного контура ∂D с произвольной (скажем, непрерывной) мерой $h(\kappa)$, удовлетворяющей условиям вещественности $h(\bar{\kappa}) = \overline{h(\kappa)}$. Тогда решение (4.31) принимает вид

$$\mathcal{E} = \frac{\Theta(V|_{\xi}^{\infty^1} + 2 \oint_{\partial D} h(\kappa) \{V|_{\xi}^{\kappa}\} d\kappa | \mathbf{B}_0)}{\Theta(V|_{\xi}^{\infty^2} + 2 \oint_{\partial D} h(\kappa) \{V|_{\xi}^{\kappa}\} d\kappa | \mathbf{B}_0)} \exp \left\{ \oint_{\partial D} h(\kappa) \{W_{\kappa \kappa^*} |_{\infty^2}^{\infty^1}\} d\kappa \right\}, \quad (4.32)$$

который совпадает с (4.20), (4.28). Переходя к непрерывному пределу в формулах для метрических коэффициентов, соответствующих потенциалу Эрнста (4.31), можно получить выражения для функций e^{2k} и F , соответствующих потенциалу Эрнста (4.32).

ТЕОРЕМА 4.6. Коэффициент F метрики (2.4), соответствующий решению (4.32) уравнения Эрнста, дается следующим выражением:

$$F = \frac{2}{\operatorname{Re} \mathcal{E}} \operatorname{Im} \left\{ \sum_{j=1}^{g_0} (\mathcal{A}_0^{-1})_{g_0 j} \frac{\partial}{\partial z_j} \ln \Theta \left(V|_{\xi}^{\infty^2} + 2 \oint_{\partial D} h(\kappa) \{V|_{\xi}^{\kappa}\} d\kappa | \mathbf{B}_0 \right) + \oint_{\partial D} h(\kappa) d\kappa \frac{dW_{\kappa \kappa^*}}{dw^{-1}} (\infty^2) \right\},$$

где все объекты строятся по кривой $\mathcal{L}_0$. Соответствующий метрический коэффициент e^{2k} задается выражением¹

$$e^{2k} = \frac{\Theta(2 \oint_{\partial D} H(\kappa) dV(\kappa) | \mathbf{B}_0) \Theta(2 \oint_{\partial D} H(\kappa) dV(\kappa) + \frac{1}{2} \mathbf{e} | \mathbf{B}_0)}{\Theta(0 | \mathbf{B}_0) \Theta(\frac{1}{2} \mathbf{e} | \mathbf{B}_0)} \times \exp \left\{ 2 \oint_{\partial D} \oint_{\partial D} h(\kappa) h(\tilde{\kappa}) \ln \frac{\Theta[S](V(\tilde{\kappa}) - V(\kappa) | \mathbf{B}_0)}{\kappa - \tilde{\kappa}} d\kappa d\tilde{\kappa} \right\},$$

¹Как нам сообщили Майнел и Нойгебауэр, похожая формула была получена ими для частного случая решений рода 2.

где $H(\kappa)$ — первообразная от функции h : $h(\kappa) = dH(\kappa)/d\kappa$, а $[S]$ — произвольная несингулярная нечетная характеристика на $\mathcal{L}_0$.

БЛАГОДАРНОСТЬ. Мы благодарим Кристиана Клейна, при участии которого последняя формула была выведена из (4.19).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Белинский В. А., Захаров В. Е.* Интегрирование уравнений Эйнштейна методом обратной задачи рассеяния и вычисление точных солитонных решений. *ЖЭТФ*, **48**, 985 (1978).
2. *Maison D.* Are the stationary, axially symmetric Einstein equations completely integrable? *Phys. Rev. Lett.*, **41**, 521 (1978).
3. *Bianchi L.* *Lezioni di geometria differenziale*. Pisa, 1909.
4. *Короткин Д. А.* Конечнозонные решения стационарного аксиально-симметричного уравнения Эйнштейна в вакууме. *ТМФ*, **77**, №1, 25–41 (1988).
5. *Короткин Д. А., Матвеев В. Б.* Алгеброгеометрические решения уравнения гравитации. *Алгебра и анализ*, **1**, вып. 2, 77–102 (1990).
6. *Korotkin D.* Elliptic solutions of stationary axisymmetric Einstein equation. *Class. Quantum Gravity*, **10**, 2587–2613 (1993).
7. *Neugebauer G., Meinel R.* General relativistic gravitational field of the rigidly rotating disk of dust: solution in terms of ultraelliptic functions. *Phys. Rev. Lett.*, **75**, 3046–3048 (1995).
8. *Neugebauer G., Meinel R.* Solutions to Einstein's field equation related to Jacobi inversion problem. *Phys. Lett. A*, **210**, 160 (1996).
9. *Korotkin D.* Some remarks on finite-gap solutions of Ernst equation. *Phys. Lett. A*, **229**, 195–199 (1997).
10. *Klein C., Richter O.* Explicit solutions of Riemann–Hilbert problem for the Ernst equation. *Phys. Rev. D*, **57**, 857–862 (1998).
11. *Зверович Е. И.* Граничные задачи в теории аналитических функций в гёльдеровских классах на римановых поверхностях. *УМН*, **26**, 117–192 (1971).
12. *Schlesinger L.* Über eine Klasse von Differentialsystemen beliebiger Ordnung mit festen kritischen Punkten. *J. Reine Angew. Math.*, **141**, 96–145 (1912).
13. *Kitaev A., Korotkin D.* On solutions of the Schlesinger equations in terms of theta-functions. *Intern. Math. Research Notices*, **17**, 877–906 (1998).
14. *Korotkin D., Nicolai H.* Isomonodromic quantization of dimensionally-reduced gravity. *Nuclear Phys. B*, **475**, 397–439 (1996).
15. *Fay John D.* Theta-functions on Riemann surfaces. *Lect. Notes in Math.*, vol. 352, Springer-Verlag, Berlin, 1973.
16. *Jimbo M., Miwa T., Ueno K.* Monodromy preserving deformation of linear ordinary differential equations with rational coefficients I. *Phys. D*, **2**, 306–352 (1981).
17. *Кричевер И. М.* Метод усреднения для двумерных «интегрируемых» уравнений. *Функц. анализ и его прил.*, **22**, вып. 3, 37–52 (1988).
18. *Dubrovin B.* Geometry of 2D topological field theories. In: *Integrable Systems and Quantum Groups*, *Lect. Notes in Math.*, vol. 1620 (Francaviglia M. and Greco S., eds.), Springer-Verlag, 1996, pp. 120–348.

Concordia University (Montreal)

Петербургское отделение математического
института им. В. А. Стеклова РАН
Dijon University

Поступило в редакцию

26 апреля 1999 г.