Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. П. Маслов, Обобщение метода вторичного квантования на случай специальных тензорных произведений пространств Фока и квантование свободной энергии, *Функци. анализ и его прил.*, 2000, том 34, выпуск 4, 35–48

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa324>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.45.116

26 апреля 2023 г., 13:05:39

УДК 517.9

Обобщение метода вторичного квантования на случай специальных тензорных произведений пространств Фока и квантование свободной энергии

© 2000. В. П. Маслов

В работе проводится осреднение многочастичного оператора Шрёдингера в фоковских пространствах, обобщающее приведенное в статье автора [2]. Показывается, что это есть некоторое новое представление уравнения Шрёдингера, непосредственно обобщающее представление вторичного квантования. Возникает принцип соответствия оператора его символу, который позволяет проквантовать энтропию, а с ней и свободную энергию.

1. Прежде всего мы применим «метод осреднения», рассмотренный в статье [2], для случая бозонов и покажем, что он приводит к обычному вторично квантованному оператору Шрёдингера.

Рассмотрим гильбертово пространство $\mathcal{F}$, элементами которого являются бесконечные последовательности функций

$$\Psi = (\Psi_0, \Psi_1(x_1), \Psi_2(x_1, x_2), \dots), \quad \Psi_N(x_1, \dots, x_N) \in \mathcal{F}_N,$$

где $\mathcal{F}_N$ — подпространство пространства $L^2(\underbrace{\mathbb{R}^3 \times \dots \times \mathbb{R}^3}_{N \text{ раз}})$, состоящее из эле-

ментов, симметричных относительно перестановок аргументов $x_1, \dots, x_N$. Скалярное произведение в $\mathcal{F}$ имеет вид

$$(\Psi, \Phi) = \sum_{N=0}^{\infty} \int dx_1 \dots dx_N \Psi_N^*(x_1, \dots, x_N) \Phi_N(x_1, \dots, x_N).$$

Пространство $\mathcal{F}$ называется *симметричным пространством Фока* [3]. В пространстве $\mathcal{F}$ определим оператор, называемый *осредненным гамильтонианом*,

$$\widehat{\mathcal{H}} = \sum_{N=0}^{\infty} \hat{i}_N \hat{H}_N \hat{P}_N, \quad (1)$$

где

$$\hat{P}_N: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}_N, \quad \hat{P}_N \Psi = \Psi_N, \quad \hat{i}_N: \mathcal{F}_N \rightarrow \mathcal{F}, \quad \hat{i}_N \Phi_N = (\underbrace{0, \dots, 0}_{N-1 \text{ раз}}, \Phi_N, 0, \dots),$$

$$\hat{H}_N = \sum_{j=1}^N T\left(x_j, -i\hbar \frac{\partial}{\partial x_j}\right) + \sum_{1 \leq i < j \leq N} V(x_i, x_j), \quad (2)$$

$T(x, -i\hbar \partial/\partial x)$ — гамильтониан отдельной частицы, а $V(x, y)$ — потенциал взаимодействия между частицами.

Пусть $\hat{b}^\pm(x)$ — операторы рождения и уничтожения в $\mathcal{F}$, определяемые стандартным образом [3]:

$$\begin{aligned} (\hat{b}^+(x)\Psi)_N(x_1, \dots, x_N) &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=1}^N \delta(x - x_j) \Psi_{N-1}(x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_N), \\ (\hat{b}^-(x)\Psi)_{N-1}(x_1, \dots, x_N) &= \sqrt{N} \Psi_N(x_1, \dots, x_{N-1}, x), \end{aligned} \quad (3)$$

и $\Psi_0 = (1, 0, \dots)$ — вакуумный вектор в $\mathcal{F}$. Учитывая формулы

$$\frac{1}{\sqrt{N!}} \exp \left(- \int dx \hat{b}^+(x) \hat{b}^-(x) \right) \hat{b}^-(x_1) \cdots \hat{b}^-(x_N) \Psi = \Psi_N(x_1, \dots, x_N) \Psi_0,$$

где число над оператором обозначает порядок его действия [4], и

$$\hat{i}_N \Phi_N(x_1, \dots, x_N) = \frac{1}{\sqrt{N!}} \int dx_1 \cdots dx_N \Phi_N(x_1, \dots, x_N) \hat{b}^+(x_1) \cdots \hat{b}^+(x_N) \Psi_0,$$

оператор $\overline{\mathcal{H}}$ можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \overline{\mathcal{H}} &= \sum_{N=0}^{\infty} \frac{1}{N!} \int dx_1 \cdots dx_N \hat{b}^+(x_1) \cdots \hat{b}^+(x_N) \hat{H}_N \\ &\quad \times \exp \left(- \int d\xi \hat{b}^+(\xi) \hat{b}^-(\xi) \right) \hat{b}^-(x_1) \cdots \hat{b}^-(x_N) \equiv \mathcal{H}(\hat{b}^+, \hat{b}^-). \end{aligned} \quad (4)$$

Функционал $\mathcal{H}(b^*, b)$, в свою очередь, удобно записать, введя в рассмотрение «вспомогательное» пространство Фока $\mathcal{H}_B$, элементами которого являются последовательности симметричных относительно перестановок аргументов функций

$$Y = (Y_0, Y_1(x_1), Y_2(x_1, x_2), \dots), \quad Y_N(x_1, \dots, x_N) \in L^2(\underbrace{\mathbb{R}^3 \times \cdots \times \mathbb{R}^3}_{N \text{ раз}}).$$

(В рассматриваемом случае $\mathcal{H}_B$ оказывается совпадающим с $\mathcal{F}$.) Обозначая операторы рождения и уничтожения в $\mathcal{H}_B$ через $\hat{\psi}^+(x)$ и $\hat{\psi}^-(x)$, а вакуумный вектор в $\mathcal{H}_B$ через $Y_0 = (1, 0, \dots)$, функционал $\mathcal{H}(b^*, b)$ можно записать в виде

$$\mathcal{H}(b^*, b) = \exp \left(- \int d\xi b^*(\xi) b(\xi) \right) (Y_b, \hat{H} Y_b),$$

где

$$\begin{aligned} Y_b &= \exp \left(\int dx \hat{\psi}^+(x) b(x) \right) Y_0, \\ \hat{H} &= \int dx \hat{\psi}^+(x) T \left(x, -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \right) \hat{\psi}^-(x) \\ &\quad + \frac{1}{2} \int dx dy \hat{\psi}^+(x) \hat{\psi}^+(y) V(x, y) \hat{\psi}^-(x) \hat{\psi}^-(y) \equiv H(\hat{\psi}^+, \hat{\psi}^-). \end{aligned} \quad (5)$$

С помощью формулы коммутации

$$\hat{\psi}^-(x) \exp \left(\int d\xi \hat{\psi}^+(\xi) b(\xi) \right) = \exp \left(\int d\xi \hat{\psi}^+(\xi) b(\xi) \right) (\hat{\psi}^-(x) + b(x))$$

функционал $\mathcal{H}$ можно привести к виду

$$\mathcal{H}(b^*, b) = \exp \left(- \int d\xi b^*(\xi) b(\xi) \right) (Y_b, Y_b) H(b^*, b).$$

Вычислив скалярное произведение

$$\begin{aligned} (Y_b, Y_b) &= \sum_{N=0}^{\infty} \int dx_1 \cdots dx_N \frac{b^*(x_1) \cdots b^*(x_N)}{\sqrt{N!}} \frac{b(x_1) \cdots b(x_N)}{\sqrt{N!}} \\ &= \exp \left(\int dx b^*(x) b(x) \right), \end{aligned}$$

получим

$$\mathcal{H}(b^*, b) = H(b^*, b).$$

Таким образом, виковский символ осредненного гамильтониана (1) совпадает с виковским символом вторично квантованного гамильтониана (5).

Если таким способом осреднять единичный оператор, то, как видно из статьи [5], он принимает вид

$$\begin{aligned} \overline{E} &= \sum_{N=0}^{\infty} \frac{1}{N!} \int dx_1 \cdots dx_N \hat{b}^+(x_1) \cdots \hat{b}^+(x_N) \\ &\quad \times \exp \left(- \int d\xi \hat{b}^+(\xi) \hat{b}^-(\xi) \right) \hat{b}^-(x_1) \cdots \hat{b}^-(x_N), \end{aligned}$$

а его символ

$$\begin{aligned} E(b^*, b) &= \sum_{N=0}^{\infty} \frac{1}{N!} \int dx_1 \cdots dx_N b^*(x_1) \cdots b^*(x_N) \\ &\quad \times \exp \left(- \int d\xi b^*(\xi) b(\xi) \right) b(x_1) \cdots b(x_N) \end{aligned}$$

может быть представлен в следующем виде:

$$E(b^*, b) = \exp \left(- \int d\xi b^*(\xi) b(\xi) \right) \text{Sp } \hat{\rho}, \quad (6)$$

где

$$\begin{aligned} \hat{\rho} &= \sum_{N=0}^{\infty} \frac{1}{(N!)^2} \left(\int dx b(x) \hat{\psi}^+(x) \right)^N \\ &\quad \times \exp \left(- \int d\xi \hat{\psi}^+(\xi) \hat{\psi}^-(\xi) \right) \left(\int dy b^*(y) \hat{\psi}^-(y) \right)^N. \end{aligned}$$

Выражение (6) следует из леммы, доказанной в [5], а кроме того, легко может быть получено с помощью результатов [4]. Аналогично, символ осредненного гамильтониана (4) представляется в виде

$$\mathcal{H}(b^*, b) = \exp \left(- \int d\xi b^*(\xi) b(\xi) \right) \text{Sp}(\hat{\rho} \hat{H}). \quad (7)$$

2. Следуя статье [1], введем осреднение операторов в более общем, чем рассмотренный выше, случае большого числа кластеров и разных типов бозонов.

Пусть $1 \leq k$ — целое число. Пусть $N_1, \dots, N_k \geq 0$ — целые числа. Рассмотрим гильбертово пространство функций вида

$$\Psi(x_1^1, j_1^1; \dots; x_{N_1}^1, j_{N_1}^1; x_1^2, j_1^2; \dots; x_{N_2}^2, j_{N_2}^2; \dots; x_1^k, \dots, x_k^k, j_1^k; \dots; x_{N_k}^k, j_{N_k}^k), \quad (8)$$

где $x_{p_l}^l \in \mathbb{T}^3$, $\mathbb{T}^3$ — трехмерный тор, длина сторон которого равна L , $j_{q_l}^l = 1, \dots, \infty$ для всех $l = 1, \dots, k$ и $p_l = 1, \dots, lN_l$, $q_l = 1, \dots, N_l$, причем функции симметричны относительно перестановок любых пар наборов переменных $(x_{l_{p-l+1}}^l, \dots, x_{l_p}^l, j_p^l)$ и $(x_{l_{q-l+1}}^l, \dots, x_{l_q}^l, j_q^l)$ при $l = 1, \dots, k$ и $p, q = 1, \dots, N_l$.

Скалярное произведение имеет вид

$$\begin{aligned} (\Psi, \Phi) &\stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j_1^1=1}^{\infty} \dots \sum_{j_{N_1}^1=1}^{\infty} \dots \sum_{j_1^k=1}^{\infty} \dots \sum_{j_{N_k}^k=1}^{\infty} \int \dots \int dx_1^1 \dots dx_{N_1}^1 \dots dx_1^k \dots dx_{N_k}^k \\ &\times \Psi^*(x_1^1, j_1^1; \dots; x_{N_1}^1, j_{N_1}^1; \dots; \\ &\quad x_1^k, \dots, x_k^k, j_1^k; \dots; x_{N_k}^k, j_{N_k}^k) \\ &\times \Phi(x_1^1, j_1^1; \dots; x_{N_1}^1, j_{N_1}^1; \dots; \\ &\quad x_1^k, \dots, x_k^k, j_1^k; \dots; x_{N_k}^k, j_{N_k}^k). \end{aligned}$$

Будем обозначать это пространство $\mathcal{F}_{N_1, \dots, N_k}$. Определим бозонное пространство $\mathcal{F}_{N_1, \dots, N_k}^B$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пространство $\mathcal{F}_{N_1, \dots, N_k}^B$ является подпространством пространства $\mathcal{F}_{N_1, \dots, N_k}$ и состоит из тех его элементов, которые симметричны относительно перестановок любых x_p^l и x_q^m при $l, m = 1, \dots, k$ и $p = 1, \dots, lN_l$, $q = 1, \dots, mN_m$. Проектор на это подпространство будет обозначаться через $\hat{P}_{N_1, \dots, N_k}^B$,

$$\hat{P}_{N_1, \dots, N_k}^B: \mathcal{F}_{N_1, \dots, N_k} \rightarrow \mathcal{F}_{N_1, \dots, N_k}^B.$$

Рассмотрим теперь гильбертово пространство $\mathcal{F}$, элементами которого являются бесконечные наборы

$$\Psi = \{\Psi_{N_1, \dots, N_k}\}, \quad \Psi_{N_1, \dots, N_k} \in \mathcal{F}_{N_1, \dots, N_k}, \quad N_1, \dots, N_k = 0, 1, \dots,$$

$$\|\Psi\|^2 = \sum_{N_1=0}^{\infty} \dots \sum_{N_k=0}^{\infty} \|\Psi_{N_1, \dots, N_k}\|^2 < \infty.$$

Это пространство является бесконечной прямой суммой:

$$\mathcal{F} = \bigoplus_{N_1, \dots, N_k} \mathcal{F}_{N_1, \dots, N_k}.$$

В нем аналогично (3) (см. также [3]) вводятся операторы $\hat{b}_l^+(x_1, \dots, x_l, j)$, $\hat{b}_l^-(x_1, \dots, x_l, j)$ при $l = 1, \dots, k$ — операторы рождения и уничтожения соответственно.

Обозначим оператор проектирования на соответствующее слагаемое прямой суммы через $\hat{P}_{N_1, \dots, N_k}$,

$$\hat{P}_{N_1, \dots, N_k}: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}_{N_1, \dots, N_k}, \quad \hat{P}_{N_1, \dots, N_k} \Psi = \Psi_{N_1, \dots, N_k},$$

а оператор вложения $\mathcal{F}_{N_1, \dots, N_k}$ в $\mathcal{F}$ через $\hat{i}_{N_1, \dots, N_k}$,

$$\hat{i}_{N_1, \dots, N_k} : \mathcal{F}_{N_1, \dots, N_k} \rightarrow \mathcal{F}, \quad \hat{i}_{N_1, \dots, N_k} \varphi = \{\delta_{N_1 M_1} \cdots \delta_{N_k M_k} \varphi\}_{M_1, \dots, M_k},$$

где δ_{NM} — символ Кронекера.

Введем понятие осредненного оператора. Пусть задан набор операторов $\{\hat{A}_N\}$ в подпространствах пространства $L^2(\underbrace{\mathbb{T}^3 \times \cdots \times \mathbb{T}^3}_{N \text{ раз}})$, элементы $\psi(x_1, \dots, x_N)$ кото-

рых симметричны относительно перестановок переменных x_j и x_k , $x_j \in \mathbb{T}^3$. Поставим в соответствие операторам $\hat{A}_N$ операторы $\tilde{\hat{A}}_{N_1, \dots, N_k}$, $N_1 + 2N_2 + \cdots + kN_k = N$, на подпространствах $\mathcal{F}_{N_1, \dots, N_k}^B$, действующие как единичные по дискретным переменным j_p^l .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Осредненным оператором $\bar{\hat{A}}$ будем называть оператор*

$$\bar{\hat{A}} = \sum_{N_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{N_k=0}^{\infty} (N_1 + \cdots + kN_k)! \hat{i}_{N_1, \dots, N_k} \tilde{\hat{A}}_{N_1 + \cdots + kN_k} \hat{P}_{N_1, \dots, N_k}^B \hat{P}_{N_1, \dots, N_k}$$

в пространстве Фока $\mathcal{F}$.

(По поводу регуляризации в случае расходимости и инвариантности относительно выбора коэффициентов суммирования см. [5].)

ЗАМЕЧАНИЕ. Оператор $\hat{i}_{N_1, \dots, N_k} \tilde{\hat{A}}_{N_1 + \cdots + kN_k} \hat{P}_{N_1, \dots, N_k}^B \hat{P}_{N_1, \dots, N_k}$ может быть выражен следующим образом:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{N_1! \cdots N_k!} \sum_{j_1^1=1}^{\infty} \cdots \sum_{j_{N_1}^1=1}^{\infty} \cdots \sum_{j_1^k=1}^{\infty} \cdots \sum_{j_{N_k}^k=1}^{\infty} \int \cdots \int dx_1^1 \cdots dx_{N_1}^1 \cdots dx_1^k \cdots dx_{N_k}^k \\ & \times \hat{b}_1^+(x_1^1, j_1^1) \cdots \hat{b}_{N_1}^+(x_{N_1}^1, j_{N_1}^1) \cdots \hat{b}_k^+(x_1^k, \dots, x_k^k, j_k^k) \\ & \cdots \hat{b}_k^+(x_{kN_k-k+1}^k, \dots, x_{kN_k}^k, j_{N_k}^k) \hat{A}_{N_1 + \cdots + kN_k} \\ & \times \text{Symm}_{x_1^1 \cdots x_{N_1}^1 \cdots x_1^k \cdots x_{N_k}^k} \left\{ \hat{b}_1^-(x_1^1, j_1^1) \cdots \hat{b}_{N_1}^-(x_{N_1}^1, j_{N_1}^1) \right. \\ & \left. \cdots \hat{b}_k^-(x_1^k, \dots, x_k^k, j_k^k) \cdots \hat{b}_k^-(x_{kN_k-k+1}^k, \dots, x_{kN_k}^k, j_{N_k}^k) \right\} \\ & \times \exp \left(- \sum_{j=1}^{\infty} \int dz \hat{b}_1^+(z, j) \hat{b}_1^-(z, j) - \right. \\ & \left. \cdots - \sum_{j=1}^{\infty} \int \cdots \int dz_1 \cdots dz_k \hat{b}_k^+(z_1, \dots, z_k, j) \hat{b}_k^-(z_1, \dots, z_k, j) \right), \quad (9) \end{aligned}$$

где $\text{Symm}_{x_1 \dots x_N}$ — оператор симметризации по переменным $x_1, \dots, x_N$, а числа над операторами обозначают порядок их действия [4]. Выражение (9) в частном случае $k=2$ было получено в [2] и для произвольного k доказывается аналогично.

Исходя из сделанного замечания, символом осредненного оператора $\bar{\hat{A}}$ будем называть следующий функционал:

$$\begin{aligned}
& A(b_1^*(x_1^1, j^1), b_1(x_1^1, j^1), \dots, b_k^*(x_1^k, \dots, x_k^k, j^k), b_k(x_1^k, \dots, x_k^k, j^k)) \\
&= \sum_{N_1=0}^{\infty} \dots \sum_{N_k=0}^{\infty} \frac{(N_1 + 2N_2 + \dots + kN_k)!}{N_1! N_2! \dots N_k!} \\
&\times \sum_{j_1^1=1}^{\infty} \dots \sum_{j_{N_1}^1=1}^{\infty} \dots \sum_{j_1^k=1}^{\infty} \dots \sum_{j_{N_k}^k=1}^{\infty} \int \dots \int dx_1^1 \dots dx_{N_1}^1 \dots dx_1^k \dots dx_{N_k}^k \\
&\times b_1^*(x_1^1, j_1^1) \dots b_1^*(x_{N_1}^1, j_{N_1}^1) \dots b_k^*(x_1^k, \dots, x_k^k, j_k^k) \dots b_k^*(x_{N_k}^k, \dots, x_k^k, j_{N_k}^k) \\
&\times \widehat{A}_{N_1+\dots+kN_k} \text{Symm}_{x_1^1 \dots x_{N_1}^1 \dots x_1^k \dots x_{N_k}^k} \{b_1(x_1^1, j_1^1) \dots b_1(x_{N_1}^1, j_{N_1}^1) \\
&\dots b_k(x_1^k, \dots, x_k^k, j_k^k) \dots b_k(x_{N_k}^k, \dots, x_k^k, j_{N_k}^k)\} \\
&\times \exp \left(- \sum_{j=1}^{\infty} \int dz b_1^*(z, j) b_1(z, j) - \dots - \sum_{j=1}^{\infty} \int \dots \int dz_1 \dots dz_k b_k^*(z_1, \dots, z_k, j) b_k(z_1, \dots, z_k, j) \right),
\end{aligned}$$

где $b_l(\cdot, \dots, \cdot, j^l) \in L^2(\mathbb{T}^3)$ при $l = 1, \dots, k$ для всех $j^l = 0, 1, \dots$ и выполнено неравенство

$$\sum_{j=0}^{\infty} \int \dots \int dx_1 \dots dx_l b_l^*(x_1, \dots, x_l, j) b_l(x_1, \dots, x_l, j) < \infty.$$

Рассмотренному выше набору операторов $\{\widehat{A}_N\}$ отвечает вторично квантованный оператор $\widehat{A}$ в пространстве Фока $\mathcal{H}_B$.

Имеет место следующая

ЛЕММА. Символ осредненного оператора $\overline{\widehat{A}}$ выражается следующим образом:

$$\begin{aligned}
& A(b_1^*(x_1^1, j^1), b_1(x_1^1, j^1), \dots, b_k^*(x_1^k, \dots, x_k^k, j^k), b_k(x_1^k, \dots, x_k^k, j^k)) \\
&= \text{Sp}(\widehat{A}\widehat{\rho}) \exp \left(- \sum_{j=1}^{\infty} \int dz b_1^*(z, j) b_1(z, j) - \dots - \sum_{j=1}^{\infty} \int \dots \int dz_1 \dots dz_k b_k^*(z_1, \dots, z_k, j) b_k(z_1, \dots, z_k, j) \right), \quad (10)
\end{aligned}$$

где $\widehat{\rho}$ является оператором в пространстве $\mathcal{H}_B$ и имеет вид

$$\begin{aligned}
& \widehat{\rho} = \sum_{N_1=0}^{\infty} \dots \sum_{N_k=0}^{\infty} \frac{1}{N_1! \dots N_k!} \prod_{l=1}^k \left(\sum_{j^l=0}^{\infty} \int \dots \int dx_1^l dy_1^l \dots dx_l^l dy_l^l \right. \\
& \times b_l(x_1^l, \dots, x_l^l, j^l) \widehat{\psi}^+(x_1^l) \dots \widehat{\psi}^+(x_l^l) b_l^*(y_1^l, \dots, y_l^l, j^l) \widehat{\psi}^-(y_1^l) \dots \widehat{\psi}^-(y_l^l) \Big)^{N_l} \\
& \times \exp \left(- \int dz \widehat{\psi}^+(z) \widehat{\psi}^-(z) \right).
\end{aligned}$$

Эта лемма следует из леммы, доказанной в статье [5]. Очевидно, что (10) является обобщением формул (6), (7).

Пусть далее $\widehat{\mathcal{H}}$ и $\widehat{E}$ — осредненные таким способом гамильтониан (2) и единственный оператор соответственно. Символы этих операторов, согласно лемме, с точностью до множителя равны $\text{Sp } \widehat{\rho}$ и $\text{Sp}(\widehat{H}\widehat{\rho})$. Если оператор $\widehat{\rho}$ считать статистическим оператором (матрицей плотности), то $\text{Sp } \widehat{\rho}$ — норма этого оператора, а $\text{Sp}(\widehat{H}\widehat{\rho})$ есть среднее значение гамильтониана, умноженное на $\text{Sp } \widehat{\rho}$. При этом статистическому оператору $\widehat{\rho}$ отвечает энтропия

$$S = \text{Sp} \left(\widehat{\rho} \ln \left(\frac{\widehat{\rho}}{\text{Sp } \widehat{\rho}} \right) \right) (\text{Sp } \widehat{\rho})^{-1}.$$

Исходя из аналогии со статистической физикой, будем называть *символом осредненной энтропии* функционал

$$\begin{aligned} & S(b_1^*(x_1^1, j^1), b_1(x_1^1, j^1), \dots, b_k^*(x_1^k, \dots, x_k^k, j^k), b_k(x_1^k, \dots, x_k^k, j^k)) \\ &= \text{Sp} \left(\widehat{\rho} \ln \left(\frac{\widehat{\rho}}{\text{Sp } \widehat{\rho}} \right) \right) \exp \left(- \sum_{j=1}^{\infty} \int dz b_1^*(z, j) b_1(z, j) - \right. \\ & \quad \left. \dots - \sum_{j=1}^{\infty} \int \dots \int dz_1 \dots dz_k b_k^*(z_1, \dots, z_k, j) b_k(z_1, \dots, z_k, j) \right). \end{aligned}$$

Символу осредненной энтропии поставим в соответствие следующий оператор в пространстве $\mathcal{F}$:

$$\widehat{S} = \text{reg } S(\widehat{b}_1^+(x_1^1, j^1), \widehat{b}_1^-(x_1^1, j^1), \dots, \widehat{b}_k^+(x_1^k, \dots, x_k^k, j^k), \widehat{b}_k^-(x_1^k, \dots, x_k^k, j^k)).$$

Для больших N регуляризация проводится с помощью пуантилистической картины [6] (см. конец статьи).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Числа λ , такие, что

$$(\widehat{\mathcal{H}} + \theta \widehat{S})\Phi = \lambda \widehat{E}\Phi, \quad \Phi \in \mathcal{F}, \Phi \neq 0, \quad (11)$$

будем называть *квантовыми собственными значениями свободной энергии* системы бозонов с гамильтонианом $\widehat{H}$ при температуре θ для k типов кластеров.

3. Теперь аналогично введем осреднение операторов и квантовую свободную энергию для фермионов. Будем считать, что фермионы могут иметь спиновую переменную s , которая принимает значения в дискретном конечном множестве Σ . Рассмотрим гильбертово пространство $\mathcal{F}_{N_1, \dots, N_k}$, построенное из функций (8), для которых $x_{p_l}^l \in \mathbb{T}^3 \otimes \Sigma$. Далее в этом разделе везде будем использовать обозначение

$$\int dx = \sum_{s \in \Sigma} \int d\xi,$$

где $x = (\xi, s)$, $\xi \in \mathbb{T}^3$, $s \in \Sigma$. Определим фермионное пространство $\mathcal{F}_{N_1, \dots, N_k}^F$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пространство $\mathcal{F}_{N_1, \dots, N_k}^F$ является подпространством пространства $\mathcal{F}_{N_1, \dots, N_k}$ и состоит из таких элементов $\mathcal{F}_{N_1, \dots, N_k}$, которые антисимметричны относительно перестановок любых x_p^l и x_q^m при $l, m = 1, \dots, k$

и $p = 1, \dots, lN_l$, $q = 1, \dots, mN_m$. Проектор на это подпространство будет обозначаться через $\hat{P}_{N_1, \dots, N_k}^F$:

$$\hat{P}_{N_1, \dots, N_k}^F: \mathcal{F}_{N_1, \dots, N_k} \rightarrow \mathcal{F}_{N_1, \dots, N_k}^B.$$

Введем понятие осредненного оператора в фермионном случае. Пусть в подпространствах пространства $L_2(\underbrace{\mathbb{T}^3 \otimes \Sigma \times \dots \times \mathbb{T}^3 \otimes \Sigma}_{N \text{ раз}})$ задан набор операторов $\{\hat{A}_N\}$,

элементы $\psi(x_1, \dots, x_N)$ которых антисимметричны относительно перестановок переменных x_j и x_k , $x_j \in \mathbb{T}^3 \otimes \Sigma$. Поставим в соответствие операторам $\hat{A}_N$ операторы $\bar{\hat{A}}_{N_1, \dots, N_k}$, $N_1 + 2N_2 + \dots + kN_k = N$, на подпространствах $\mathcal{F}_{N_1, \dots, N_k}^F$, действующие как единичные по дискретным переменным j_p^l .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Осредненным оператором $\bar{\hat{A}}$ будем называть оператор*

$$\bar{\hat{A}} = \sum_{N_1=0}^{\infty} \dots \sum_{N_k=0}^{\infty} (N_1 + \dots + kN_k)! \hat{i}_{N_1, \dots, N_k} \bar{\hat{A}}_{N_1 + \dots + kN_k} \hat{P}_{N_1, \dots, N_k}^F \hat{P}_{N_1, \dots, N_k}$$

в пространстве Фока $\mathcal{F}$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Оператор $\hat{i}_{N_1, \dots, N_k} \bar{\hat{A}}_{N_1 + \dots + kN_k} \hat{P}_{N_1, \dots, N_k}^F \hat{P}_{N_1, \dots, N_k}$ может быть выражен следующим образом:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{N_1! \dots N_k!} \sum_{j_1^1=1}^{\infty} \dots \sum_{j_{N_1}^1=1}^{\infty} \dots \sum_{j_1^k=1}^{\infty} \dots \sum_{j_{N_k}^k=1}^{\infty} \int \dots \int dx_1^1 \dots dx_{N_1}^1 \dots dx_1^k \dots dx_{N_k}^k \\ & \times \hat{b}_1^+(x_1^1, j_1^1) \dots \hat{b}_1^+(x_{N_1}^1, j_{N_1}^1) \dots \hat{b}_k^+(x_1^k, \dots, x_k^k, j_k^k) \\ & \dots \hat{b}_k^+(x_{kN_k-k+1}^k, \dots, x_{kN_k}^k, j_{N_k}^k) \hat{A}_{N_1 + \dots + kN_k} \\ & \times \text{Asymm}_{x_1^1 \dots x_{N_1}^1 \dots x_1^k \dots x_{N_k}^k} \left\{ \hat{b}_1^-(x_1^1, j_1^1) \dots \hat{b}_1^-(x_{N_1}^1, j_{N_1}^1) \right. \\ & \left. \dots \hat{b}_k^-(x_1^k, \dots, x_k^k, j_k^k) \dots \hat{b}_k^-(x_{kN_k-k+1}^k, \dots, x_{kN_k}^k, j_{N_k}^k) \right\} \\ & \times \exp \left(- \sum_{j=1}^{\infty} \int dz \hat{b}_1^+(z, j) \hat{b}_1^-(z, j) - \right. \\ & \left. \dots - \sum_{j=1}^{\infty} \int \dots \int dz_1 \dots dz_k \hat{b}_k^+(z_1, \dots, z_k, j) \hat{b}_k^-(z_1, \dots, z_k, j) \right), \quad (12) \end{aligned}$$

где $\text{Asymm}_{x_1 \dots x_N}$ — оператор антисимметризации по переменным $x_1, \dots, x_N$. Выражение (12) является аналогом выражения (9) в фермионном случае.

Символом осредненного оператора $\bar{\hat{A}}$ в фермионном случае будем называть следующий функционал:

$$\begin{aligned}
& A(b_1^*(x_1^1, j^1), b_1(x_1^1, j^1), \dots, b_k^*(x_1^k, \dots, x_k^k, j^k), b_k(x_1^k, \dots, x_k^k, j^k)) \\
&= \sum_{N_1=0}^{\infty} \dots \sum_{N_k=0}^{\infty} \frac{(N_1 + 2N_2 + \dots + kN_k)!}{N_1! N_2! \dots N_k!} \\
&\times \sum_{j_1^1=1}^{\infty} \dots \sum_{j_{N_1}^1=1}^{\infty} \dots \sum_{j_1^k=1}^{\infty} \dots \sum_{j_{N_k}^k=1}^{\infty} \int \dots \int dx_1^1 \dots dx_{N_1}^1 \dots dx_1^k \dots dx_{N_k}^k \\
&\times b_1^*(x_1^1, j_1^1) \dots b_1^*(x_{N_1}^1, j_{N_1}^1) \dots b_k^*(x_1^k, \dots, x_k^k, j_k^k) \dots b_k^*(x_{kN_k-k+1}^k, \dots, x_{kN_k}^k, j_{N_k}^k) \\
&\times \widehat{A}_{N_1+\dots+kN_k} \text{Asymm} \{b_1(x_1^1, j_1^1) \dots b_1(x_{N_1}^1, j_{N_1}^1) \\
&\quad \dots b_k(x_1^k, \dots, x_k^k, j_k^k) \dots b_k(x_{kN_k-k+1}^k, \dots, x_{kN_k}^k, j_{N_k}^k)\} \\
&\times \exp \left(- \sum_{j=1}^{\infty} \int dz b_1^*(z, j) b_1(z, j) - \dots - \sum_{j=1}^{\infty} \int \dots \int dz_1 \dots dz_k b_k^*(z_1, \dots, z_k, j) b_k(z_1, \dots, z_k, j) \right),
\end{aligned}$$

где $b_l(\cdot, \dots, \cdot, j^l) \in L^2(\mathbb{T}^{3l})$ при $l = 1, \dots, k$ для всех $j^l = 0, 1, \dots$ и выполнено неравенство

$$\sum_{j=0}^{\infty} \int \dots \int dx_1 \dots dx_l b_l^*(x_1, \dots, x_l, j) b_l(x_1, \dots, x_l, j) < \infty.$$

Рассмотренному выше набору операторов $\{\widehat{A}_N\}$ отвечает вторично квантованный оператор $\widehat{A}$ в фермионном пространстве Фока $\mathcal{H}_F$, которое состоит из последовательностей антисимметричных функций и является аналогом пространства $\mathcal{H}_B$ (подробно см. в [3]).

В фермионном случае имеет место следующая

ЛЕММА. Символ осредненного оператора $\widetilde{A}$ выражается следующим образом:

$$\begin{aligned}
& A(b_1^*(x_1^1, j^1), b_1(x_1^1, j^1), \dots, b_k^*(x_1^k, \dots, x_k^k, j^k), b_k(x_1^k, \dots, x_k^k, j^k)) \\
&= \text{Sp}(\widehat{A}\widehat{\rho}) \exp \left(- \sum_{j=1}^{\infty} \int dz b_1^*(z, j) b_1(z, j) - \dots - \sum_{j=1}^{\infty} \int \dots \int dz_1 \dots dz_k b_k^*(z_1, \dots, z_k, j) b_k(z_1, \dots, z_k, j) \right),
\end{aligned}$$

где $\widehat{\rho}$ является оператором в пространстве $\mathcal{H}_F$ и имеет вид

$$\begin{aligned}
\widehat{\rho} &= \sum_{N_1=0}^{\infty} \dots \sum_{N_k=0}^{\infty} \frac{1}{N_1! \dots N_k!} \sum_{j_1^1=0}^{\infty} \dots \sum_{j_{N_1}^1=0}^{\infty} \dots \sum_{j_1^k=0}^{\infty} \dots \sum_{j_{N_k}^k=0}^{\infty} \\
&\times \int \dots \int dx_1^1 dy_1^1 \dots dx_{N_1}^1 dy_{N_1}^1 \dots dx_1^k dy_1^k \dots dx_{N_k}^k dy_{N_k}^k \\
&\times \widehat{\psi}^+(x_1^1) \dots \widehat{\psi}^+(x_{N_1}^1) \dots \widehat{\psi}^+(x_1^k) \dots \widehat{\psi}^+(x_{N_k}^k) \widehat{P}_0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times b_1(x_1^1, j_1^1) \cdots b_1(x_{N_1}^1, j_{N_1}^1) \cdots b_k(x_1^k, \dots, x_k^k, j_1^k) \cdots b_k(x_{kN_k-k+1}^k, \dots, x_{kN_k}^k, j_{N_k}^k) \\
& \times b_1^*(y_1^1, j_1^1) \cdots b_1^*(y_{N_1}^1, j_{N_1}^1) \cdots b_k^*(y_1^k, \dots, y_k^k, j_1^k) \cdots b_k^*(y_{kN_k-k+1}^k, \dots, y_{kN_k}^k, j_{N_k}^k) \\
& \times \widehat{\psi}^-(y_{kN_k}^k) \cdots \widehat{\psi}^-(y_1^k) \cdots \widehat{\psi}^-(y_{N_1}^1) \cdots \widehat{\psi}^-(x_1^1),
\end{aligned}$$

$\widehat{P}_0$ — оператор проектирования на вакуумный вектор пространства $\mathcal{H}_F$.

Будем называть в фермионном случае *символом осредненной энтропии* функционал

$$\begin{aligned}
& S(b_1^*(x_1^1, j_1^1), b_1(x_1^1, j_1^1), \dots, b_k^*(x_1^k, \dots, x_k^k, j_k^k), b_k(x_1^k, \dots, x_k^k, j_k^k)) \\
& = \text{Sp} \left(\widehat{\rho} \ln \left(\frac{\widehat{\rho}}{\text{Sp} \widehat{\rho}} \right) \right) \exp \left(- \sum_{j=1}^{\infty} \int dz b_1^*(z, j) b_1(z, j) - \right. \\
& \quad \left. \cdots - \sum_{j=1}^{\infty} \int \cdots \int dz_1 \cdots dz_k b_k^*(z_1, \dots, z_k, j) b_k(z_1, \dots, z_k, j) \right).
\end{aligned}$$

Символу осредненной энтропии поставим в соответствие следующий оператор в пространстве $\mathcal{F}$:

$$\overline{S} = \text{reg } S(\widehat{b}_1^+(x_1^1, j_1^1), \widehat{b}_1^-(x_1^1, j_1^1), \dots, \widehat{b}_k^+(x_1^k, \dots, x_k^k, j_k^k), \widehat{b}_k^-(x_1^k, \dots, x_k^k, j_k^k)).$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Числа λ , такие, что

$$(\overline{\mathcal{H}} + \theta \overline{S})\Phi = \lambda \overline{E}\Phi, \quad \Phi \in \mathcal{F}, \quad \Phi \neq 0, \quad (13)$$

будем называть *квантовыми собственными значениями свободной энергии* системы фермионов с гамильтонианом $\widehat{H}$ при температуре θ для k типов кластеров.

4. Пусть в пространстве $\mathcal{F}$ задана система векторов $\{\Phi_n\}$. Умножая уравнения (13) и (11) скалярно на вектор Φ_n и делая подстановку $\Phi = \sum_m C_m \Phi_m$, получим систему уравнений для коэффициентов C_m

$$\sum_m (\Phi_n, (\overline{\mathcal{H}} + \theta \overline{S})\Phi_m) C_m = \lambda \sum_m (\Phi_n, \overline{E}\Phi_m) C_m. \quad (14)$$

Естественно, систему векторов $\{\Phi_n\}$ можно выбрать так, чтобы система уравнений (14) упростилась и стала туннельной. Проиллюстрируем этот выбор на примере системы из N фермионов со спином $1/2$. Будем считать, что число типов кластеров равно 2. Пусть вторично квантованный гамильтониан фермионов в пространстве $\mathcal{H}_F$ имеет вид

$$\widehat{H} = \sum_p \sum_{s=1}^2 \varepsilon_p \widehat{c}_{ps}^+ \widehat{c}_{ps}^- + \sum_{p,q,r,t} \sum_{s,s'=1}^2 V_{pqrt} \widehat{c}_{ps}^+ \widehat{c}_{qs}^+ \widehat{c}_{rs'}^+ \widehat{c}_{ts}^-, \quad (15)$$

где $s = 1, 2$ — спиновая переменная, p, q, r, t — трехмерные векторы вида $2\pi(n_1, n_2, n_3)/L$, $n_1, n_2, n_3 \in \mathbb{Z}$, L — длина стороны тора $\mathbb{T}^3$, $\widehat{c}_{ps}^{\pm}$ — операторы рождения и уничтожения фермиона с импульсом p и спином s ,

$$\widehat{c}_{ps}^{\pm} = \frac{1}{L^{3/2}} \int d\xi \exp(\pm i p \xi) \widehat{\psi}^{\pm}(\xi, s),$$

ε_p, V_{pqrt} — заданные коэффициенты, причем $V_{pqrt} = 0$ при $p + q - r - t \neq 0$, и, кроме того, использовано следующее обозначение:

$$\sum_p = \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \sum_{n_2=-\infty}^{\infty} \sum_{n_3=-\infty}^{\infty}.$$

Поскольку операторы $\widehat{\mathcal{H}}, \widehat{E}$ и $\widehat{S}$, очевидно, коммутируют с операторами числа частиц данного типа кластеров

$$\int \cdots \int dx_1 \cdots dx_l \widehat{b}_l^+(x_1, \dots, x_l, j) \widehat{b}_l^-(x_1, \dots, x_l, j)$$

при всех $l = 1, \dots, k$ и $j = 0, 1, \dots$, введем в пространстве $\mathcal{F}$ систему векторов вида

$$\Phi_{\{p\sigma\}M} = \left(\sum_s \sum_{s'} \iint d\xi d\xi' \Phi(\xi, s, \xi', s') \widehat{b}_2^+(\xi, s, \xi', s', 0) \right)^M \times \prod_{j=0}^{N-2M} \left(\int d\zeta u_{p_j}(x) \widehat{b}_1^+(\zeta, \sigma_j, j) \right) \Psi_0, \quad (16)$$

где Ψ_0 — вакуумный вектор в пространстве $\mathcal{F}$, $u_p(x) = \exp(ipx)/L^{3/2}$, $\{p\sigma\}$ — последовательности пар (p_j, σ_j) , $j = 0, 1, \dots$, причем $(p_j, \sigma_j) \neq (p_{j'}, \sigma_{j'})$ при $j \neq j'$, $2M < N$ и, кроме того,

$$\Phi(\xi, 1, \xi', 2) = \sum_p \varphi_p u_p(\xi) u_{-p}(\xi') = -\Phi(\xi', 2, \xi, 1),$$

$$\Phi(\xi, 1, \xi', 1) = \Phi(\xi, 2, \xi', 2) = 0.$$

Система векторов (16) в случае, когда M и $N - 2M$ велики, определяет серию, понимаемую в смысле [6]. В пространстве Фока $\mathcal{H}_F$ этой серии отвечает следующая система векторов:

$$\phi_{\{n\}} = \left(\sum_q \varphi_q \widehat{c}_{q1}^+ \widehat{c}_{-q2}^+ \right)^M \prod_p (\widehat{c}_{p1}^+)^{n_{p1}} (\widehat{c}_{-p2}^+)^{n_{-p2}} Y_0, \quad (17)$$

где $\{n\}$ — набор чисел n_{ps} , которые могут принимать значения 0 и 1 и при этом $\sum_p \sum_s n_{ps} = N - 2M$, а Y_0 — вакуумный вектор пространства $\mathcal{H}_F$. Матричные элементы, отвечающие серии (17), легко находятся в термодинамическом пределе, когда $L \rightarrow \infty$, $N, M \rightarrow \infty$ и при этом N/L^3 и M/L^3 стремятся к постоянным значениям. А именно, если при этом наборы $\{n\}$ и $\{n'\}$ так зависят от L , что для любой непрерывной функции $f(p)$ суммы

$$\frac{1}{L^3} \sum_p f(p) n_{ps}, \quad s = 1, 2,$$

имеют предел, равный

$$\frac{1}{(2\pi)^3} \int dp f(p) n_s(p),$$

то имеет место следующая асимптотика для скалярного произведения:

$$(\phi_{\{n'\}}, \phi_{\{n\}}) = \frac{(f^* f)^M (M!)^2}{\sqrt{2\pi S_2}} \exp(S_0) \prod_p \delta_{n_{p1}-n'_{p1}+n_{-p2}-n'_{-p2}} \times ((1 - \delta_{n_{p1}0} \delta_{n_{-p2}0} \delta_{n'_{-p2}1} \delta_{n'_{p1}1} - \delta_{n_{p1}1} \delta_{n_{-p2}1} \delta_{n'_{-p2}0} \delta_{n'_{p1}0}) + \delta_{n_{p1}0} \delta_{n_{-p2}0} \delta_{n'_{-p2}1} \delta_{n'_{p1}1} \tilde{\varphi}_p + \delta_{n_{p1}1} \delta_{n_{-p2}1} \delta_{n'_{-p2}0} \delta_{n'_{p1}0} \tilde{\varphi}_p^*), \quad (18)$$

где $\tilde{\varphi}_p = \varphi_p/f$, а константа f определяется из уравнения

$$M = \sum_p \frac{\tilde{\varphi}_p^* \tilde{\varphi}_p}{1 + \tilde{\varphi}_p^* \tilde{\varphi}_p} \delta_{n_{p1}0} \delta_{n_{-p2}0} \delta_{n'_{-p2}0} \delta_{n'_{p1}0} - \sum_p \delta_{n_{p1}0} \delta_{n_{-p2}0} \delta_{n'_{-p2}1} \delta_{n'_{p1}1} \quad (19)$$

и

$$S_0 = \sum_p \ln(1 + \tilde{\varphi}_p^* \tilde{\varphi}_p) \delta_{n_{p1}0} \delta_{n_{-p2}0} \delta_{n'_{-p2}0} \delta_{n'_{p1}0},$$

$$S_2 = \sum_p \frac{\tilde{\varphi}_p^* \tilde{\varphi}_p}{(1 + \tilde{\varphi}_p^* \tilde{\varphi}_p)^2} \delta_{n_{p1}0} \delta_{n_{-p2}0} \delta_{n'_{-p2}0} \delta_{n'_{p1}0}.$$

Если уравнение (19) не имеет решений, то матричный элемент (18) равен нулю.

Отметим теперь, что формальное выражение для оператора $\tilde{S}$ и в фермионном, и в бозонном случаях является расходящимся. Это связано с тем, что символ осредненной энтропии не является аналитическим функционалом. Однако в термодинамическом пределе эта расходимость может быть регуляризована. В частности, в рассматриваемом примере при ненулевой температуре после регуляризации система (14) принимает вид

$$\sum_{\{n'\}} C_{\{n'\}}(\phi_{\{n\}}, \hat{H} \phi_{\{n'\}}) = \lambda \sum_{\{n'\}} C_{\{n'\}}(\phi_{\{n\}}, \phi_{\{n'\}}) + S_{\{n\}} C_{\{n\}},$$

где

$$S_{\{n\}} = \frac{L^3}{(2\pi)^3} \int dp (\tilde{n}_1(p) \ln(\tilde{n}_1(p)) + (1 - \tilde{n}_1(p)) \ln(1 - \tilde{n}_1(p)) + \tilde{n}_2(p) \ln(\tilde{n}_2(p)) + (1 - \tilde{n}_2(p)) \ln(1 - \tilde{n}_2(p))),$$

$$\hat{n}_s(p) = G_s(p) + \frac{1}{2}(1 - G_1(p) - G_2(p) - Z(p)),$$

$$Z(p) = \sqrt{(1 - G_1(p) - G_2(p))^2 + 4R^*(p)R(p)},$$

а $G_1(p), G_2(p), R(p)$ являются пределами функций

$$G_{p1} = \delta_{n_{p1}1} + \delta_{n_{p1}0} \delta_{n_{-p2}0} \frac{\tilde{\varphi}_p^* \tilde{\varphi}_p}{1 + \tilde{\varphi}_p^* \tilde{\varphi}_p}, \quad G_{p2} = \delta_{n_{-p2}1} + \delta_{n_{p1}0} \delta_{n_{-p2}0} \frac{\tilde{\varphi}_p^* \tilde{\varphi}_p}{1 + \tilde{\varphi}_p^* \tilde{\varphi}_p},$$

$$R_p = \delta_{n_{p1}0} \delta_{n_{-p2}0} \frac{\tilde{\varphi}_p}{1 + \tilde{\varphi}_p^* \tilde{\varphi}_p},$$

определенных на решетке $(2\pi/L)\mathbb{Z}^3$ при стремлении шага решетки $2\pi/L$ к 0.

5. В разд. 4 мы заменили энтропию $\tilde{S}$ на регуляризованный оператор с помощью перехода к пуантилистической картине [6]. Для операторов, отвечающих

аналитическому символу, такая регуляризация в термодинамическом пределе не изменяет матричных элементов. Покажем это на примере гамильтониана (15).

Пусть $0 < \sigma < 1$. Введем пуантилистические функции $\tilde{G}_{ps}$ и $\tilde{R}_p$ следующим образом:

$$\tilde{G}_{ps} = \frac{1}{N^\sigma} \sum_q G_{qs} \theta((6\pi^2 N^\sigma)^{1/3}/L - |p - q|),$$

$$\tilde{R}_p = \frac{1}{N^\sigma} \sum_q R_p \theta((6\pi^2 N^\sigma)^{1/3}/L - |p - q|),$$

где $\theta(\cdot)$ — тета-функция Хевисайда. Рассмотрим средние значения

$$\frac{(\phi_{\{n\}}, \hat{H} \phi_{\{n\}})}{(\phi_{\{n\}}, \phi_{\{n\}})} \quad (20)$$

гамильтониана (15) на векторах (17). Воспользовавшись формулами (14), (16), (18), получим для (20) следующее выражение:

$$\left(\sum_p \sum_{s=1}^2 \varepsilon_p G_{ps} + \sum_{\substack{p,q \\ p \neq q}} \sum_{s=1}^2 (V_{pqqp} - V_{qpqq}) G_{ps} G_{qs} + \sum_{\substack{p,q \\ p \neq -q}} (V_{pqqp} + V_{qpqq}) G_{p1} G_{q2} \right. \\ \left. + \sum_{\substack{p,q \\ p \neq q}} (V_{p-p-qq} + V_{-ppq-q}) R_p^* R_q \right) \left(1 + O\left(\frac{1}{N}\right) \right). \quad (21)$$

Пусть коэффициенты V_{pqrt} в (15) таковы, что

$$V_{pqqp} - V_{qpqq} = V_1(p, q), \quad V_{pqqp} + V_{qpqq} = V_2(p, q), \quad V_{p-p-qq} + V_{-ppq-q} = V_3(p, q),$$

где $V_1(p, q)$, $V_2(p, q)$, $V_3(p, q)$ — непрерывные функции. Предположим, что функции на решетке G_{ps} и R_p таковы, что в пределе при $L \rightarrow \infty$ для любой непрерывной функции $f(p)$ имеют место соотношения

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L^3} \sum_p f(p) G_{ps} = \frac{1}{(2\pi)^3} \int dp f(p) G_s(p),$$

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L^3} \sum_p f(p) R_p = \frac{1}{(2\pi)^3} \int dp f(p) R(p).$$

В этом случае, очевидно, справедливо равенство

$$\left(\frac{(\phi_{\{n\}}, \hat{H} \phi_{\{n\}})}{(\phi_{\{n\}}, \phi_{\{n\}})} - \left(\sum_p \sum_{s=1}^2 \varepsilon_p \tilde{G}_{ps} + \sum_{\substack{p,q \\ p \neq q}} \sum_{s=1}^2 (V_{pqqp} - V_{qpqq}) \tilde{G}_{ps} \tilde{G}_{qs} \right. \right. \\ \left. \left. + \sum_{\substack{p,q \\ p \neq -q}} (V_{pqqp} + V_{qpqq}) \tilde{G}_{p1} \tilde{G}_{q2} + \sum_{\substack{p,q \\ p \neq q}} (V_{p-p-qq} + V_{-ppq-q}) \tilde{R}_p^* \tilde{R}_q \right) \right) L^{-3} = O\left(\frac{1}{N}\right).$$

Таким образом, при замене функций G_{ps} и R_p в (21) на пуантилистические функции $\tilde{G}_{ps}$ и $\tilde{R}_p$ асимптотика матричных элементов гамильтониана в пределе

не изменяется. Аналогично, в бозонном случае пуантилистическая регуляризация не изменяет матричные элементы операторов с гладким символом.

ЛИТЕРАТУРА

1. Маслов В. П. Проблема фазовых переходов в сверхтекучей и нормальной жидкостях. ТМФ, **121**, № 3, 492–508 (1999).
2. Маслов В. П. Об одном методе осреднения для квантовой задачи многих тел. Функц. анализ и его прил., **33**, вып. 4, 50–64 (1999).
3. Березин Ф. А. Метод вторичного квантования. Наука, М., 1986.
4. Маслов В. П. Операторные методы. Наука, М., 1973.
5. Маслов В. П. О способе осреднения для большого числа кластеров. Базовые переходы. ТМФ, **125**, № 2 (2000).
6. Maslov V. P. Deterministic quantum chaos for systems of bosons and fermions. Russian J. Math. Phys., **5**, No. 4, 473–488 (1998).

Московский государственный институт
электроники и математики

Поступило в редакцию
5 октября 2000 г.