Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Т. А. Суслина, Усреднение уравнений типа Шрёдингера,
Функци. анализ и его прил., 2016, том 50, выпуск 3, 90–96

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa3247>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.95.254.165

26 апреля 2023 г., 16:33:32

<http://arxiv.org/abs/0706.1034>. [3] A. Borodin, G. Olshanski, *Moscow Math. J.*, **13**:2 (2013), 191–230; <http://arxiv.org/abs/1110.4458>. [4] A. Borodin, G. Olshanski, *Electron. J. Probab.*, **18**:75 (2013), 1–43. [5] P. Desrosiers, M. Hallnäs, *SIGMA*, **8** (2012), paper 049 [6] S. N. Ethier, T. G. Kurtz, *Markov Processes. Characterization and convergence*, John Wiley & Sons, New York, 2005. [7] T. M. Liggett, *Continuous Time Markov processes: An Introduction*, Graduate Studies in Math., vol. 113, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2010. [8] G. Olshanski, *Зап. научн. сем. ПОМИ*, **378** (2010), 81–110; <http://arxiv.org/abs/1009.2037>. [9] G. Olshanski, *Int. Math. Res. Notices*, **2012**:16 (2012), 3615–3679; <http://arxiv.org/abs/1103.5848>. [10] L. Petrov, *J. Algebraic Combin.*, **38**:3 (2013), 663–720; <http://arxiv.org/abs/1111.3399>.

Институт проблем передачи информации
имени А. А. Харкевича РАН
Национальный исследовательский университет
«Высшая школа экономики»
e-mail: olsh2007@gmail.com

Поступила в редакцию
16 мая 2016 г.

УДК 517.956.2

Усреднение уравнений типа Шрёдингера*

© 2016. Т. А. СУСЛИНА

Работа относится к теории усреднений (гомогенизации) периодических дифференциальных операторов (ДО); см., например, книгу [1].

1. Класс операторов. Пусть Γ — решетка в $\mathbb{R}^d$, Ω — элементарная ячейка решетки Γ . Для всякой Γ -периодической функции $\varphi(\mathbf{x})$ положим $\varphi^\varepsilon(\mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x}/\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$. В $L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$ изучаются матричные эллиптические ДО вида

$$A_\varepsilon = b(\mathbf{D})^* g^\varepsilon(\mathbf{x}) b(\mathbf{D}), \quad \varepsilon > 0. \quad (1)$$

Здесь $g(\mathbf{x})$ — эрмитова Γ -периодическая $(m \times m)$ -матрица-функция, причем $g, g^{-1} \in L_\infty$ и $g(\mathbf{x}) > 0$. Далее, $\mathbf{D} = -i\nabla$, $b(\mathbf{D}) = \sum_{l=1}^d b_l D_l$, где b_l — постоянные $(m \times n)$ -матрицы, причем $m \geq n$. Для символа $b(\boldsymbol{\xi}) = \sum_{l=1}^d b_l \xi_l$ предполагается, что $\text{rank } b(\boldsymbol{\xi}) = n$ при $0 \neq \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^d$. Строгое определение оператора (1) дается через квадратичную форму $a_\varepsilon[\mathbf{u}, \mathbf{u}] = (g^\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{u}, b(\mathbf{D})\mathbf{u})_{L_2(\mathbb{R}^d)}$, $\mathbf{u} \in H^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$.

Изучаются также более общие операторы вида

$$\tilde{A}_\varepsilon = (f^\varepsilon(\mathbf{x}))^* b(\mathbf{D})^* g^\varepsilon(\mathbf{x}) b(\mathbf{D}) f^\varepsilon(\mathbf{x}), \quad \varepsilon > 0, \quad (2)$$

где $f(\mathbf{x})$ есть Γ -периодическая $(n \times n)$ -матрица-функция, причем $f, f^{-1} \in L_\infty$.

2. Операторные оценки погрешности. В работах [2]–[4] был предложен и развит теоретико-операторный подход к эллиптическим задачам усреднения для операторов вида (1), (2). В [2] показано, что при $\varepsilon \rightarrow 0$ резольвента оператора A_ε сходится к резольвенте эффективного оператора A^0 с постоянными коэффициентами по операторной норме в $L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$, причем

$$\|(A_\varepsilon + I)^{-1} - (A^0 + I)^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq C\varepsilon. \quad (3)$$

*Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 16-01-00087).

Более точные аппроксимации резольвенты при учете корректора по операторным $(L_2 \rightarrow L_2)$ - и $(L_2 \rightarrow H^1)$ -нормам были получены в [3] и [4] соответственно.

К параболическим задачам усреднения теоретико-операторный подход применялся в [5]–[9]. В [5], [6] было показано, что

$$\|e^{-A_\varepsilon \tau} - e^{-A^0 \tau}\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq C\varepsilon(\tau + \varepsilon^2)^{-1/2}, \quad \tau > 0. \quad (4)$$

Более точные аппроксимации полугруппы найдены в [7]–[9]. Аналогичные (но более сложные) аппроксимации были найдены в указанных работах и для резольвенты или полугруппы оператора (2).

Оценки вида (3), (4) называют *операторными оценками погрешности*. Они имеют точный порядок; постоянные явно контролируются в терминах данных задачи. Метод основан на применении масштабного преобразования, теории Флоке–Блоха и аналитической теории возмущений. Другой подход к операторным оценкам погрешности был предложен в работах [10], [11].

В отличие от эллиптических и параболических задач усреднения, операторные оценки погрешности для уравнений типа Шрёдингера и гиперболического типа изучены недостаточно полно. В [12] были получены аппроксимации операторов $e^{-iA_\varepsilon \tau}$ и $\cos(A_\varepsilon^{1/2} \tau)$. Оказывается, что для этих операторов получить приближения по операторной $(L_2 \rightarrow L_2)$ -норме невозможно, и приходится рассматривать $(H^s \rightarrow L_2)$ -норму (где $s > 0$). Остановимся снова на случае оператора (1) и ограничимся формулировкой результата для операторной экспоненты:

$$\|e^{-iA_\varepsilon \tau} - e^{-iA^0 \tau}\|_{H^3(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq (C' + C''|\tau|)\varepsilon. \quad (5)$$

С помощью интерполяции с очевидной оценкой $\|e^{-iA_\varepsilon \tau} - e^{-iA^0 \tau}\|_{L_2 \rightarrow L_2} \leq 2$ можно получить оценку порядка $O(\varepsilon^{s/3})$ для нормы $\|e^{-iA_\varepsilon \tau} - e^{-iA^0 \tau}\|_{H^s \rightarrow L_2}$ при $0 \leq s \leq 3$. Аналогичные результаты получены в [12] для окаймленной экспоненты $f^\varepsilon e^{-i\tilde{A}_\varepsilon \tau} (f^\varepsilon)^{-1}$ от более общего оператора (2); см. (13) ниже.

В настоящей заметке представлены новые результаты об операторной экспоненте. С одной стороны, выяснено, что оценка (5) в общем случае неулучшаема в отношении типа операторной нормы. С другой стороны, выделены условия, при которых результат можно усилить. Сначала мы опишем результаты для оператора (1), а затем остановимся на обобщениях на случай оператора (2).

3. Эффективный оператор. Пусть $(n \times m)$ -матрица-функция $\Lambda(\mathbf{x})$ является (слабым) Γ -периодическим решением задачи $b(\mathbf{D})^* g(\mathbf{x})(b(\mathbf{D})\Lambda(\mathbf{x}) + \mathbf{1}_m) = 0$, $\int_\Omega \Lambda(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 0$. *Эффективная матрица* g^0 размера $m \times m$ определена выражением $g^0 = |\Omega|^{-1} \int_\Omega \tilde{g}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$, где $\tilde{g}(\mathbf{x}) := g(\mathbf{x})(b(\mathbf{D})\Lambda(\mathbf{x}) + \mathbf{1}_m)$. Оказывается, что матрица g^0 положительна. Оператор $A^0 = b(\mathbf{D})^* g^0 b(\mathbf{D})$ с областью определения $H^2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$ называется *эффективным оператором* для оператора (1).

4. Разложение оператора A в прямой интеграл. Пороговые аппроксимации. С помощью унитарного преобразования Гельфанда оператор A , заданный выражением (1) при $\varepsilon = 1$, допускает разложение в прямой интеграл $\int_{\tilde{\Omega}} \oplus A(\mathbf{k}) d\mathbf{k}$, где $\tilde{\Omega}$ — центральная зона Бриллюэна решетки $\tilde{\Gamma}$, двойственной к Γ . Параметр $\mathbf{k}$ называют *квазиимпульсом*. Оператор $A(\mathbf{k})$ действует в пространстве $L_2(\Omega; \mathbb{C}^n)$ и задается дифференциальным выражением $A(\mathbf{k}) = b(\mathbf{D} + \mathbf{k})^* g(\mathbf{x}) b(\mathbf{D} + \mathbf{k})$ при периодических граничных условиях. (Строгое определение дается через соответствующую квадратичную форму.)

Спектр оператора $A(\mathbf{k})$ дискретен. Мы применяем соображения теории возмущений, рассматривая $A(0)$ как невозмущенный оператор и $A(\mathbf{k})$ (при достаточно малом $|\mathbf{k}|$) как возмущенный оператор. Очевидно, точка $\lambda = 0$ является собственным значением оператора $A(0)$ кратности n , причем $\mathfrak{N} := \text{Ker } A(0) = \{\mathbf{u} \in L_2(\Omega; \mathbb{C}^n) : \mathbf{u} = \mathbf{c}, \mathbf{c} \in \mathbb{C}^n\}$. Через P обозначим ортопроектор пространства $L_2(\Omega; \mathbb{C}^n)$ на $\mathfrak{N}$. При $|\mathbf{k}| \leq t^0$ оператор $A(\mathbf{k})$ имеет ровно n собственных значений (с учетом кратностей) на промежутке $[0, \delta]$, а промежутки $(\delta, 3\delta)$ свободен от спектра. (Числа δ и t^0 допускают явный контроль.)

Положим $\mathbf{k} = t\boldsymbol{\theta}$, где $t := |\mathbf{k}|$, $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^{d-1}$. В силу аналитической теории возмущений (см. [13]) при $t \leq t^0$ существуют вещественно-аналитические (по t) ветви собственных значений $\lambda_l(t; \boldsymbol{\theta})$ и собственных векторов $\varphi_l(t; \boldsymbol{\theta})$ оператора $A(\mathbf{k}) = A(t; \boldsymbol{\theta})$, $l = 1, \dots, n$. При этом векторы $\varphi_l(t; \boldsymbol{\theta})$, $l = 1, \dots, n$, образуют ортонормированный базис в собственном подпространстве $\mathfrak{F}(t; \boldsymbol{\theta})$ оператора $A(t; \boldsymbol{\theta})$, отвечающем промежутку $[0, \delta]$. При малом t справедливы сходящиеся степенные разложения

$$\lambda_l(t; \boldsymbol{\theta}) = \gamma_l(\boldsymbol{\theta})t^2 + \mu_l(\boldsymbol{\theta})t^3 + \dots, \quad l = 1, \dots, n, \quad \gamma_l(\boldsymbol{\theta}) \geq 0, \quad \mu_l(\boldsymbol{\theta}) \in \mathbb{R}, \quad (6)$$

$$\varphi_l(t; \boldsymbol{\theta}) = \omega_l(\boldsymbol{\theta}) + t\psi_l(\boldsymbol{\theta}) + \dots, \quad l = 1, \dots, n. \quad (7)$$

Из вариационных оценок для собственных значений легко вывести, что $\gamma_l(\boldsymbol{\theta}) \geq c_* > 0$. «Зародыши» $\omega_l(\boldsymbol{\theta})$, $l = 1, \dots, n$, образуют ортонормированный базис в подпространстве $\mathfrak{N}$. Матрицу $S(\boldsymbol{\theta}) = b(\boldsymbol{\theta})^* g^0 b(\boldsymbol{\theta})$ (символ эффективного оператора A^0) называют *спектральным ростком* операторного семейства $A(t; \boldsymbol{\theta})$ при $t = 0$. Оказывается (см. [2, гл. 1]), что числа $\gamma_l(\boldsymbol{\theta})$ и элементы $\omega_l(\boldsymbol{\theta})$ являются собственными значениями и собственными элементами роста:

$$S(\boldsymbol{\theta})\omega_l(\boldsymbol{\theta}) = \gamma_l(\boldsymbol{\theta})\omega_l(\boldsymbol{\theta}), \quad l = 1, \dots, n.$$

Помимо степенных разложений (6), (7) важную роль для нас играют *пороговые аппроксимации* для ортопроектора $F(t, \boldsymbol{\theta})$ на $\mathfrak{F}(t, \boldsymbol{\theta})$ и для оператора $A(t, \boldsymbol{\theta})F(t, \boldsymbol{\theta})$. В работе [2] были получены оценки

$$\|F(t, \boldsymbol{\theta}) - P\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \leq C_1 t, \quad t \leq t^0, \quad (8)$$

$$\|A(t, \boldsymbol{\theta})F(t, \boldsymbol{\theta}) - t^2 S(\boldsymbol{\theta})P\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \leq C_2 t^3, \quad t \leq t^0. \quad (9)$$

Более точная пороговая аппроксимация была найдена в [3]:

$$\|A(t, \boldsymbol{\theta})F(t, \boldsymbol{\theta}) - t^2 S(\boldsymbol{\theta})P - t^3 K(\boldsymbol{\theta})\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \leq C_3 t^4, \quad t \leq t^0. \quad (10)$$

Оператор $K(\boldsymbol{\theta})$ допускает описание как в инвариантных терминах, так и в терминах коэффициентов разложений (6), (7). Для наших целей достаточно описать лишь блок оператора $K(\boldsymbol{\theta})$ в подпространстве $\mathfrak{N}$, т. е. оператор $N(\boldsymbol{\theta}) := PK(\boldsymbol{\theta})P$. В инвариантных терминах имеем $N(\boldsymbol{\theta}) = b(\boldsymbol{\theta})^* L(\boldsymbol{\theta})b(\boldsymbol{\theta})$, где $L(\boldsymbol{\theta}) := |\Omega|^{-1} \int_{\Omega} (\Lambda(\mathbf{x})^* b(\boldsymbol{\theta})^* \tilde{g}(\mathbf{x}) + \tilde{g}(\mathbf{x})^* b(\boldsymbol{\theta}) \Lambda(\mathbf{x})) d\mathbf{x}$. В терминах коэффициентов степенных разложений: $N(\boldsymbol{\theta}) = N_0(\boldsymbol{\theta}) + N_*(\boldsymbol{\theta})$, где первый член справа диагонален в базисе $\omega_1(\boldsymbol{\theta}), \dots, \omega_n(\boldsymbol{\theta})$ и имеет вид

$$N_0(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{l=1}^n \mu_l(\boldsymbol{\theta}) (\cdot, \omega_l(\boldsymbol{\theta}))_{L_2(\Omega)} \omega_l(\boldsymbol{\theta}),$$

а второй член $N_*(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{l=1}^n \gamma_l(\boldsymbol{\theta}) ((\cdot, P\psi_l(\boldsymbol{\theta}))_{L_2(\Omega)} \omega_l(\boldsymbol{\theta}) + (\cdot, \omega_l(\boldsymbol{\theta}))_{L_2(\Omega)} P\psi_l(\boldsymbol{\theta}))$ имеет нулевые диагональные элементы в этом базисе.

5. Основные результаты для оператора (1). Первый результат — это усиление оценки (5) при дополнительном предположении $N(\boldsymbol{\theta}) \equiv 0$.

Теорема 1. Пусть $N(\boldsymbol{\theta}) = 0$ при всяком $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^{d-1}$. Тогда

$$\|e^{-iA_\varepsilon\tau} - e^{-iA^0\tau}\|_{H^2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq (C_1 + C_2|\tau|)\varepsilon, \quad \varepsilon > 0, \tau \in \mathbb{R}. \quad (11)$$

Известны случаи (см. [3, §4]), когда условие теоремы 1 заведомо выполнено.

Следствие 2. Пусть $A_\varepsilon = \mathbf{D}^* g^\varepsilon(\mathbf{x}) \mathbf{D}$, где $g(\mathbf{x})$ — симметричная матрица с вещественными элементами. Тогда $N(\boldsymbol{\theta}) = 0$, $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^{d-1}$, и выполнено неравенство (11).

Более тонкий результат (при $n \geq 2$) дает следующая теорема.

Теорема 3. Пусть $N_0(\boldsymbol{\theta}) = 0$ при всяком $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^{d-1}$, т.е. $\mu_l(\boldsymbol{\theta}) \equiv 0$, $l = 1, \dots, n$. Дополнительно предположим, что число p различных собственных значений спектрального ростка $S(\boldsymbol{\theta})$ не зависит от $\boldsymbol{\theta}$. Тогда справедлива оценка вида (11).

Очевидно, что второе условие теоремы выполнено в случае, когда спектр ростка $S(\boldsymbol{\theta})$ простой. Из теоремы 3 нетрудно вывести следующее утверждение.

Следствие 4. Предположим, что $g(\mathbf{x})$ и $b(\boldsymbol{\theta})$ — матрицы с вещественными элементами. Предположим, что спектр ростка $S(\boldsymbol{\theta})$ простой при всех $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^{d-1}$. Тогда $N_0(\boldsymbol{\theta}) = 0$ при всяком $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^{d-1}$ и выполнена оценка (11).

В условиях теорем 1 или 3 можно применить интерполяцию и получить оценку порядка $O(\varepsilon^{s/2})$ для нормы $\|e^{-iA_\varepsilon\tau} - e^{-iA^0\tau}\|_{H^s \rightarrow L_2}$ при $0 \leq s \leq 2$.

Наконец, мы подтверждаем, что в общем случае оценку (5) усилить нельзя.

Теорема 5. Пусть $N_0(\boldsymbol{\theta}_0) \neq 0$ при некотором $\boldsymbol{\theta}_0 \in \mathbb{S}^{d-1}$. Пусть $\tau \neq 0$ и $s < 3$. Тогда не существует такой постоянной $C(\tau) > 0$, чтобы неравенство $\|e^{-iA_\varepsilon\tau} - e^{-iA^0\tau}\|_{H^s(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq C(\tau)\varepsilon$ выполнялось при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$.

Построены примеры операторов, удовлетворяющих условию теоремы 5. Один пример (см. [3, п. 10.4]) — это оператор вида $A_\varepsilon = \mathbf{D}^* g^\varepsilon(\mathbf{x}) \mathbf{D}$, где $g(\mathbf{x})$ — эрмитова матрица с комплексными элементами. Другой пример (см. [14, пример 8.7]) относится к классу матричных операторов с вещественными коэффициентами.

6. Метод. Поясним метод исследования. После масштабного преобразования и разложения в прямой интеграл оценка нормы $\|e^{-iA_\varepsilon\tau} - e^{-iA^0\tau}\|_{H^s \rightarrow L_2}$ оказывается равносильной оценке операторной нормы в пространстве $L_2(\Omega; \mathbb{C}^n)$ оператора $e^{-i\varepsilon^{-2}\tau A(\mathbf{k})} - e^{-i\varepsilon^{-2}\tau A^0(\mathbf{k})}$, домноженного на «сглаживающий оператор» $\varepsilon^s (H_0(\mathbf{k}) + \varepsilon^2)^{-s/2}$. Здесь $H_0(\mathbf{k}) = |\mathbf{D} + \mathbf{k}|^2$ при периодических граничных условиях. Легко видеть, что (если $s \geq 1$) достаточно получить нужную оценку лишь при $|\mathbf{k}| \leq t^0$. Выясняется, что основная проблема состоит в оценке композиции упомянутого оператора с проектором P . При этом операторы $A^0(\mathbf{k})$ и $H_0(\mathbf{k})$ переходят в умножение на символы, и речь идет об оценке оператора $J(t, \boldsymbol{\theta}, \varepsilon, \tau) := (e^{-i\varepsilon^{-2}\tau A(t; \boldsymbol{\theta})} - e^{-i\varepsilon^{-2}\tau A^0(t; \boldsymbol{\theta})})P$, домноженного на «сглаживающий множитель» $\varepsilon^s (t^2 + \varepsilon^2)^{-s/2}$. Оператор $J(t, \boldsymbol{\theta}, \varepsilon, \tau)$ допускает представление в виде суммы двух слагаемых. Первое, $(e^{-i\varepsilon^{-2}\tau A(t; \boldsymbol{\theta})}(P - F(t, \boldsymbol{\theta})) - (P - F(t, \boldsymbol{\theta}))e^{-i\varepsilon^{-2}\tau A^0(t; \boldsymbol{\theta})})P$,

удается оценить с помощью (8). Второе слагаемое допускает представление

$$\varepsilon^{-2} \int_0^\tau e^{-i\varepsilon^{-2}(\tau-\tilde{\tau})A(t;\boldsymbol{\theta})} F(t;\boldsymbol{\theta}) (A(t;\boldsymbol{\theta})F(t;\boldsymbol{\theta}) - t^2 S(\boldsymbol{\theta})P) e^{-i\varepsilon^{-2}\tilde{\tau}t^2 S(\boldsymbol{\theta})} P d\tilde{\tau}. \quad (12)$$

Оно анализируется с помощью оценки (9) или более точной аппроксимации (10). В общем случае при $s = 3$ мы получаем

$$\begin{aligned} \|(e^{-i\varepsilon^{-2}\tau A(t;\boldsymbol{\theta})} - e^{-i\varepsilon^{-2}\tau t^2 S(\boldsymbol{\theta})})P\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \varepsilon^3 (t^2 + \varepsilon^2)^{-3/2} \\ \leq (2C_1 t + C_2 \varepsilon^{-2} t^3 |\tau|) \varepsilon^3 (t^2 + \varepsilon^2)^{-3/2} \leq (C_1 + C_2 |\tau|) \varepsilon, \end{aligned}$$

что приводит к оценке (5). Если опираться на более точную аппроксимацию (10), то при дополнительных предположениях удастся лучше оценить интегральный член (12), что позволяет взять $s = 2$. При этом для доказательства теоремы 3 дополнительно требуется разбивать собственные значения оператора $A(t;\boldsymbol{\theta})$ на p кластеров и получать пороговые аппроксимации для каждого кластера. Условие о независимости кратности спектра оператора $S(\boldsymbol{\theta})$ от $\boldsymbol{\theta}$ позволяет провести оценки равномерно относительно этого параметра.

7. Обобщение на оператор вида (2). Положим $Q(\mathbf{x}) := (f(\mathbf{x})f(\mathbf{x})^*)^{-1}$, $\overline{Q} := |\Omega|^{-1} \int_\Omega Q(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$, $f_0 := (\overline{Q})^{-1/2}$, $\tilde{A}^0 = f_0 b(\mathbf{D})^* g^0 b(\mathbf{D}) f_0$. В [12] был получен следующий аналог оценки (5):

$$\|f^\varepsilon e^{-i\tilde{A}_\varepsilon \tau} (f^\varepsilon)^{-1} - f_0 e^{-i\tilde{A}^0 \tau} f_0^{-1}\|_{H^3(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq (\tilde{C}' + \tilde{C}'' |\tau|) \varepsilon. \quad (13)$$

Введем объекты, необходимые для формулировки новых результатов. Рассмотрим оператор $\tilde{A}(\mathbf{k})$ в $L_2(\Omega; \mathbb{C}^n)$, заданный дифференциальным выражением $\tilde{A}(\mathbf{k}) = f(\mathbf{x})^* b(\mathbf{D} + \mathbf{k})^* g(\mathbf{x}) b(\mathbf{D} + \mathbf{k}) f(\mathbf{x})$ при периодических граничных условиях. Тогда $\tilde{\mathfrak{N}} := \text{Ker } \tilde{A}(0) = \{\mathbf{u} \in L_2(\Omega; \mathbb{C}^n) : f\mathbf{u} = \mathbf{c} \in \mathbb{C}^n\}$. При $t \leq \tilde{t}^0$ существуют вещественно-аналитические ветви собственных значений $\tilde{\lambda}_l(t; \boldsymbol{\theta})$ и собственных векторов $\tilde{\varphi}_l(t; \boldsymbol{\theta})$ оператора $\tilde{A}(\mathbf{k}) = \tilde{A}(t; \boldsymbol{\theta})$, $l = 1, \dots, n$. При этом векторы $\tilde{\varphi}_l(t; \boldsymbol{\theta})$, $l = 1, \dots, n$, образуют ортонормированный базис в собственном подпространстве оператора $\tilde{A}(t; \boldsymbol{\theta})$, отвечающем промежутку $[0, \tilde{\delta}]$. (Числа $\tilde{\delta}$ и $\tilde{t}^0$ контролируются явно.) При малом t справедливы сходящиеся степенные разложения $\tilde{\lambda}_l(t; \boldsymbol{\theta}) = \tilde{\gamma}_l(\boldsymbol{\theta}) t^2 + \tilde{\mu}_l(\boldsymbol{\theta}) t^3 + \dots$, $\tilde{\varphi}_l(t; \boldsymbol{\theta}) = \tilde{\omega}_l(\boldsymbol{\theta}) + t \tilde{\psi}_l(\boldsymbol{\theta}) + \dots$, $l = 1, \dots, n$. Выясняется, что числа $\tilde{\gamma}_l(\boldsymbol{\theta})$ и элементы $\zeta_l(\boldsymbol{\theta}) = f \tilde{\omega}_l(\boldsymbol{\theta}) \in \mathbb{C}^n$ являются собственными значениями и собственными векторами следующей обобщенной спектральной задачи для ростка $S(\boldsymbol{\theta})$:

$$S(\boldsymbol{\theta}) \zeta_l(\boldsymbol{\theta}) = \tilde{\gamma}_l(\boldsymbol{\theta}) \overline{Q} \zeta_l(\boldsymbol{\theta}), \quad l = 1, \dots, n. \quad (14)$$

Пусть $\tilde{\Lambda}$ есть Γ -периодическое решение задачи $b(\mathbf{D})^* g(\mathbf{x}) (b(\mathbf{D}) \tilde{\Lambda}(\mathbf{x}) + \mathbf{1}_m) = 0$, $\int_\Omega Q(\mathbf{x}) \tilde{\Lambda}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 0$. Введем оператор $\tilde{N}(\boldsymbol{\theta}) = b(\boldsymbol{\theta})^* \tilde{L}(\boldsymbol{\theta}) b(\boldsymbol{\theta})$, где $\tilde{L}(\boldsymbol{\theta}) := |\Omega|^{-1} \int_\Omega (\tilde{\Lambda}(\mathbf{x})^* b(\boldsymbol{\theta})^* \tilde{g}(\mathbf{x}) + \tilde{g}(\mathbf{x})^* b(\boldsymbol{\theta}) \tilde{\Lambda}(\mathbf{x})) d\mathbf{x}$. Наконец, определим оператор

$$\tilde{N}_0(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{l=1}^n \tilde{\mu}_l(\boldsymbol{\theta}) (\cdot, \overline{Q} \zeta_l(\boldsymbol{\theta}))_{L_2(\Omega)} \overline{Q} \zeta_l(\boldsymbol{\theta}).$$

Справедливы следующие обобщения результатов разд. 5.

Теорема 6. Пусть $\tilde{N}(\theta) = 0$ при всяком $\theta \in \mathbb{S}^{d-1}$. Тогда

$$\|f^\varepsilon e^{-i\tilde{A}_\varepsilon \tau} (f^\varepsilon)^{-1} - f_0 e^{-i\tilde{A}^0 \tau} f_0^{-1}\|_{H^2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq (\tilde{C}_1 + \tilde{C}_2 |\tau|) \varepsilon, \quad \varepsilon > 0, \tau \in \mathbb{R}. \quad (15)$$

Следствие 7. Пусть $\tilde{A}_\varepsilon = (f^\varepsilon)^* \mathbf{D}^* g^\varepsilon \mathbf{D} f^\varepsilon$, где $g(\mathbf{x})$ — симметричная матрица с вещественными элементами. Тогда $\tilde{N}(\theta) \equiv 0$ и выполнено (15).

Теорема 8. Пусть $\tilde{N}_0(\theta) = 0$ при всяком $\theta \in \mathbb{S}^{d-1}$ (т.е. $\tilde{\mu}_l(\theta) \equiv 0$, $l = 1, \dots, n$). Дополнительно предположим, что число p различных собственных значений задачи (14) не зависит от θ . Тогда справедлива оценка вида (15).

Следствие 9. Предположим, что $g(\mathbf{x})$, $Q(\mathbf{x})$ и $b(\theta)$ — матрицы с вещественными элементами. Предположим, что спектр задачи (14) простой при всех $\theta \in \mathbb{S}^{d-1}$. Тогда $\tilde{N}_0(\theta) \equiv 0$ и выполнено (15).

Теорема 10. Пусть $\tilde{N}_0(\theta_0) \neq 0$ при некотором $\theta_0 \in \mathbb{S}^{d-1}$. Пусть $\tau \neq 0$ и $s < 3$. Тогда не существует такой постоянной $C(\tau) > 0$, чтобы неравенство $\|f^\varepsilon e^{-i\tilde{A}_\varepsilon \tau} (f^\varepsilon)^{-1} - f_0 e^{-i\tilde{A}^0 \tau} f_0^{-1}\|_{H^s(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq C(\tau) \varepsilon$ выполнялось при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$.

8. Приложения. Результаты можно применить к вопросу о поведении решения $\mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x}, \tau)$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$, $\tau \in \mathbb{R}$, задачи Коши для уравнения типа Шрёдингера:

$$i\partial_\tau \mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x}, \tau) = \tilde{A}_\varepsilon \mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x}, \tau), \quad f^\varepsilon(\mathbf{x}) \mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x}, 0) = \phi(\mathbf{x}). \quad (16)$$

где $\phi \in L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$. Решение представимо в виде $\mathbf{u}_\varepsilon(\cdot, \tau) = e^{-i\tau \tilde{A}_\varepsilon} (f^\varepsilon)^{-1} \phi$. Рассмотрим усредненную задачу

$$i\partial_\tau \mathbf{u}_0(\mathbf{x}, \tau) = \tilde{A}^0 \mathbf{u}_0(\mathbf{x}, \tau), \quad f_0 \mathbf{u}_0(\mathbf{x}, 0) = \phi(\mathbf{x}). \quad (17)$$

Тогда $\mathbf{u}_0(\cdot, \tau) = e^{-i\tau \tilde{A}^0} f_0^{-1} \phi$. Из представлений для решений задач (16), (17), применяя оценку (13), теоремы 6 и 8, а также интерполяционные соображения и теорему Банаха–Штейнгауза, легко вывести следующие результаты.

Теорема 11. Пусть $\mathbf{u}_\varepsilon$ и $\mathbf{u}_0$ — решения задач (16) и (17) соответственно.

1. Если $\phi \in H^s(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$ при некотором $0 \leq s \leq 3$, то

$$\|f^\varepsilon \mathbf{u}_\varepsilon(\cdot, \tau) - f_0 \mathbf{u}_0(\cdot, \tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leq C_s(\tau) \varepsilon^{s/3} \|\phi\|_{H^s(\mathbb{R}^d)}, \quad \varepsilon > 0, \tau \in \mathbb{R}, \quad (18)$$

где $C_s(\tau) = (2\|f\|_{L_\infty} \|f^{-1}\|_{L_\infty})^{1-s/3} (\tilde{C}' + \tilde{C}'' |\tau|)^{s/3}$. Если $\phi \in L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$, то левая часть неравенства (18) стремится к нулю при $\varepsilon \rightarrow 0$.

2. Если выполнены условия теоремы 6 или теоремы 8 и $\phi \in H^s(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$ при некотором $0 \leq s \leq 2$, то

$$\|f^\varepsilon \mathbf{u}_\varepsilon(\cdot, \tau) - f_0 \mathbf{u}_0(\cdot, \tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leq C_s(\tau) \varepsilon^{s/2} \|\phi\|_{H^s(\mathbb{R}^d)}, \quad \varepsilon > 0, \tau \in \mathbb{R},$$

где $C_s(\tau) = (2\|f\|_{L_\infty} \|f^{-1}\|_{L_\infty})^{1-s/2} (\tilde{C}_1 + \tilde{C}_2 |\tau|)^{s/2}$.

Примером применения общих результатов является оператор Шрёдингера с сильно сингулярным потенциалом $H_\varepsilon = \mathbf{D}^* \check{g}^\varepsilon(\mathbf{x}) \mathbf{D} + \varepsilon^{-2} V^\varepsilon(\mathbf{x})$ (коэффициенты вещественные). Оператор H_ε допускает факторизацию вида (2) (см. [2, §11]). Применимы следствие 7 и теорема 11, п. 2. Другим примером является двумерный оператор Паули с сингулярным магнитным потенциалом (см. [2, §12]), для которого в общем случае нет усиления результатов (см. [14, пример 16.2]).

Подробное изложение результатов можно найти в препринте [14]. Аналогичные результаты получены для гиперболических уравнений в [15].

ЛИТЕРАТУРА

- [1] В. В. Жиков, С. М. Козлов, О. А. Олейник, *Усреднение дифференциальных операторов*, Наука, М., 1993. [2] М. Ш. Бирман, Т. А. Суслина, *Алгебра и анализ*, **15**:5 (2003), 1–108. [3] М. Ш. Бирман, Т. А. Суслина, *Алгебра и анализ*, **17**:6 (2005), 1–104. [4] М. Ш. Бирман, Т. А. Суслина, *Алгебра и анализ*, **18**:6 (2006), 1–130. [5] Т. А. Суслина, *Функц. анализ и его прил.*, **38**:4 (2004), 86–90. [6] Т. А. Suslina, in: *Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2*, vol. 220, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2007, 201–233. [7] Т. А. Suslina, *Math. Model. Nat. Phenom.*, **5**:4 (2005), 390–447. [8] Е. С. Василевская, *Алгебра и анализ*, **21**:1 (2009), 3–60. [9] Е. С. Василевская, Т. А. Суслина, *Алгебра и анализ*, **24**:2 (2012), 1–103. [10] V. V. Zhikov, S. E. Pastukhova, *Russ. J. Math. Phys.*, **12**:4 (2005), 515–524. [11] V. V. Zhikov, S. E. Pastukhova, *Russ. J. Math. Phys.*, **13**:2 (2006), 224–237. [12] М. Ш. Бирман, Т. А. Суслина, *Алгебра и анализ*, **20**:6 (2008), 30–107. [13] Т. Като, *Теория возмущений линейных операторов*, Мир, М., 1972. [14] Т. А. Suslina, *Homogenization of nonstationary Schrodinger type equations with periodic coefficients*, <http://arxiv.org/abs/1508.07641>. [15] М. А. Дородный, Т. А. Суслина, *Функц. анализ и его прил.*, 2016, готовится к печати.

Санкт-Петербургский государственный университет
e-mail: t.suslina@spbu.ru

Поступила в редакцию
10 мая 2016 г.

Заведующая редакцией и научный редактор Г. М. Цукерман

Подписано к печати 25.07.2016. Дата выхода в свет 20.08.2016. Формат 70 × 100/16
Печать цифровая. Усл. печ. л. 7,8. Усл. кр.-отт. 1,1 тыс. Бум. л. 3,0
Уч.-изд. л. 8,0. Тираж 123 экз. Заказ 385.

Учредитель: Российская академия наук
Математический институт им. В. А. Стеклова РАН

Адрес редакции: 119991 Москва, ГСП-1, ул. Губкина 8, комн. 624. Тел. (499) 941-01-88
Издатель: Российская академия наук, ФГУП «Академиздатцентр «Наука»,
117997 Москва, Профсоюзная, ул. 90
Отпечатано в ФГУП «Академиздатцентр «Наука» («Типография «Наука»),
121099 Москва, Шубинский пер., 6