Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. И. Зубов, Проекции орбитальных мер для классических групп Ли, *Функц. анализ и его прил.*, 2016, том 50, выпуск 3, 76–81

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa3250>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.147.182.235

26 апреля 2023 г., 17:58:40

А. Г. Хованский, УМН, **31:3** (1976), 201–202. [3] I. M. Gelfand, M. M. Kapranov, A. V. Zelevinsky, *Discriminants, Resultants, and Multidimensional Determinants*, Birkhäuser, Boston, 1994. [4] V. A. Vassiliev, *Applied Picard–Lefschetz theory*, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2002. [5] V. A. Vassiliev, *Arnold Math. J.*, **1:2** (2015), 201–210.

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН
Национальный исследовательский университет
«Высшая школа экономики»
e-mail: vva@mi.ras.ru

Поступила в редакцию
19 мая 2016 г.

УДК 512.81

Проекции орбитальных мер для классических групп Ли*

© 2016. Д. И. ЗУБОВ

1. Введение. Пусть G_n является какой-либо компактной группой Ли из следующего списка: $SO(2n+1)$, $Sp(2n)$, $O(2n)$. Рассмотрим присоединенное действие группы G_n на ее алгебре Ли $\mathfrak{g}_n$ сопряжениями. Так как группа G_n компактна, то на каждой орбите такого действия задана единственная G_n -инвариантная вероятностная мера, которую мы будем называть *орбитальной мерой*.

Всякая орбита может быть параметризована набором $X = (x_1 \leq \dots \leq x_n)$, $x_1 \geq 0$, из n слабо возрастающих чисел, являющихся собственными значениями матрицы из $\mathfrak{g}_n$. Мы будем обозначать через $\mathcal{X}_n$ множество таких наборов.

Рассмотрим естественную проекцию $p_k^n: \mathfrak{g}_n \rightarrow \mathfrak{g}_k$. Пусть μ_X есть G_n -орбитальная мера; тогда мера $p_k^n(\mu_X)$ является G_k -инвариантной мерой. Всякая инвариантная мера может быть представлена в виде непрерывной смеси орбитальных мер: для всякого борелевского множества $S \in \mathfrak{g}_k$ справедливо равенство

$$p_k^n(\mu_X)(S) = \int_{Y \in \mathcal{X}_k} \mu_Y^{(k)}(S) \cdot \nu_{X,k}(dY),$$

где $\mu_Y^{(k)}$, $Y \in \mathcal{X}_k$, суть G_k -орбитальные меры, а мера $\nu_{X,k}$ — некоторая вероятностная мера на $\mathcal{X}_k$.

Мера $\nu_{X,k}$ называется *радиальной частью* меры $p_k^n(\mu_X)$. В случае унитарной группы $U(n)$ мера $\nu_{X,k}$ была вычислена в работах Ольшанского [4] и Фаро [2]. С помощью метода Фаро мы вычисляем эту меру для групп $SO(2n+1)$, $Sp(2n)$, $O(2n)$, выражая радиальные части проекций орбитальных мер через определители от В-сплайнов с узлами, расположенными симметрично относительно нуля.

2. Формулировка результата. Прежде чем сформулировать результат, приведем несколько необходимых определений.

Согласно определению Карри и Шёнберга [1], *В-сплайном* с узлами в точках $t_1 < \dots < t_n$ называется C^{n-3} -гладкая функция $M_n(t_1, \dots, t_n; t)$ на прямой со следующими свойствами:

*Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект 14-50-00005).

- $\text{supp}(M_n(t_1, \dots, t_n; t)) = [t_1, t_n]$;
- функция $M_n(t_1, \dots, t_n; t)$ является многочленом от t степени $n - 2$ на каждом подынтервале (t_i, t_{i+1}) ;
- $\int_{\mathbb{R}} M_n(t_1, \dots, t_n; t) dt = 1$.

Заметим, что написанные выше условия задают В-сплайн $M_n(t_1, \dots, t_n; t)$ единственным образом.

Напомним также, что *разделенные разности* функции $f(t)$ определяются по индукции следующим образом:

$$f[t_1, t_2] = \frac{f(t_1) - f(t_2)}{t_1 - t_2}, \dots, f[t_1, \dots, t_n] = \frac{f[t_1, t_2, \dots, t_{n-1}] - f[t_2, \dots, t_{n-1}, t_n]}{t_1 - t_n}.$$

Формула Эрмита–Дженокки связывает В-сплайны с разделенными разностями. Согласно ей, для функции f , имеющей кусочно-непрерывную производную $(n - 1)$ -го порядка справедливо равенство

$$f[t_1, \dots, t_n] = \frac{1}{(n - 1)!} \int_{\mathbb{R}} f^{(n-1)}(t) M_n(t_1, \dots, t_n; t) dt.$$

Используя метод Фаро [2], для групп $\text{SO}(2n + 1)$, $\text{Sp}(2n)$, $\text{O}(2n)$ мы получаем формулы, выражающие $\nu_{X,k}$ через определители от В-сплайнов (теорема 1).

Обозначим через

$$V_n(T) := V_n(t_1, \dots, t_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (t_i - t_j)$$

определитель Вандермонда от переменных $T = (t_1, \dots, t_n)$, а также положим

$$v_n(dT) = V_n(T^2) \cdot \prod_{i=1}^n dt_i = V_n(t_1^2, \dots, t_n^2) \cdot \prod_{i=1}^n dt_i.$$

Наконец, для произвольных $j, m \in \mathbb{N}$ мы будем использовать сокращенное обозначение

$$M_{2m+2}(\pm t|_j^{m+j}; t) := M_{2m+2}(-t_{m+j}, \dots, -t_j, t_j, \dots, t_{m+j}; t).$$

Теорема 1. *Радиальная часть $\nu_{X,k}$ проекции G_n -орбитальной меры μ_X задается следующей формулой:*

$$\nu_{X,k}(dY) = \frac{c(n, k)}{\prod_{j-i \geq n-k+1} (x_j^2 - x_i^2)} \det [\Delta M_{2n-2k+2}(\pm x|_j^{j+n-k}; y_i)]_{i,j=1}^k v_k(dY),$$

где Δ является дифференциальным оператором вида

$$\Delta = -y \frac{d}{dy} + \varkappa(n, k),$$

а $c(n, k)$ и $\varkappa(n, k)$ — константы, зависящие от n и k . Если $G_n = \text{SO}(2n + 1)$ или $G_n = \text{Sp}(2n)$, то $\varkappa(n, k) = 0$, а также

$$c(n, k) = \frac{(2n - 2k)!!}{(2n)!!} \prod_{i=0}^{k-1} \binom{2n - 2k + 2i + 2}{2i + 1}.$$

Если же $G_n = O(2n)$, то $\varkappa(n, k) = 2(n - k)$. В этом случае

$$c(n, k) = \frac{(2n - 2k - 1)!!}{(2n - 1)!!} \prod_{i=0}^{k-1} \binom{2n - 2k + 2i + 1}{2i}.$$

Замечание. Заметим, что производная от сплайна M_m , $m \in \mathbb{N}$, может быть выражена через разность двух сплайнов порядка $m - 1$, а именно, для любых m точек $t_1, \dots, t_m \in \mathbb{R}$ справедливо следующее равенство (см. [5]):

$$\frac{t_m - t_1}{m - 1} \cdot \frac{d}{dt} M_m(t_1, \dots, t_m; t) = M_{m-1}(t_1, \dots, t_{m-1}; t) - M_{m-1}(t_2, \dots, t_m; t).$$

3. Доказательство теоремы 1.

3.1. *Преобразование Лапласа орбитальных мер.* Определим преобразование Лапласа $\widehat{\mu}_X$ орбитальной меры μ на алгебре Ли $\mathfrak{g}_n$ группы G_n как орбитальный интеграл:

$$\widehat{\mu}_X(T) = \int_{\text{Orbit}(X)} e^{\text{tr}(TX)} \mu(dX) = \int_{G_n} e^{\text{tr}(T \text{Ad}_g(X))} dg,$$

где dg — мера Хаара на G_n .

Вообще говоря, преобразование Лапласа для мер с компактным носителем определено на комплексификации алгебры Ли. Однако заметим, что функция $\widehat{\mu}_X(T)$ инвариантна относительно действия группы G_n ; поэтому можно считать T матрицей канонического вида и рассматривать преобразование Лапласа орбитальной меры как функцию на координатном пространстве $\mathbb{C}^n$.

Пользуясь теоремой Хариш-Чандры (см. [3, теорема 2]), можно получить следующие формулы для преобразования Лапласа орбитальных мер μ_X для различных групп G_n :

$$\widehat{\mu}_X^{(B_n, C_n)}(t_1, \dots, t_n) = \frac{(2n - 1)!(2n - 3) \cdots 1!}{V_n(X^2)V_n(T^2)} \det \left[\frac{\text{sh}(t_i x_j)}{t_i x_j} \right]_{i,j=1}^n, \quad (1)$$

$$\widehat{\mu}_X^{(D_n)}(t_1, \dots, t_n) = \frac{(2n - 2)! \cdots 2!}{V_n(X^2)V_n(T^2)} \det [\text{ch}(t_i x_j)]_{i,j=1}^n. \quad (2)$$

В формулах (1), (2) B_n , C_n и D_n — стандартные обозначения классических серий алгебр Ли групп $SO(2n + 1)$, $Sp(2n)$ и $O(2n)$ соответственно.

Из этих формул следует, что, с точностью до постоянного множителя, преобразование Лапласа орбитальной меры μ_X имеет вид

$$D_n(f; T; X) = \frac{\det[f(t_i x_j)]_{i,j=1}^n}{V_n(T^2)V_n(X^2)},$$

где f является целой функцией, имеющей следующее разложение в ряд Тейлора:

$$f(tz) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(zt)^{2m}}{2^{2m} m! (\alpha + 1)_m}; \quad (3)$$

здесь $(\alpha + 1)_m = (\alpha + 1)(\alpha + 2) \cdots (\alpha + m)$ является символом Похгаммера, а параметр α равен $1/2$ в случае групп $SO(2n + 1)$ и $Sp(2n)$ и $-1/2$ в случае, когда $G_n = O(2n)$.

3.2. Проекция и преобразование Лапласа. Для любой борелевой меры μ на $\mathfrak{g}_n$ сужение ее преобразования Лапласа на $\mathfrak{g}_k$ равно преобразованию Лапласа меры $p_k^n(\mu)$ на $\mathfrak{g}_k$. Таким образом, задача сводится к вычислению $D_n(f; t_1, \dots, t_k, 0, \dots, 0; X)$.

Лемма 1. Если f — четная аналитическая функция в некоторой окрестности нуля, то величина $D_n(f; t_1, \dots, t_k, 0, \dots, 0; X)$ может быть выражена через разделенные разности функций $\varphi_i(y) = f(t_i \sqrt{y})$ следующим образом:

$$D_n(f; t_1, \dots, t_k, 0, \dots, 0; X) = \frac{a_{n-k}(f)}{V_n(X^2)V_k(T^2)(t_1 \dots t_k)^{2(n-k)}} \times \prod_{1 \leq j-i \leq n-k} (x_j^2 - x_i^2) \cdot \det[\varphi_i[x_j^2, \dots, x_{j+n-k}^2]]_{i,j=1}^k. \quad (4)$$

Здесь $a_n(f) = \prod_{j=0}^{n-1} c_{2j}$, где c_{2j} суть четные коэффициенты ряда Тейлора функции f .

Доказательство этой леммы аналогично доказательствам теоремы 4.1 и предложения 5.3 в работе [2]. $\square$

3.3. Трюк с удвоением узлов. Так как функции φ_i из леммы 1 зависят от $\sqrt{z}$, то формула (4) недостаточно удобна, чтобы применять к ней формулу Эрмита–Дженокки. Но от данного неудобства можно избавиться, удвоив число узлов.

Лемма 2. Пусть $f(z)$ является четной аналитической функцией в некоторой окрестности нуля, и пусть $\varphi(z) = f(\sqrt{z})$. Тогда, если даны m различных точек $0 < z_1 < \dots < z_m$, имеет место следующее равенство для разделенных разностей:

$$\varphi[z_1^2, \dots, z_m^2] = g[-z_m, \dots, -z_1, z_1, \dots, z_m],$$

где $g(z) = zf(z)$.

Доказательство. По определению разделенных разностей имеем цепочку равенств

$$\begin{aligned} \varphi[z_1^2, \dots, z_m^2] &= \sum_{l=1}^m f(z_l) \prod_{r \neq l} \frac{1}{z_l^2 - z_r^2} \\ &= 2 \sum_{l=1}^m \frac{z_l f(z_l)}{2z_l} \prod_{r \neq l} \frac{1}{z_l^2 - z_r^2} = g[-z_m, \dots, -z_1, z_1, \dots, z_m], \end{aligned}$$

где $g(z) = zf(z)$. Лемма 2 доказана. $\square$

3.4. Применение формулы Эрмита–Дженокки. С помощью лемм 1 и 2 вычисление величины $D_n(f; t_1, \dots, t_k, 0, \dots, 0; X)$ свелось к вычислению определителя от разделенных разностей функций $g_i(z) = zf(t_i z)$. Используя формулу Эрмита–Дженокки, мы получаем следующее равенство:

$$\begin{aligned} g_i[-x_{j+n-k}, \dots, -x_j, x_j, \dots, x_{j+n-k}] &= \frac{1}{(2n-2k+1)!} \\ &\times \int_{\mathbb{R}} (g_i(z))^{(2n-2k+1)} M_{2n-2k+2}(-x_{j+n-k}, \dots, -x_j, x_j, \dots, x_{j+n-k}; z) dz \\ &= \frac{-1}{(2n-2k+1)!} \int_{\mathbb{R}} (g_i(z))^{(2n-2k)} M'_{2n-2k+2}(\pm x|_j^{j+n-k}; z) dz. \end{aligned}$$

Теперь мы хотим выразить $(g_i(z))^{(2n-2k)} = (zf_i(z))^{(2n-2k)}$ через $f_i(z) = f(t_i z)$.

Согласно формуле (3),

$$(g_i(z))^{(2n-2k)} = z t_i^{2n-2k} f(t_i z) \cdot \gamma_{\alpha, m},$$

где

$$\gamma_{\alpha, m} = \gamma_{\alpha}(m) := \frac{(m + \frac{3}{2})_{n-k}}{(m + \alpha + 1)_{n-k}}.$$

Ситуация распадается на два случая:

(B-C) $G_n = \text{Sp}(2n)$ или $\text{SO}(2n+1)$. В этом случае $\alpha = 1/2$ и $\gamma_{\alpha, m} = 1$.

(D) $G_n = \text{SO}(2n)$. В этом случае $\alpha = -1/2$ и, следовательно, $\gamma_{\alpha, m} = 1 + 2(n-k)/(2m+1)$.

В обеих ситуациях разделенные разности функций g_i могут быть выражены следующим образом:

$$\begin{aligned} & g_i[-x_{j+n-k}, \dots, -x_j, x_j, \dots, x_{j+n-k}] \\ &= -\frac{t_i^{2n-2k}}{(2n-2k+1)!} \cdot \int_{\mathbb{R}} f(t_i y) \Delta M_{2n-2k+2}(\pm x|_j^{j+n-k}; y) dy, \quad (5) \end{aligned}$$

где оператор Δ имеет вид

$$\Delta = \Delta_{1/2} = -y \frac{d}{dy} \quad (\text{случай (B-C)})$$

или же

$$\Delta = \Delta_{-1/2} = -y \frac{d}{dy} + 2(n-k) \quad (\text{случай (D)}).$$

Применим теперь к формуле (5) тождество Бине–Коши:

$$\begin{aligned} \det[g_i[-x_j, \dots, -x_{j+n-k}, x_{j+n-k}, \dots, x_j]] &= \prod_{i=1}^k t_i^{2n-2k-1} \frac{1}{((2n-2k+1)!)^k} \\ &\times \int_{\mathbb{R}_+^k} \det[f(t_i y_j)]_{i,j=1}^k \det[\Delta M_{2n-2k+2}(\pm x|_j^{j+n-k}; y_i)]_{i,j=1}^k dy_1 \dots dy_k. \end{aligned}$$

Для завершения доказательства теоремы 1 осталось только сравнить левую и правую части в формуле (4) и применить к обеим частям обратное преобразование Лапласа. Теорема 1 доказана. $\square$

Благодарности. Я глубоко благодарен Г. И. Ольшевскому за предложенную задачу, полезные обсуждения и внимание к работе.

Примечание при корректуре. Уже после завершения работы над заметкой автор нашел интересную работу Дефоссо (М. Defosseux, Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist., **46**:1 (2010), 209–249), из которой следует, что если для произвольной матрицы X из $\mathfrak{g}_n$ рассмотреть объединение $M(X)$ наборов чисел, задающих канонический вид матрицы X , а также ее образов под действием проекций p_k^n , $k = 1, \dots, n-1$, то радиальная часть проекции орбитальной меры μ_X может быть вычислена как корреляционная функция детерминантного процесса на массивах $M(X)$, ядро которого выражается в явном виде (см. теорему 6.3 в работе Дефоссо).

ЛИТЕРАТУРА

[1] H. B. Curry, I. J. Schoenberg, *J. Analyse Math*, **17** (1966), 71–107. [2] J. Faraut, *Adv. Pure Appl. Math.*, **6**:4 (2015), 261–283. [3] Harish-Chandra, *Amer. J. Math.*, **79**:1 (1957), 87–120. [4] G. Olshanski, *J. Lie Theory*, **23**:4 (2013), 1011–1022. [5] G. M. Phillips, *Interpolation and approximation by polynomials*, CMS Books in Math, vol. 14, Springer-Verlag, New York, 2003.

Математический институт имени В. А. Стеклова РАН
e-mail: dmitry.zubov.93@gmail.com

Поступила в редакцию
17 января 2016 г.

УДК 517.984.5

Лестницы Штарка–Ваннье и кубические экспоненциальные суммы*

© 2016. Ф. Клопп, А. А. Федотов

На естественной области определения в $L^2(\mathbb{R})$ рассмотрим оператор Шрёдингера

$$H_\epsilon = -\frac{\partial^2}{\partial x^2} + v(x) - \epsilon x, \quad (1)$$

где v — вещественно-аналитическая 1-периодическая функция, а ϵ — положительная постоянная. Этот оператор является модельным при исследовании блоховского электрона в кристалле, помещенном в постоянное электрическое поле [1]. Параметр ϵ пропорционален электрическому полю. Оператор (1) изучался и физиками, и математиками, см., например, работы [6] и [10] и ссылки к ним. Его спектр абсолютно непрерывен и заполняет вещественную ось. Одной из особенностей оператора H_ϵ является существование лестниц Штарка–Ваннье. Они представляют собой ϵ -периодические цепочки резонансов — полюсов аналитического продолжения ядра резольвенты в нижнюю полуплоскость через спектр (см., например, [2]). В большинстве математических работ изучался случай малых ϵ (см., например, статьи [3], [10] и ссылки к ним). При малых ϵ имеются лестницы, экспоненциально близкие к вещественной оси. Фактически, относительно хорошо был понят лишь случай, когда v является конечнозонным потенциалом. В этом случае имеется лишь конечное число лестниц, экспоненциально близких к вещественной оси. Было замечено, что лестницы нетривиально «взаимодействуют» при изменении ϵ , и была сформулирована гипотеза, что поведение резонансов сильно зависит от теоретико-числовых свойств ϵ , см. [1].

В этой заметке мы ограничиваемся случаем $v(x) = 2 \cos(2\pi x)$. Мы обсуждаем коэффициент отражения $r(E)$ оператора Штарка–Ваннье (1) в нижней полуплоскости комплексной плоскости спектрального параметра E . Резонансы являются полюсами коэффициента отражения. Выясняется, что при $\operatorname{Im} E \rightarrow -\infty$

*Работа поддержана грантом РФФИ 14-01-00760-а. А. А. Ф. также благодарит Парижский фонд математических наук, а Ф. К. — лабораторию Чебышева СПбГУ и Генеральное консульство Франции в Санкт-Петербурге, поддержавших его как лауреата конкурса Ламе. Оба автора благодарны Фонду Саймона за поддержку и Институту математики Исаака Ньютона за гостеприимство во время их участия в программе “Periodic and ergodic spectral problems” (поддержана грантом EPSRC/EP/K032208/1), когда эта работа и была завершена.