Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

П. Е. Пушкарь, Лагранжевы пересечения в симплектическом пространстве, *Функц. анализ и его прил.*, 2000, том 34, выпуск 4, 64–70

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa326>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.164.48.24

26 апреля 2023 г., 11:23:39

Лагранжевы пересечения в симплектическом пространстве*

© 2000. П. Е. ПУШКАРЬ

Любые два эллипса, лежащие на плоскости и имеющие общий центр и равные площади, пересекаются не менее чем в четырех точках. В работе доказывается симплектический аналог этого утверждения. Работа появилась как ответ на следующий вопрос Л. М. Лермана.

Рассмотрим четырехмерное симплектическое векторное пространство $(\mathbb{R}^4, \omega)$. Разложим его в сумму двумерных симплектических плоскостей, $(\mathbb{R}^4, \omega) = (\mathbb{R}^2, \omega_1) \oplus (\mathbb{R}^2, \omega_2)$. Обозначим через $T \subset \mathbb{R}^4$ произведение окружностей с центром в нуле, лежащих в этих симплектических плоскостях и ограничивающих равные площади. Вопрос Лермана состоял в следующем: верно ли, что для любого линейного симплектоморфизма A пространства $\mathbb{R}^4$ торы $A(T)$ и T пересекаются? Ответ на него дает следующая теорема.

ТЕОРЕМА 1. *Торы $A(T)$ и T пересекаются. Более того, для линейного симплектоморфизма A общего положения число точек пересечения не меньше 8. Эта оценка точна.*

Вопрос возник при изучении поведения траекторий гамильтонова векторного поля в окрестности вырожденного положения равновесия (типа седло-центра) (см. [4, 5, 6]).

В работе доказывается теорема 1 и ее многомерное обобщение. Автор благодарен Ю. В. Чеканову за полезные обсуждения.

§1. Необходимые определения и формулировки

Рассмотрим симплектическое линейное пространство $(\mathbb{R}^{2n}, \omega)$. Зафиксируем координаты Дарбу $(p, q) = (p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n)$ в $(\mathbb{R}^{2n}, \omega)$, $\omega = \sum dp_k \wedge dq_k = dp \wedge dq$. Будем отождествлять пространство $(\mathbb{R}^{2n}, \omega)$ с комплексным пространством $\mathbb{C}^n$ с координатами $z_k = p_k + iq_k$. Зафиксируем сферу $S^{2n-1} \subset \mathbb{C}^n$, заданную уравнением $\sum z_k \bar{z}_k = 1$. Рассмотрим отображение расслоения Хопфа $\pi: S^{2n-1} \rightarrow \mathbb{C}P^{n-1}$. Обозначим через Λ лагранжеву плоскость $q = 0$. Образ множества $\Lambda \cap S^{2n-1}$ при отображении π — это вещественное проективное пространство $\mathbb{R}P^{n-1} \subset \mathbb{C}P^{n-1}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. $L^n = \pi^{-1}(\mathbb{R}P^{n-1})$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. *Многообразие $L^n \subset \mathbb{R}^{2n}$ лагранжево. Оно диффеоморфно $S^1 \times S^{n-1}$ при четном n . При нечетном $n \geq 3$ многообразие L^n неориентируемо.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Многообразие L^n заматывается изотропной $(n-1)$ -мерной сферой $S^{n-1} = \Lambda \cap S^{2n-1}$ под действием потока с гамильтонианом $\frac{1}{2} \sum z_k \bar{z}_k$. Это

*Работа частично поддержана грантом INTAS-96-0713 и Российским фондом фундаментальных исследований (проект 99-01-01109).

доказывает лагранжевость многообразия L^n . (Другими словами, L^n — это прообраз лагранжева многообразия $\mathbb{R}P^{n-1} \subset \mathbb{C}P^{n-1}$ при отображении гамильтоновой редукции.) Орбита действия гамильтониана, проходящая через точку сферы $\Lambda \cap S^{2n-1}$, пересекает ее еще ровно в одной точке — диаметрально противоположной. Следовательно, многообразие L^n диффеоморфно многообразию с краем $S^{n-1} \times [0, 1]$, края которого отождествлены при помощи антиподального отображения сферы S^{n-1} . При четном n антиподальное отображение сферы S^{n-1} изотопно тождественному, а при нечетном $n \geq 3$ обращает ориентацию этой сферы. Это доказывает оставшуюся часть утверждения. $\square$

Сформулируем обобщение теоремы 1. Пусть A — линейный симплектоморфизм пространства $\mathbb{R}^{2n}$.

ТЕОРЕМА 2. *Многообразия $A(L^n)$ и L^n пересекаются. Более того, для линейного симплектоморфизма A общего положения число точек пересечения не меньше $4n$. Эта оценка точна.*

Рассмотрим инволюцию пространства $\mathbb{R}^{2n}$, $x \rightarrow -x$. Симплектическая структура, любая лагранжева плоскость λ и многообразия L^n инвариантны относительно этой инволюции. Будем обозначать через $\tilde{\mathbb{R}}^{2n}$, $\tilde{\lambda}$ и $\tilde{L}^n$ фактормногообразия многообразий $\mathbb{R}^{2n} \setminus 0$, $\lambda \setminus 0$ и L^n под действием этой инволюции, и пусть $\tilde{\omega}$ — симплектическая структура на $\tilde{\mathbb{R}}^{2n}$. Таким образом, многообразие $\tilde{\mathbb{R}}^{2n}$ симплектическое, а многообразия $\tilde{\lambda}$ и $\tilde{L}^n$ — его лагранжевы подмногообразия. Многообразие $\tilde{\lambda}$ будем называть *лагранжевым конусом*. Лагранжевы конусы находятся во взаимно однозначном соответствии с лагранжевыми плоскостями. Линейный симплектоморфизм A индуцирует симплектоморфизм $\tilde{A}$ многообразия $\tilde{\mathbb{R}}^{2n}$. Теорема 2 вытекает из следующей теоремы.

ТЕОРЕМА $\tilde{2}$. *Пусть A — произвольный линейный симплектоморфизм пространства $\mathbb{R}^{2n}$. Тогда многообразия $\tilde{A}(\tilde{L}^n)$ и $\tilde{L}^n$ пересекаются. Более того, для линейного симплектоморфизма A общего положения число точек пересечения не меньше $2n$. Эта оценка точна.*

ЗАМЕЧАНИЕ. Многообразие $\tilde{L}^n$ диффеоморфно $S^1 \times \mathbb{R}P^{n-1}$. Следовательно, сумма размерностей $\mathbb{Z}_2$ -гомологий многообразия $\tilde{L}^n$ равна $2n$. Хорошо известно, что число точек пересечения (с учетом кратностей) компактного лагранжева многообразия со своим образом под действием гамильтонова потока за единичное время (с достаточно малым гамильтонианом) не меньше, чем сумма чисел Бетти этого многообразия. Если выполняются дополнительные условия на лагранжево многообразие и симплектическое многообразие, то эта оценка справедлива для произвольных гамильтонианов [7, 8]. Наше лагранжево многообразие $\tilde{L}^n$ и симплектическое многообразие $\tilde{\mathbb{R}}^{2n}$ не удовлетворяют условиям теоремы Флэра [7, 8]. Сформулируем гипотезу:

ГИПОТЕЗА. *В теореме $\tilde{2}$ симплектоморфизм $\tilde{A}$ можно заменить на преобразование за время 1 гамильтоновым потоком на многообразии $\tilde{\mathbb{R}}^{2n}$.*

По-моему, эта гипотеза является симплектическим аналогом теорем Гивенталья о нелинейном индексе Маслова [9]. Можно также вместо многообразия L^n рассмотреть тор T^n — произведение окружностей одинакового радиуса в двумерных симплектических плоскостях. При $n \geq 3$ неизвестно, будут ли пересекаться T^n

и $A(T^n)$ (A — линейный симплектоморфизм), а также неизвестен ответ на более слабый вопрос: пересекаются ли T^n и произвольное лагранжево подпространство?

Одно из наблюдений, необходимых для доказательства теоремы $\tilde{2}$, доставляет следующая лемма.

ЛЕММА 1. *Лагранжева плоскость в $\mathbb{R}^{2n}$ (соответственно лагранжев конус в $\tilde{\mathbb{R}}^{2n}$) общего положения пересекает многообразие L^n (соответственно $\tilde{L}^n$) в $2n$ (соответственно n) точках.*

Мы докажем лемму 1 в следующем параграфе. В нем собраны необходимые для доказательства теоремы 2 утверждения, связанные с лагранжевым многообразием Грассмана. Теоремы 1 и $\tilde{2}$ доказываются в §3.

§2. Лагранжев грассманиан

У квадратичной формы без кратных собственных чисел главные оси естественно упорядочены. В этом параграфе мы распространим это наблюдение на лагранжев грассманиан.

Обозначим через Λ_n многообразие лагранжевых подпространств в $(\mathbb{R}^{2n}, \omega)$. Напомним (см. [2]), что *шлейфом* $\Sigma(\alpha)$ лагранжевой плоскости $\alpha \in \Lambda_n$ называется множество всех лагранжевых плоскостей, нетрансверсальных плоскости α .

Шлейф любой лагранжевой плоскости можно коориентировать (см. [1, 2]), так что корректно определен его индекс пересечения с ориентированными путями с концами вне шлейфа. Для путей, порожденных действием (неавтономного) положительно определенного квадратичного гамильтониана, этот индекс пересечения вычисляется по следующему правилу [2]. Такой путь пересечет шлейф $\Sigma(\alpha)$ конечное число раз, а индекс пересечения равен сумме размерностей пересечений с плоскостью α в моменты нетрансверсальности движущейся плоскости и плоскости α . Индекс пересечения ориентированных петель со шлейфом определяет каноническую образующую группы $H^1(\Lambda_n, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$ (см. [1, 2]) — класс Маслова.

Рассмотрим петлю $\gamma(t, \beta): \mathbb{R}/\pi\mathbb{Z} \rightarrow \Lambda_n$, $t \rightarrow e^{it}\beta$, проходящую через лагранжеву плоскость β . Эта петля описывает движение лагранжевой плоскости под действием гамильтониана $\frac{1}{2} \sum z_k \bar{z}_k$. Индекс Маслова такой петли равен n (см. [1, 2]). Зафиксируем лагранжеву плоскость α . Каждому моменту t_0 пересечения пути $\gamma(t, \beta)$ со шлейфом $\Sigma(\alpha)$ естественно соответствует подпространство в плоскости β . Назовем его *собственным подпространством плоскости β* (по отношению к плоскости α). Собственные подпространства лагранжевой плоскости естественным образом циклически упорядочены.

Обозначим через M карту многообразия Λ_n , состоящую из всех лагранжевых плоскостей, трансверсальных плоскости $p = 0$. Лагранжева плоскость, содержащаяся в этой карте, отождествляется с симметрической матрицей: матрице A соответствует плоскость $q = Ar$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. *Любая лагранжева плоскость разлагается в прямую сумму собственных подпространств.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Без ограничения общности можно считать, что плоскость α совпадает с плоскостью Λ (этого можно добиться унитарным преобразованием). Утверждение достаточно доказать для плоскостей из карты M . Плоскости $e^{it}\Lambda$ соответствует оператор, пропорциональный тождественному (при $t \neq \pi/2$). Следовательно, собственные подпространства оператора A переходят в собственные

подпространства плоскости $q = Ap$ при проекции вдоль q -плоскости. Других собственных подпространств у плоскости $q = Ap$ нет, поскольку сумма их размерностей (индекс Маслова соответствующего пути) равна n . Таким образом, утверждение вытекает из соответствующего утверждения о квадратичных формах. $\square$

Будем называть лагранжеву плоскость *хорошей* (по отношению к зафиксированной плоскости α), если все ее собственные подпространства одномерны, и *плохой* в противном случае. Следующее утверждение является прямым обобщением на лагранжевы грассманианы того, что эллипсоиды вращения могут появиться неустранимым образом только в семействе, зависящем не менее чем от двух параметров [3].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Множество плохих лагранжевых плоскостей имеет коразмерность 2 в Λ_n .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим множество особенностей шлейфа $\Sigma(\alpha)$; обозначим его $\Sigma_2(\alpha)$. Множество $\Sigma_2(\alpha)$ состоит из плоскостей, пересекающихся с плоскостью α по подпространству размерности не меньше 2. Согласно [1], это множество имеет коразмерность 3 в лагранжевом грассманиане. Множество плохих лагранжевых плоскостей совпадает с $\bigcup_t e^{it}\Sigma_2(\alpha)$. Таким образом, коразмерность множества плохих плоскостей равна 3. $\square$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 1. Общая лагранжева плоскость является хорошей по отношению к плоскости Λ . Ее точки пересечения с L^n — это точки пересечения ее собственных подпространств с единичной сферой в $\mathbb{R}^{2n}$. $\square$

Пары, состоящие из хороших лагранжевых плоскостей и их собственных подпространств, образуют n -листное накрытие над множеством хороших лагранжевых плоскостей. Рассмотрим петлю в множестве хороших лагранжевых плоскостей. Этой петле соответствует преобразование монодромии накрытия. Преобразование монодромии сохраняет циклический порядок, а следовательно, является (циклическим) сдвигом прообразов точки.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Преобразование монодромии вдоль петли зависит только от класса петли в фундаментальной группе лагранжева многообразия Грассмана. Если индекс Маслова петли равен k , то преобразование монодромии является циклическим сдвигом на k .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства первого утверждения достаточно проверить следующее: преобразование монодромии вдоль маленькой петли, зацепленной с множеством плохих лагранжевых плоскостей, тождественно. Достаточно рассмотреть случай пространства хороших плоскостей по отношению к плоскости Λ . Пусть петля лежит в карте M лагранжева грассманиана. Докажем, что преобразование монодромии вдоль нее тождественно. В карте M хорошие лагранжевы плоскости можно отождествить с симметрическими матрицами без кратных собственных значений. Собственные значения естественно упорядочены по возрастанию; следовательно, для такой петли утверждение доказано.

Пространство хороших плоскостей инвариантно относительно действия потока с гамильтонианом $\frac{1}{2} \sum z_k \bar{z}_k$. Любая орбита действия этого гамильтониана (на Λ_n) пересекает карту M (см. [1, 2]). Следовательно, любую достаточно малую петлю можно умножить на e^{it} так, что она окажется в карте M . Преобразование монодромии вдоль ее образа тривиально. Следовательно, оно тривиально и вдоль нее самой.

Для доказательства второго утверждения достаточно предъявить такую состоящую из хороших плоскостей образующую группы $\pi_1(\Lambda_n)$, что преобразование монодромии вдоль нее является сдвигом на 1. Предъявим ее. Рассмотрим лагранжеву плоскость, лежащую в карте M и задающуюся диагональной матрицей с различными неотрицательными числами на диагонали. Обозначим ее через L . Пусть t_0 — такое положительное число, что путь $\gamma_1(t) = e^{it}$, $t \in [0, t_0]$, состоит из плоскостей, трансверсальных плоскости Λ , и один раз во внутренней точке пересекает шлейф плоскости $p = 0$. Тогда плоскость $e^{it_0}L$ лежит в карте M и задается диагональной матрицей, у которой все собственные значения, кроме одного, положительны. Соединим плоскости L и $e^{it_0}L$ лежащим в M путем γ_2 , состоящим из хороших плоскостей. Петля $\gamma_1 \cup \gamma_2$ искомая. Действительно, преобразование монодромии вдоль нее является сдвигом на 1. Ее индекс Маслова равен 1, поскольку эта петля пересекает шлейф плоскости $p = 0$ ровно один раз с учетом кратностей под действием положительно определенного гамильтониана. $\square$

ЗАМЕЧАНИЕ. Преобразование монодромии может менять ориентацию собственных подпространств. Отметим, что мы также показали, что приведение класса Маслова $m \in H^1(\Lambda_n, \mathbb{Z})$ по модулю n имеет простой геометрический смысл.

§3. Доказательства теорем

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Назовем симплектоморфизм $A \in Sp(n)$ общим, если при любом t лагранжева плоскость $A(e^{it}\Lambda)$ является хорошей по отношению к плоскости Λ . Мы докажем теорему 2 для общих симплектоморфизмов и проверим, что общие симплектоморфизмы действительно являются симплектоморфизмами общего положения.

Нам понадобится следующая явная конструкция диффеоморфизма $\tilde{L}^n \simeq S^1 \times \mathbb{R}P^{n-1}$. Пусть $f: \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \tilde{\mathbb{R}}^{2n}$ — отображение факторизации. Это отображение переводит $S^{n-1} \subset \Lambda$ в $\mathbb{R}P^{n-1} \subset \tilde{\Lambda}$. Сопоставим паре (φ, x) , $\varphi \in \mathbb{R}/\pi\mathbb{Z}$, $x \in \mathbb{R}P^{n-1}$, точку $f(e^{i\varphi}f^{-1}(x)) \in \tilde{L}^n$.

В многообразии $\tilde{\mathbb{R}}^{2n}$ корректно определено умножение на ненулевое комплексное число. Обозначим через $\mathbb{R}_+\tilde{L}^n$ множество точек, пропорциональных точкам из $\tilde{L}^n$ с положительным коэффициентом, и пусть $\mathbb{R}_+$ обозначает множество положительных чисел. Многообразие $\mathbb{R}_+\tilde{L}^n$ диффеоморфно $\mathbb{R}_+ \times S^1 \times \mathbb{R}P^{n-1}$, причем тройке $(v, \varphi, x) \in \mathbb{R}_+ \times S^1 \times \mathbb{R}P^{n-1}$ соответствует точка $v \cdot (\varphi, x) \in \mathbb{R}_+\tilde{L}^n$. Выясним, как устроено ограничение симплектической структуры на многообразии $\mathbb{R}_+\tilde{L}^n$.

Рассмотрим следующую 1-форму α на пространстве $\mathbb{R}^{2n}$. Значение формы α в точке z на векторе $\xi \in T_z\mathbb{R}^{2n}$ равно $\frac{1}{2}\omega(z, \xi)$. В координатах Дарбу $\alpha = \frac{1}{2}(p dq - q dp)$, $d\alpha = \omega$. Форма α $\mathbb{Z}_2$ -инвариантна, а следовательно, является (вне 0) прообразом 1-формы $\tilde{\alpha}$ на многообразии $\tilde{\mathbb{R}}^{2n}$.

ЛЕММА 2. Ограничение формы $\tilde{\alpha}$ на многообразии $\mathbb{R}_+\tilde{L}^n$ — это форма $\frac{1}{2}v^2 d\varphi$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим гладкую кривую в многообразии $\mathbb{R}_+\tilde{L}^n$. Эта кривая локально поднимается до кривой в пространстве $\mathbb{R}^{2n}$. Последняя кривая допускает следующую параметризацию: $t \rightarrow e^{i\varphi(t)}p(t)$, где $\varphi(t)$ и $p(t)$ —

гладкие функции со значениями в $\mathbb{R}$ и $\mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^{2n} = \mathbb{C}^n$ соответственно. Прямым вычислением проверяется, что ограничение формы α на эту кривую равно $\frac{1}{2}(p(t), p(t))\dot{\varphi}(t) dt$, где $(p, p) = \sum p_i^2$. $\square$

Многообразие $\tilde{L}^n$ расслоено над окружностью S^1 . Слой над точкой φ — это $e^{i\varphi} \cdot \mathbb{R}P^{n-1}$ ($\mathbb{R}P^{n-1} \subset \tilde{\Lambda}$). Лагранжев конус $\tilde{A}(e^{i\varphi} \cdot \tilde{\Lambda})$ пересечет $\tilde{L}^n$ ровно в n точках, поскольку A — общий симплектоморфизм. Эти точки соответствуют собственным подпространствам плоскости $A(e^{i\varphi}\Lambda)$. Следовательно, в слое над φ найдется ровно n таких точек, что их образ под действием $\tilde{A}$ попадет в $\mathbb{R}_+\tilde{L}^n$.

Эти n точек гладко зависят от параметра φ по теореме о неявной функции. Мы получаем n кривых $\gamma_i(\varphi)$, определенных локально. Из предложения 2 следует, что кривые γ_i замыкаются, если параметр φ обходит окружность, поскольку индекс Маслова петли $A(e^{it}\Lambda)$, $t \in [0, \pi]$, равен n . Отметим, что кривые $\gamma_i: S^1 \rightarrow \tilde{L}^n$ циклически упорядочены. Очевидно, что множество $\tilde{A}^{-1}(\tilde{L}^n) \cap \tilde{L}^n$ лежит на объединении кривых γ_i , поскольку объединение кривых γ_i — это $\tilde{A}^{-1}(\mathbb{R}_+\tilde{L}^n) \cap \tilde{L}^n$. Теорема $\tilde{2}$ для общего симплектоморфизма вытекает из следующей леммы

ЛЕММА 3. *На каждой кривой γ_i найдется не менее двух точек множества $\tilde{A}^{-1}(\tilde{L}^n) \cap \tilde{L}^n$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим отображение $A \circ \gamma_i: S^1 \rightarrow \mathbb{R}_+\tilde{L}^n$. Поскольку A — симплектоморфизм, то

$$\frac{\pi}{2} = \int_{(S^1)} d\varphi = \int_{\gamma_i(S^1)} \tilde{\alpha} = \int_{(S^1)} (A \circ \gamma_i)^* \tilde{\alpha}.$$

Докажем, что сквозное отображение $S^1 \xrightarrow{\gamma_i} \mathbb{R}_+\tilde{L}^n = \mathbb{R}_+ \times S^1 \times \mathbb{R}P^{n-1} \rightarrow S^1$ — диффеоморфизм. Последнее отображение в цепочке — естественная проекция. Тогда лемма будет следовать из теоремы о среднем.

Действительно, образ S^1 при отображении $S^1 \xrightarrow{\gamma_i} \mathbb{R}_+\tilde{L}^n \rightarrow \tilde{L}^n$ — это непараметризованная кривая γ_j для отображения $\tilde{A}^{-1}$. Из того, что A — невырожденный линейный оператор, легко вытекает, что это отображение взаимно однозначно. На кривой γ_i $d\varphi \neq 0$. Отображение $\tilde{A}$ сохраняет форму $\tilde{\alpha}$. Пользуясь леммой 3, получаем, что наше отображение — диффеоморфизм. $\square$

Теорема $\tilde{2}$ доказана для общих симплектоморфизмов. Докажем, что общие симплектоморфизмы — это симплектоморфизмы общего положения (догадаться об этом можно из предложения 1). Тот факт, что симплектоморфизм A не общий, выражается алгебраическим условием на A . Группа $Sp(n)$ — это связное гладкое алгебраическое многообразие. Следовательно, для доказательства достаточно предъявить один общий оператор. Построим его. Пространство $\mathbb{R}^{2n}$ разлагается в прямую сумму симплектических плоскостей с координатами (p_i, q_i) . Рассмотрим оператор, являющийся прямой суммой поворотов в каждой из этих плоскостей. Если углы этих поворотов не отличаются на кратное π число, то построенный оператор, очевидно, общий. Обозначим его через B .

Остается доказать точность оценки теоремы 2. Обозначим через S_ε отображение за время ε гамильтоновым потоком с гамильтонианом $\sum p_i q_i$. Тогда при малых $\varepsilon \neq 0$ оператор BS_ε общий. Каждая из кривых $f^{-1}\gamma_i$ лежит в симплектической плоскости (p_i, q_i) . Следовательно, все точки пересечения лежат в этих плоскостях. Многообразие L^n пересекается с каждой такой плоскостью по

окружности. Поскольку ограничение оператора BS_ε на плоскость (p_i, q_i) — симплектоморфизм этой плоскости, не являющийся поворотом, в такой плоскости будет ровно 4 искомым точки. $\square$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Теорема 2 остается справедлива для несколько более широкого класса многообразий — вместо L^n можно рассмотреть многообразие, получающееся следующим образом. Нужно взять сферу произвольного радиуса, пересечь ее лагранжевой плоскостью и взять все орбиты гамильтониана $\frac{1}{2} \sum z_k \bar{z}_k$, проходящие через пересечение. Такое многообразие переводится в L^n композицией унитарного оператора и гомотетии. Лагранжев тор, о котором идет речь в теореме 1, можно получить таким образом — в качестве лагранжевой плоскости нужно взять плоскость $p_1 = p_2, q_1 + q_2 = 0$. $\square$

ЗАМЕЧАНИЕ. Условие равенства площадей (= радиусов) в теореме 1 существенно. Если радиусы не равны, то такой тор можно сдвинуть линейным преобразованием сколь угодно далеко от нуля. Это вытекает из следующего утверждения. Если для компактного лагранжева многообразия симплектического пространства найдется лагранжева плоскость, не пересекающаяся с ним, то это многообразие можно сдвинуть линейным симплектоморфизмом сколь угодно далеко от нуля. Действительно, можно выбрать такие координаты Дарбу, что эта плоскость совпадет с q -плоскостью. В качестве симплектоморфизма можно взять отображение гамильтоновым потоком с гамильтонианом $\sum p_i^2$ за достаточно большое время. Для тора такой плоскостью будет, скажем, диагональная плоскость $p_1 = p_2, q_1 = q_2$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Арнольд В. И. О характеристическом классе, входящем в условие квантования. Функц. анализ и его прил., **1**, вып. 1, 1–14 (1967).
2. Арнольд В. И. Теоремы Штурма и симплектическая геометрия. Функц. анализ и его прил., **19**, вып. 4, 1–10 (1985).
3. Арнольд В. И. Моды и квазимоды. Функц. анализ и его прил., **6**, вып. 2, 12–20 (1972).
4. Лерман Л. М. О гамильтоновых системах с петлей сепаратрисы седло-центра. В кн.: Методы качественной теории дифференциальных уравнений, Межвуз. сб. научн. трудов под ред. Н. А. Леонтович-Андроновой. Горьковский госуниверситет, Горький, 1987, с. 89–103.
5. Koltsova O. Yu., Lerman L. M. Transverse Poincaré homoclinic orbits in a $2N$ -dimensional Hamiltonian system close to the system with a loop to a saddle-center. Int. J. Bifurcation and Chaos, **6**, No. 6, 991–1006 (1996).
6. Кольцова О. Ю., Лерман Л. М. Трансверсальные гомоклинические траектории Пуанкаре около петли седло-центра в $2N$ -мерной гамильтоновой системе. Докл. РАН, **359**, № 4, 448–451 (1998).
7. Floer A. Morse theory for Lagrangian intersections. J. Diff. Geom., **28**, 513–547 (1988).
8. Floer A. Witten's complex and infinite dimensional Morse theory. J. Diff. Geom., **30**, 207–221 (1989).
9. Givental A. B. Nonlinear generalization of the Maslov index. Adv. Soviet Math., vol. 1, 1990, pp. 71–103.