Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. З. Голубчик, В. В. Соколов, Еще одна разновидность классического уравнения Янга–Бакстера, *Функц. анализ и его прил.*, 2000, том 34, выпуск 4, 75–78

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa328>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.73.92

26 апреля 2023 г., 12:55:46

УДК 517.9

Еще одна разновидность классического уравнения Янга–Бакстера*

© 2000. И. З. Голубчик, В. В. Соколов

1. Новое операторное уравнение Янга–Бакстера. В работах [1, 2] изучались следующие классические операторные уравнения Янга–Бакстера:

$$R([R(a), b] + [a, R(b)]) = [R(a), R(b)], \quad (1)$$

$$R([R(a), b] + [a, R(b)]) = [R(a), R(b)] + [a, b], \quad (2)$$

$$R([R(a), b] + [a, R(b)]) = [R(a), R(b)] - R([a, b]), \quad (3)$$

где R — линейный оператор из конечномерной алгебры Ли $\mathfrak{G}$ в себя. Все они связаны с разложением дубля $\mathfrak{G} \oplus \varepsilon \mathfrak{G}$ алгебры $\mathfrak{G}$ в прямую сумму векторных подпространств, являющихся подалгебрами Ли (т.е. в сумму дополнительных подалгебр). Одна из этих подалгебр совпадает с $\mathfrak{G}$, а другая задается формулой $\{\varepsilon a + R(a) \mid a \in \mathfrak{G}\}$. При этом уравнение (1) соответствует случаю $\varepsilon^2 = 0$, для уравнения (2) $\varepsilon^2 = 1$, а для уравнения (3) $\varepsilon^2 = \varepsilon$.

Операторы R , удовлетворяющие уравнениям (1)–(3), позволяют также построить в алгебре токов $\mathfrak{G}[[\lambda]]$ некоторые дополнительные подалгебры к алгебре рядов Тейлора, лежащие в алгебре многочленов $\mathfrak{G}[\lambda^{-1}]$ (см. [4]). Эти дополнительные подалгебры содержат идеалы алгебры $\mathfrak{G}[\lambda^{-1}]$, факторалгебры по которым изоморфны соответствующим дублям.

В настоящей работе рассматривается операторное уравнение

$$R([R(a), b] + [a, R(b)]) = [R(a), R(b)] + R^2([a, b]), \quad (4)$$

где R — оператор на некоторой алгебре Ли $\mathfrak{G}$ и $a, b \in \mathfrak{G}$. В случае когда $\mathfrak{G}$ — алгебра Ли векторных полей, а R — аффинор, соотношение (4) означает, что тензор Фрейлихера–Нейенхейса от R равен нулю [9]. В отличие от этого примера, нас интересует случай, когда $\mathfrak{G}$ конечномерна.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Легко проверить, что если R — решение уравнения (4), то $(\alpha_1 R + \alpha_2)(\alpha_3 R + \alpha_4)^{-1}$ при любых константах α_i также удовлетворяет этому уравнению.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Оператор $R: \mathfrak{G} \rightarrow \mathfrak{G}$ удовлетворяет уравнению (4) тогда и только тогда, когда*

$$\left\{ \sum_{i=-m}^{-1} \lambda^i (a_i - \lambda R(a_i)) \mid a_i \in \mathfrak{G}, m > 0 \right\} \quad (5)$$

является подалгеброй Ли в алгебре токов, дополнительной к подалгебре рядов Тейлора. Алгебра (5) содержит главный идеал алгебры многочленов $\mathfrak{G}[\lambda^{-1}]$, порожденный $f(\lambda^{-1})$, где f — минимальный многочлен оператора R .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Пусть оператор $R: \mathfrak{G} \rightarrow \mathfrak{G}$ диагонализуем, $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ — его спектр и $\mathfrak{G}_i$ — соответствующие собственные подпространства. Тогда*

*Исследования были выполнены при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 99-01-00294) и INTAS (проект 1782).

R удовлетворяет уравнению (4), если и только если подпространства $\mathfrak{G}_i$ и $\mathfrak{G}_i + \mathfrak{G}_j$ являются подалгебрами Ли в $\mathfrak{G}$ для всех различных i и j от 1 до k .

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Уравнение (4) совпадает с (2) для важного частного случая, когда R имеет только собственные значения $\lambda_1 = 1$ и $\lambda_2 = -1$, т. е. $R = \Pi_1 - \Pi_2$, где Π_i — проектор на $\mathfrak{G}_i$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Предложение 2 позволяет построить k -параметрическое семейство решений $R = \sum_{i=1}^k \lambda_i \Pi_i$ уравнения (4), если известно разложение алгебры Ли $\mathfrak{G}$ в прямую сумму подпространств $\mathfrak{G}_i$, таких, что $\mathfrak{G}_i$ и $\mathfrak{G}_i + \mathfrak{G}_j$ являются подалгебрами Ли в $\mathfrak{G}$. Параметрами служат числа λ_i , которые могут быть выбраны произвольно.

ПРИМЕР 1. В алгебре Ли $\mathfrak{G} = gl(2)$ над любой ассоциативной алгеброй $\mathfrak{A}$ выберем подпространства

$$\mathfrak{G}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \right\}, \quad \mathfrak{G}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}, \quad \mathfrak{G}_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a & a \end{pmatrix} \right\}.$$

Легко видеть, что каждое из них и сумма любых двух являются подалгебрами Ли в $gl(2)$.

Приведем обобщение этого примера на случай произвольных 3-градуированных алгебр Ли $\mathfrak{G} = \mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$ (т. е. $[\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_j] \subseteq \mathfrak{g}_{i+j}$, где $\mathfrak{g}_i = \{0\}$ при $i > 1$ и при $i < -1$).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Пусть $\mathfrak{G}$ есть 3-градуированная алгебра Ли, $\mathfrak{h}_1$ — подалгебра Ли в $\mathfrak{g}_0$ и e — элемент из $\mathfrak{g}_1$, такие, что $\dim \mathfrak{h}_1 = \dim \mathfrak{g}_1$ и $[\mathfrak{h}_1, e] = \mathfrak{g}_1$. Тогда $\mathfrak{h}_2 = \exp(\text{ad}_e)(\mathfrak{h}_1 \oplus \mathfrak{g}_{-1})$ является дополнительной подалгеброй к $\mathfrak{g}_0$.

Положим

$$\mathfrak{G}_1 = \mathfrak{g}_0, \quad \mathfrak{G}_2 = \mathfrak{h}_2 \cap (\mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1), \quad \mathfrak{G}_3 = \mathfrak{h}_2 \cap (\mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_{-1}).$$

Очевидно, что $\mathfrak{G}_i$ — подалгебры Ли в $\mathfrak{G}$ и $\mathfrak{G}_1 + \mathfrak{G}_2 = \mathfrak{g}_0 + \mathfrak{g}_1$, $\mathfrak{G}_1 + \mathfrak{G}_3 = \mathfrak{g}_0 + \mathfrak{g}_{-1}$, $\mathfrak{G}_2 + \mathfrak{G}_3 = \mathfrak{h}_2$ — также подалгебры Ли. Согласно замечанию 3, эта конструкция позволяет строить трехпараметрические решения уравнения (4) для 3-градуированных алгебр Ли.

В случае примера 1 $\mathfrak{h}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$, $e = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. В качестве $\mathfrak{h}_1$ можно было выбрать более общую подалгебру $\left\{ \begin{pmatrix} a_+ & 0 \\ 0 & -a_- \end{pmatrix} \right\}$, где a_+ и a_- — проекции элемента a относительно произвольного разложения присоединенной алгебры Ли к $\mathfrak{A}$ в сумму двух дополнительных подалгебр.

Еще один пример решения уравнения (4) дает следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Пусть $\mathfrak{A}$ — ассоциативная алгебра, $\mathfrak{G}$ — ее присоединенная алгебра Ли и r — некоторый элемент из $\mathfrak{A}$. Тогда оператор $R: \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{A}$ левого умножения на r удовлетворяет уравнению (4).

Следующее утверждение показывает, что каждое решение уравнения (4) приводит к паре согласованных линейных скобок Пуассона на $\mathfrak{G}^*$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. Пусть оператор R удовлетворяет уравнению (4). Определим на $\mathfrak{G}$ операцию формулой

$$[a, b]_R = [R(a), b] + [a, R(b)] - R([a, b]).$$

Тогда для любых чисел α и β операция $\alpha[a, b] + \beta[a, b]_R$ является лиевской.

2. Интегрируемые системы, связанные с решениями уравнения (4). Рассмотрим сначала системы обыкновенных нелинейных уравнений вида

$$q_t = [R(q), q], \quad (6)$$

где $q \in \mathfrak{G}$, а оператор R удовлетворяет уравнению (4). В ситуации предложения 4 система (6) совпадает с уравнением $q_t = [r, q]$ на ассоциативных алгебрах, которое подробно изучено в работе [8].

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Для любого решения R уравнения (4) система (6) обладает иерархией коммутирующих между собой симметрий $q_{t_{n,m}} = [R^n(q^m), q]$, $n, m \in \mathbb{N}$.

Оказывается, что система (6) может быть решена с помощью конечномерного метода факторизации (другое название этого метода — схема Адлера–Константа–Симса). Рассмотрим конечномерную алгебру Ли $\mathfrak{H}$, которая является факторалгеброй алгебры $\mathfrak{G}[\lambda^{-1}]$ по идеалу, порожденному $f(\lambda^{-1})$, где f — минимальный многочлен оператора R . Обозначим через $\mathfrak{H}_-$ факторалгебру алгебры (5) по этому идеалу, а через $\mathfrak{H}_+$ и M — образы алгебр $\mathfrak{G}$ и $\lambda^{-1}\mathfrak{G}$ соответственно при каноническом гомоморфизме. Можно проверить, что $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_- \oplus \mathfrak{H}_+$ и, кроме того, M является $\mathfrak{H}_+$ -модулем. Тогда уравнение $p_t = [p_+, p]$, где $p \in \mathfrak{H}$ и $+$ обозначает проекцию на $\mathfrak{H}_+$ параллельно $\mathfrak{H}_-$, решается методом факторизации, а (6) является ограничением этого уравнения на подмодуль M (см., например, [3]).

Второй класс интегрируемых систем состоит из уравнений типа модели Гайзенберга на орбите полупростого элемента в алгебре Ли $\mathfrak{G}$. Эти уравнения обладают представлением Лакса, где оператор L имеет вид $D_x + \lambda^{-1}q + R(q)$. Явный вид оператора A и уравнение для q содержатся в [4]. Отметим, что системы типа уравнения Гайзенберга, связанные с решением уравнения (4), подпадают под общую схему работы [4], однако явным образом там не упоминаются.

По-видимому, новыми являются квадратичные гиперболические системы (ср. с [7]) вида

$$p_y = [p, R^{-1}(q)], \quad q_x = [q, R(p)], \quad (7)$$

где $p, q \in \mathfrak{G}$, а оператор R удовлетворяет уравнению (4). Уравнение (7) обладает представлением Лакса с $L = D_x + \lambda^{-1}p + R(p)$, $A = D_y + \lambda q + R^{-1}(q)$. Если p и q лежат на орбитах полупростых элементов, то уравнение обладает высшими симметриями и законами сохранения, которые строятся методом формальной диагонализации (см. [6, 4]). Поскольку йордановы пары находятся во взаимно однозначном соответствии с 3-градуированными алгебрами Ли, предложение 3 позволяет строить трехпараметрические семейства интегрируемых систем (7) на йордановых парах. Явные формулы в случае простых йордановых пар будут приведены в следующей работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Белавин А. А., Дринфельд В. Г. Функц. анализ и его прил., **16**, вып. 3, 1–29 (1982).
2. Семенов-Тян-Шанский М. А. Функц. анализ и его прил., **17**, вып. 4, 17–33 (1983).
3. Голубчик И. З., Соколов В. В. ТМФ, **110**, №3, 339–350 (1997).
4. Голубчик И. З., Соколов В. В. ТМФ, **120**, №2, 248–255 (1999).
5. Голубчик И. З., Соколов В. В. ТМФ, **112**, №3, 375–383 (1997).
6. Дринфельд В. Г., Соколов В. В. В кн.: Итоги науки и техники. Современные проблемы математики, т. 24, 1984, с. 81–180.
7. Бормисов А. А., Гудкова Е. С., Мукминов Ф. Х. ТМФ, **113**, №2, 261–275 (1997).
8. Михайлов А. В., Соколов В. В.

ТМФ, **122**, №1, 88–101 (2000). 9. Frölicher A., Nijenhuis A. Indag. Math., **18**, 338–359 (1956).

Башкирский государственный
педагогический институт,
Центр нелинейных исследований
при ИТФ им. Л. Д. Ландау
e-mail: sokolov@landau.ac.ru

Поступило в редакцию
7 апреля 1999 г.

УДК 517.43

Задача интегральной геометрии, связанная с тройкой грассмановых многообразий*

© 2000. М. И. ГРАЕВ

Рассматриваются интегральные преобразования $\mathcal{I}_{kp}$, относящие функциям f на многообразии H_p p -мерных плоскостей в $\mathbb{R}^n$ функции $\mathcal{I}_{kp}f$ на многообразии H_k k -мерных плоскостей в $\mathbb{R}^n$, где $0 \leq p < k < n$. По определению значение $\mathcal{I}_{kp}f(a)$ равно для любого $a \in H_k$ интегралу функции f по множеству всех p -плоскостей, содержащихся в a .

В статье построены локальные формулы обращения, выражающие функцию $\mathcal{I}_{rp}f$ через функцию $\mathcal{I}_{kp}f$ при любых p, r и k , таких, что $0 \leq p \leq r < k$, $k + p < n$ и $k - r$ четно. Локальность означает, что $\mathcal{I}_{rp}f(h)$ при любом $h \in H_r$ выражается через значения функции $\mathcal{I}_{kp}f$ только на множестве k -плоскостей, параллельных и бесконечно близких к h . Случай $r = p$, когда $\mathcal{I}_{rp}f$ совпадает с f , был разобран в [5].

Заметим, что при нечетном $k - p$ функцию f на H_p можно восстановить по функции $\mathcal{I}_{kp}f$ в два шага: сначала по $\mathcal{I}_{kp}f$ восстанавливается $\mathcal{I}_{p+1,p}f$, а затем по $\mathcal{I}_{p+1,p}f$ восстанавливается f . На основании данной статьи решение первой из этих задач дается локальной формулой обращения. Нелокальная формула обращения для случая $r = p$ и нечетного $k - p$ построена в [6].

0. Плоскости в $\mathbb{R}^n$ произвольной размерности k мы будем задавать уравнениями вида $x_i = \sum_{j=1}^k a_i^j x_{n-k+j} + a_i^{k+1}$, $i = 1, \dots, n - k$, и коэффициенты этих уравнений, т. е. элементы $(n - k) \times (k + 1)$ -матрицы $a = \|a_i^j\|$, примем в качестве локальных координат на многообразии H_k k -мерных плоскостей. Матрицы и отвечающие им плоскости будем обозначать одинаковыми буквами. Пусть $p < k$. Представим $(n - k) \times (k + 1)$ -матрицу a и $(n - p) \times (p + 1)$ -матрицу b в блочной форме: $a = (a', a'')$, $b = \begin{pmatrix} b' \\ b'' \end{pmatrix}$, где a' и a'' — матрицы из $k - p$ и $p + 1$ столбцов соответственно, а b' и b'' — матрицы из $n - k$ и $k - p$ строк соответственно. Тогда условие, что p -мерная плоскость b содержится в k -мерной плоскости a , имеет следующий вид:

$$b' = a' b'' + a''. \quad (1)$$

*Исследования поддержаны РФФИ, грант 98-01-00798.