Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. И. Граев, Задача интегральной геометрии, связанная с тройкой грассмановых многообразий, *Функц. анализ и его прил.*, 2000, том 34, выпуск 4, 78–81

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa329>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.205.225.156

26 апреля 2023 г., 12:47:33

ТМФ, **122**, №1, 88–101 (2000). 9. Frölicher A., Nijenhuis A. Indag. Math., **18**, 338–359 (1956).

Башкирский государственный
педагогический институт,
Центр нелинейных исследований
при ИТФ им. Л. Д. Ландау
e-mail: sokolov@landau.ac.ru

Поступило в редакцию
7 апреля 1999 г.

УДК 517.43

Задача интегральной геометрии, связанная с тройкой грассмановых многообразий*

© 2000. М. И. ГРАЕВ

Рассматриваются интегральные преобразования $\mathcal{I}_{kp}$, относящие функциям f на многообразии H_p p -мерных плоскостей в $\mathbb{R}^n$ функции $\mathcal{I}_{kp}f$ на многообразии H_k k -мерных плоскостей в $\mathbb{R}^n$, где $0 \leq p < k < n$. По определению значение $\mathcal{I}_{kp}f(a)$ равно для любого $a \in H_k$ интегралу функции f по множеству всех p -плоскостей, содержащихся в a .

В статье построены локальные формулы обращения, выражающие функцию $\mathcal{I}_{rp}f$ через функцию $\mathcal{I}_{kp}f$ при любых p , r и k , таких, что $0 \leq p \leq r < k$, $k + p < n$ и $k - r$ четно. Локальность означает, что $\mathcal{I}_{rp}f(h)$ при любом $h \in H_r$ выражается через значения функции $\mathcal{I}_{kp}f$ только на множестве k -плоскостей, параллельных и бесконечно близких к h . Случай $r = p$, когда $\mathcal{I}_{rp}f$ совпадает с f , был разобран в [5].

Заметим, что при нечетном $k - p$ функцию f на H_p можно восстановить по функции $\mathcal{I}_{kp}f$ в два шага: сначала по $\mathcal{I}_{kp}f$ восстанавливается $\mathcal{I}_{p+1,p}f$, а затем по $\mathcal{I}_{p+1,p}f$ восстанавливается f . На основании данной статьи решение первой из этих задач дается локальной формулой обращения. Нелокальная формула обращения для случая $r = p$ и нечетного $k - p$ построена в [6].

0. Плоскости в $\mathbb{R}^n$ произвольной размерности k мы будем задавать уравнениями вида $x_i = \sum_{j=1}^k a_i^j x_{n-k+j} + a_i^{k+1}$, $i = 1, \dots, n - k$, и коэффициенты этих уравнений, т. е. элементы $(n - k) \times (k + 1)$ -матрицы $a = \|a_i^j\|$, примем в качестве локальных координат на многообразии H_k k -мерных плоскостей. Матрицы и отвечающие им плоскости будем обозначать одинаковыми буквами. Пусть $p < k$. Представим $(n - k) \times (k + 1)$ -матрицу a и $(n - p) \times (p + 1)$ -матрицу b в блочной форме: $a = (a', a'')$, $b = \begin{pmatrix} b' \\ b'' \end{pmatrix}$, где a' и a'' — матрицы из $k - p$ и $p + 1$ столбцов соответственно, а b' и b'' — матрицы из $n - k$ и $k - p$ строк соответственно. Тогда условие, что p -мерная плоскость b содержится в k -мерной плоскости a , имеет следующий вид:

$$b' = a' b'' + a''. \quad (1)$$

*Исследования поддержаны РФФИ, грант 98-01-00798.

1. Интегральные преобразования $\mathcal{J}_{kp}$. Обозначим через $d\mu(a)$ меру на многообразии матриц $a = \|a_i^j\|$ любого фиксированного типа: $d\mu(a) = \prod_{i,j} da_i^j$. Пусть H_p и H_k — многообразия p -мерных и k -мерных плоскостей в $\mathbb{R}^n$, где $0 \leq p < k < n$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Введем интегральное преобразование $\mathcal{J}_{kp}$, относящее функциям $f(b) = f(b', b'')$ из пространства Шварца $S(H_p)$ следующие функции $\mathcal{J}_{kp}f(a', a'')$ на H_k :

$$\mathcal{J}_{kp}f(a', a'') = \int f(a'b'' + a'', b'') d\mu(b''). \quad (2)$$

Если $p + k \geq n$, то $\dim H_p > \dim H_k$, а потому оператор $\mathcal{J}_{kp}$ имеет ненулевое ядро. В дальнейшем будем предполагать, что $p + k < n$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Если трактовать матрицы b как точки координатного пространства $\mathbb{R}^N$, где $N = (n - p)(p + 1)$, то уравнения (1) задают $(n - k)(k + 1)$ -мерное семейство $(k - p)(p + 1)$ -мерных плоскостей в $\mathbb{R}^N$, а интегральное преобразование $\mathcal{J}_{kp}$ относит функциям на $\mathbb{R}^N$ их интегралы по плоскостям этого семейства.

Обозначим через $\tilde{f}(\xi, \eta)$ преобразование Фурье функции $f(b', b'')$ на H_p и через $\tilde{\varphi}(a', \xi)$ преобразование Фурье по a'' функции $\varphi(a', a'')$ на H_k , т. е.

$$\tilde{f}(\xi, \eta) = \int f(b', b'') \exp(i \operatorname{Tr}(b'\xi + b''\eta)) d\mu(b') d\mu(b''),$$

$$\tilde{\varphi}(a', \xi) = \int \varphi(a', a'') \exp(i \operatorname{Tr}(a''\xi)) d\mu(a'').$$

Здесь ξ, η — соответственно $(p + 1) \times (n - k)$ -матрица и $(p + 1) \times (k - p)$ -матрица.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Если $\varphi = \mathcal{J}_{kp}f$, то функции $\tilde{f}$ и $\tilde{\varphi}$ связаны следующим соотношением:

$$\tilde{\varphi}(a', \xi) = \tilde{f}(\xi, -\xi a'). \quad (3)$$

Введем линейные дифференциальные операторы

$$D_{i_1, \dots, i_s}^{j_1, \dots, j_s} = \det \|\partial / \partial a_{i_\beta}^{j_\alpha}\|_{\alpha, \beta=1, \dots, s},$$

где a_i^j — локальные координаты в H_k . Из предложения 1 следует

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. При $k + p < n - 1$ функция $\varphi = \mathcal{J}_{kp}f$, где $f \in S(H_p)$, удовлетворяет следующей системе дифференциальных уравнений степени $p + 2$:

$$D_{i_1, \dots, i_{p+2}}^{i, k-p+1, \dots, k+1} \varphi = 0 \quad (4)$$

для любых $i = 1, \dots, k - p$ и $i_1, \dots, i_{p+2} = 1, \dots, n - k$.

2. Дифференциальные формы $\kappa_i^j \varphi$ на H_k . Введем следующие операторы d_p^q в пространстве дифференциальных форм на H_k , повышающие степени форм на единицу:

$$d_p^q = \sum_{s=1}^{n-k} \frac{\partial}{\partial a_s^p} da_s^q, \quad p, q = 1, \dots, k + 1.$$

Пусть $i = \|i_{uv}\|$, $j = \|j_{uv}\|$ — произвольные $(p + 1) \times (k - r)$ -матрицы с элементами $i_{uv}, j_{uv} \in \{1, \dots, k + 1\}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Обозначим через κ_i^j следующий оператор в пространстве дифференциальных форм на H_k :

$$\kappa_i^j = \bigwedge_{v=1}^{k-r} \bigwedge_{u=1}^{p+1} d_{iuv}^{j_{uv}}. \quad (5)$$

Положим, в частности,

$$\kappa^j = \bigwedge_{v=1}^{k-r} \bigwedge_{u=1}^{p+1} d_{k-p+u}^{j_{uv}}, \quad \kappa = \bigwedge_{v=1}^{k-r} \bigwedge_{u=1}^{p+1} d_{k-p+u}^v. \quad (6)$$

В случае κ^j будем предполагать, что для каждого u числа $j_{u1}, \dots, j_{u, k-r}$ попарно различны (в противном случае $\kappa^j = 0$).

В силу определения, если φ — произвольная функция на H_k , то $\kappa_i^j \varphi$, $\kappa^j \varphi$ и $\kappa \varphi$ — дифференциальные формы степени $(p+1)(k-r)$ на H_k . Обозначим через $(\kappa_i^j)^h \varphi$, $(\kappa^j)^h \varphi$ и $\kappa^h \varphi$ ограничения этих форм на подмногообразие $H_k^h \subset H_k$ k -плоскостей, содержащих произвольную фиксированную r -плоскость $h \in H_r$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Для любых $i = \|i_{uv}\|$, $j = \|j_{uv}\|$ и $h \in H_r$ дифференциальная форма $(\kappa_i^j)^h(\mathcal{J}_{kp}f)$ на H_k^h является линейной комбинацией форм

$$\kappa^h(\mathcal{J}_{kp}f_{\beta_1, \dots, \beta_s}^{\alpha_1, \dots, \alpha_s}), \quad s = 0, 1, \dots, (p+1)(k-r),$$

где

$$f_{\beta_1, \dots, \beta_s}^{\alpha_1, \dots, \alpha_s}(b) = \prod_{i=1}^s b_{n-k+\beta_i}^{\alpha_i} f(b), \quad \alpha_i = 1, \dots, p+1, \beta_i = 1, \dots, k-p.$$

В частности,

$$(\kappa^j)^h(\mathcal{J}_{kp}f) = c_j(h) \kappa^h(\mathcal{J}_{kp}f), \quad (7)$$

где $c_j(h)$ зависит только от $j = \|j_{uv}\|$ и h .

Это предложение вытекает из следующих лемм 1 и 2 и тождества $d_i^j \wedge d_i^{j'} = -d_i^{j'} \wedge d_i^j$ для любых i, j, j' .

ЛЕММА 1. Для любых $i = 1, \dots, k-p$ и $s = 1, \dots, n-k$ имеем

$$\frac{\partial}{\partial a_i^s}(\mathcal{J}_{kp}f) = \sum_{\beta=1}^{p+1} \frac{\partial}{\partial a_s^{\beta}}(\mathcal{J}_{kp}f_{n-k+i}^{\beta}), \quad \text{где } f_{n-k+i}^{\beta}(b) = b_{n-k+i}^{\beta} f(b).$$

ЛЕММА 2. На H_k^h каждый вектор $da^j = (da_1^j, \dots, da_{n-k}^j)$ линейно выражается через $da^1, \dots, da^{k-r}$.

ТЕОРЕМА 1. Если $\varphi = \mathcal{J}_{kp}f$, то для любой r -плоскости $h \in H_r$, где $p \leq r < k$, дифференциальные формы $(\kappa_i^j)^h \varphi$ на H_k^h замкнуты при любых $i = \|i_{uv}\|$, $j = \|j_{uv}\|$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу предложения 3 достаточно доказать замкнутость форм $\kappa^h \varphi$, т.е. что $d(\kappa \varphi)|_{H_k^h} = 0$, где $d = \sum_{i=1}^{k+1} d_i^i$. Далее, в силу леммы 2 форма $d_i^i(\kappa \varphi)|_{H_k^h}$ является при любом i линейной комбинацией форм $d_i^s(\kappa \varphi)|_{H_k^h}$, где $s = 1, \dots, k-r$. Поэтому достаточно доказать, что

$$d_i^j \wedge (d_{k-p+1}^j \wedge \dots \wedge d_{k+1}^j) \varphi = 0 \quad (8)$$

для любых $i = 1, \dots, k+1$ и $j = 1, \dots, k-r$. Если $i > k-p$, то равенство (8) очевидно; если $i \leq k-p$, то левую часть равенства (8) можно представить в виде

$$\sum_{s_0, s_1, \dots, s_{p+1}} D_{s_0, s_1, \dots, s_{p+1}}^{i, k-p+1, \dots, k+1} \varphi da_{s_0}^j \wedge \dots \wedge da_{s_{p+1}}^j, \quad (9)$$

и равенство (8) следует из предложения 2.

3. Формулы обращения. Пусть $h \in H_r$ — любая r -плоскость в $\mathbb{R}^n$, где $p \leq r < k$, и пусть γ^h — произвольный $(p+1)(k-r)$ -мерный цикл в многообразии H_k^h k -плоскостей, содержащих h .

ТЕОРЕМА 2. Если $\varphi = \mathcal{I}_{kp} f$, где $f \in S(H_p)$, то для любых $i = \|i_{uv}\|$ и $j = \|j_{uv}\|$ интеграл $\int_{\gamma^h} (\kappa_i^j)^h \varphi$ есть линейная комбинация интегралов $(\mathcal{I}_{rpf}_{\beta_1, \dots, \beta_s}^{\alpha_1, \dots, \alpha_s})(h)$ с коэффициентами, не зависящими от f ; при нечетном $k-r$ этот интеграл равен нулю для любого цикла γ^h . В частности,

$$\int_{\gamma^h} (\kappa^j)^h \varphi = C_j(\gamma^h) \mathcal{I}_{rpf}(h), \quad (10)$$

где множитель $C_j(\gamma^h)$ зависит только от j , h и класса гомологий цикла γ^h . Если $k-r$ четно, то существует цикл γ^h , такой, что $C_j(\gamma^h) \neq 0$.

ПРИМЕР. Пусть h' — произвольная $(k+p+1)$ -мерная плоскость, содержащая r -мерную плоскость h , и γ^h — шубертовский цикл в H_k , состоящий из всех k -плоскостей, содержащих h и содержащихся в h' . Тогда $\dim \gamma^h = (p+1)(k-r)$ и $C_j(\gamma^h) \neq 0$ при четном $k-r$.

ПРИМЕЧАНИЕ. Все результаты этой статьи переносятся на случай комплексных плоскостей в $\mathbb{C}^n$. Заметим, что в комплексном случае операторы κ_i^j нужно заменить на $\kappa_i^j \wedge \overline{\kappa_i^j}$, а формулы обращения имеют место без ограничения на четность $k-r$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гельфанд И. М., Гиндикин С. Г., Граев М. И. Интегральная геометрия в аффинном и проективном пространствах. Современные проблемы математики. Т. 16, Итоги науки и техники, ВИНТИ АН СССР, М., 1980, с. 53–226.
2. Гельфанд И. М., Граев М. И., Вилленкин Н. Я. Интегральная геометрия и связанные с ней вопросы теории представлений. Обобщенные функции, вып. 5., Физматгиз, М., 1962.
3. Гельфанд И. М., Граев М. И., Шапиро З. Я. Функци. анализ и его прил., **1**, вып. 1, 15–31 (1967).
4. Гельфанд И. М., Граев М. И., Шапиро З. Я. Функци. анализ и его прил., **4**, вып. 1, 14–32 (1970).
5. Гельфанд И. М., Граев М. И., Шапиро З. Я. ДАН СССР, **193**, №2, 259–262 (1970).
6. Gelfand I. M., Graev M. I., Roşu R. J. Operator Theory, **12**, №2, 359–383 (1984).
7. Граев М. И. Функци. анализ и его прил., **30**, вып. 4, 71–74 (1996).

Институт системных исследований РАН, Москва
mgraeve@niisi.msk.ru

Поступило в редакцию
21 января 1999 г.