Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Х. Вальтер, А. Л. Скубачевский, О гиперболичности быстро осциллирующих периодических решений функционально-дифференциальных уравнений, *Функц. анализ и его прил.*, 2005, том 39, выпуск 1, 82–85

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa33>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.217.227

26 апреля 2023 г., 11:39:59

О гиперболичности быстро осциллирующих периодических решений функционально-дифференциальных уравнений*

© 2005. Х.-О. ВАЛЬТЕР, А. Л. СКУБАЧЕВСКИЙ

1. Рассмотрим периодические решения уравнения

$$x'(t) = -\mu x(t) + f(x(t-1)), \quad (1)$$

где $\mu > 0$ и $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ — нечетная непрерывно дифференцируемая функция, такая, что $f(y) > 0$ при $y > 0$. В случае рациональных периодов, меньших чем 2, мы получим критерий гиперболичности периодического решения x . В случае рациональных периодов, больших чем 2, критерий гиперболичности периодических решений был получен в [1].

2. Пусть $C = C([-1, 0], \mathbb{R})$ и $C_{\mathbb{C}} = C([-1, 0], \mathbb{C})$ — банаховы пространства с нормой $\|\varphi\| = \max_{t \in [-1, 0]} |\varphi(t)|$. Под решением уравнения (1) понимается либо вещественнозначная дифференцируемая на $\mathbb{R}$ функция, удовлетворяющая уравнению (1) всюду, либо вещественнозначная непрерывная функция, определенная на некотором неограниченном полуинтервале $[t_0 - 1, \infty)$, $t_0 \in \mathbb{R}$, которая дифференцируема и удовлетворяет уравнению (1) для любого $t > t_0$. Если y — отображение интервала $[t - 1, t]$ в множество B , то функция $y_t: [-1, 0] \rightarrow B$ определяется по формуле $y_t(s) = y(t+s)$. Таким образом, решения $x = y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ уравнения (1) определяют орбиты $o(y) = \{y_t : t \in \mathbb{R}\} \subset C$.

Предположим, что существует $2r$ -периодическое решение $x: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ уравнения (1), имеющее симметрию $x(t) = -x(t+r)$ для всех $t \in \mathbb{R}$. Поведение орбит $o(y)$ решений уравнения (1), близких к периодической орбите $o(x) = \{x_t : t \in \mathbb{R}\}$, определяется спектром оператора монодромии $\mathcal{M}: C_{\mathbb{C}} \rightarrow C_{\mathbb{C}}$, заданного формулой $\mathcal{M}\varphi = v_{2r}^{\varphi}$, где $v^{\varphi}: [-1, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$ — решение начальной задачи

$$v'(t) = -\mu v(t) + f'(x(t-1))v(t-1) \quad (t > 0), \quad (2)$$

$$v(t) = \varphi(t) \quad (t \in [-1, 0]). \quad (3)$$

Оператор $\mathcal{M}^j$, где $j \in \mathbb{N}$ и $j2r \geq 1$, является компактным. Поэтому все точки спектра $\lambda \neq 0$ оператора $\mathcal{M}$ — изолированные собственные значения конечной алгебраической кратности $m(\mathcal{M}, \lambda)$. Эти собственные значения называются *мультипликаторами Флоке*. Число 1 является мультипликатором Флоке, соответствующим собственному вектору x'_0 . Результаты о мультипликаторах Флоке для периодических решений различных функционально-дифференциальных уравнений см. в [1–7]. Если мультипликатор Флоке 1 простой ($m(\mathcal{M}, 1) = 1$) и единичная окружность не содержит других мультипликаторов Флоке, то периодическое решение x называется *гиперболическим*. В этом случае все орбиты,

*Работа второго автора выполнена при финансовой поддержке Mercator programm der Deutschen Forschungsgemeinschaft, РФФИ (грант №04-01-00256) и Министерства образования и науки РФ (грант №Е02-1.0-131).

близкие к $o(x)$ и определенные на неограниченных полуинтервалах, сходятся экспоненциально к $o(x)$ при $|t| \rightarrow \infty$, см. гл. 10 в [2] и гл. XIV в [6].

3. Мы введем оператор $V: C_{\mathbb{C}} \rightarrow C_{\mathbb{C}}$ по формуле $(V\varphi)(t) = v^{\varphi}(r+t)$ для всех $\varphi \in C_{\mathbb{C}}$, $t \in [-1, 0]$, где $v^{\varphi}: [-1, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$ — решение начальной задачи (2), (3). Очевидно, что $\mathcal{M} = V^2$ и -1 является собственным значением оператора V .

Установим взаимосвязь между уравнением

$$(V - \lambda I)\varphi = \psi \quad (4)$$

и краевой задачей для системы обыкновенных дифференциальных уравнений, где $\lambda \neq 0$ и $\psi \in C_{\mathbb{C}}$ заданы.

Пусть $r = N/M$, где целые числа $M > N > 0$ взаимно простые. Положим $m = \min\{s \in \mathbb{N} : sN > M\}$. Так как $N < M$, то $m \geq 2$. Пусть $n = M - (m-1)N$. Очевидно, что $0 < n < N$. Положим $\tau = 1/M$. Тогда $r = N\tau$ и $1 = M\tau$. Введем вектор-функцию $U: [0, \tau] \rightarrow \mathbb{C}^N$ с координатами $u_1, \dots, u_N$ по формуле

$$u_i(t) = v^{\varphi}(t + (i-1)\tau) \quad (t \in [0, \tau], i = 1, \dots, N). \quad (5)$$

Рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$u'_i(t) = -\mu u_i(t) + \lambda^{-m} a_i(t) u_{i+N-n}(t) - a_i(t) \sum_{s=1}^m \lambda^{-s} \psi_{i+(s-1)N}(t) \quad (6)$$

$$(t \in (0, \tau), i = 1, \dots, n),$$

$$u'_i(t) = -\mu u_i(t) + \lambda^{-(m-1)} a_i(t) u_{i-n}(t) - a_i(t) \sum_{s=1}^{m-1} \lambda^{-s} \psi_{i+(s-1)N}(t) \quad (7)$$

$$(t \in (0, \tau), i = n+1, \dots, N)$$

с краевыми условиями

$$u_{i+1}(0) - u_i(\tau) = 0 \quad (i = 1, \dots, N-1), \quad u_1(0) - \lambda^{-1} u_N(\tau) = -\lambda^{-1} \psi_M(\tau), \quad (8)$$

где $a_i(t) = f'(x(t+(i-1-M)\tau))$ ($t \in [0, \tau]$, $i = 1, \dots, N$), $\psi_j(t) = \psi(t+(j-1-M)\tau)$ ($t \in [0, \tau]$, $j = 1, \dots, M$).

ТЕОРЕМА 1. Если $\varphi \in C_{\mathbb{C}}$ — решение уравнения (4), то вектор-функция $U: [0, \tau] \rightarrow \mathbb{C}^N$, заданная формулой (5), является решением задачи (6)–(8). Обратно, если $U: [0, \tau] \rightarrow \mathbb{C}^N$ — решение задачи (6)–(8), то функция $\varphi \in C_{\mathbb{C}}$, заданная формулой

$$\varphi(t) = \lambda^{-(m-l)} u_i(t - (i-1 - (m-l)N)\tau) - \sum_{s=1}^{m-l} \lambda^{-s} \psi(t + (s-1)N\tau) \quad (9)$$

$$(t \in [(i-1 - (m-l)N)\tau, (i - (m-l)N)\tau]; i = mN - M + 1, \dots, N, \\ \text{если } l = 0, \text{ и } i = 1, \dots, N, \text{ если } 1 \leq l \leq m-1; l = 0, \dots, m-1),$$

является решением уравнения (4).

4. Рассмотрим однородную систему обыкновенных дифференциальных уравнений (6), (7), т. е. $\psi_i(t) \equiv 0$ ($t \in [0, \tau]$, $i = 1, \dots, M$). Обозначим через $S_{\lambda}: [0, \tau] \rightarrow \mathbb{C}^{N \times N}$ фундаментальную матрицу этой системы, такую, что $S_{\lambda}(0) = E$, где

$\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Пусть $e_{\lambda j}(t)$ обозначает j -ю строку матрицы $S_\lambda(t)$. Введем матрицу $Q(\lambda) \in \mathbb{C}^{N \times N}$ по формуле

$$Q(\lambda) = \begin{pmatrix} e_{\lambda 1}(0) - \lambda^{-1} e_{\lambda N}(\tau) \\ e_{\lambda 2}(0) - e_{\lambda 1}(\tau) \\ \vdots \\ e_{\lambda N}(0) - e_{\lambda, N-1}(\tau) \end{pmatrix} \quad (10)$$

и рассмотрим аналитическую функцию $q: \mathbb{C} \setminus \{0\} \ni \lambda \mapsto \det Q(\lambda)$.

Пусть $j_q(\lambda)$ обозначает порядок нуля $\lambda \neq 0$ функции q . Если $q(\lambda) \neq 0$ и $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, положим $j_q(\lambda) = 0$. Обозначим через $m(\lambda) = m(V, \lambda)$ алгебраическую кратность собственного значения $\lambda \neq 0$. Если $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ не является собственным значением оператора V , мы положим $m(\lambda) = 0$. Обозначим через $j_1, \dots, j_{N_0}$, $N_0 \leq N - 1$, $j_i < j_{i+1}$, все индексы, такие, что $a_{j_\nu}(\tau) \neq 0$ ($\nu = 1, \dots, N_0$).

Обозначим через $\widehat{Q}(\lambda) \in \mathbb{C}^{N \times N}$ присоединенную матрицу для $Q(\lambda)$ с элементами $(-1)^{i+j} Q_{ji}(\lambda)$ в i -й строке и j -м столбце, где $Q_{ji}(\lambda)$ — определитель матрицы, полученной из $Q(\lambda)$ вычеркиванием j -й строки и i -го столбца. Пусть $\widehat{Q}^0(\lambda) \in \mathbb{C}^{N \times (N_0+1)}$ обозначает матрицу с элементами $\widehat{Q}_{\eta, \nu+1}^0(\lambda)$ ($\eta = 1, \dots, N$, $\nu = 0, \dots, N_0$), заданными формулой

$$\widehat{Q}_{\eta, \nu+1}^0(\lambda) = (-1)^{\eta+j_\nu+1} Q_{j_\nu+1, \eta}(\lambda) \quad (\eta = 1, \dots, N, \nu = 0, \dots, N_0). \quad (11)$$

Положим $\mathcal{N}_q = \{\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : q(\lambda) = 0\}$.

ТЕОРЕМА 2. *Имеют место соотношения $\sigma(V) \setminus \{0\} = \mathcal{N}_q$ и $m(V, \lambda) \leq j_q(\lambda)(N - \text{rank } Q(\lambda))$ для всех $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Если к тому же $\|\widehat{Q}^0(\lambda_0)\| \neq 0$ для некоторого $\lambda_0 \in \mathcal{N}_q$, то $m(V, \lambda_0) = j_q(\lambda_0)$ и $\dim \text{Ker}(V - \lambda_0 I) = 1$.*

Положим $\Gamma_1 = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1\}$.

Из теоремы 2 мы получаем следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 3. *Если $\Gamma_1 \cap \mathcal{N}_q = \{-1\}$, $\text{rank } Q(-1) = N - 1$ и $q'(-1) \neq 0$, то $2r$ -периодическое решение x уравнения (1) является гиперболическим. Обратно, если $2r$ -периодическое решение x уравнения (1) является гиперболическим и к тому же $\|\widehat{Q}^0(-1)\| \neq 0$, то $\Gamma_1 \cap \mathcal{N}_q = \{-1\}$, $\text{rank } Q(-1) = N - 1$ и $q'(-1) \neq 0$.*

5. Покажем теперь, как вычислить матрицу $S_\lambda(t)$ в некоторых частных случаях. Предположим, что $a_{i_1} \equiv 0$ ($t \in [0, \tau]$) для некоторого $i_1 \in \{1, \dots, N\}$. Это условие выполняется, если существует $a > 0$, такое, что (I) $f'(\xi) = 0$ ($|\xi| \geq a$) и (II) $|x(t)| \geq a$ ($t \in [(i_1 - 1 - M)\tau, (i_1 - M)\tau]$). Тогда, аналогично [1, §4], можно показать, что существует перестановка p индексов $1, \dots, N$, такая, что для каждого $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ соответствующая перестановка строк и столбцов матрицы $S_\lambda(t)$ приводит к треугольной матрице $\widetilde{S}_\lambda(t)$ с нулями над главной диагональю, функциями $e^{-\mu t}$ на главной диагонали и функциями вида

$$e^{-\mu t} \int_0^t b_{p(j)}(\xi_j, \lambda) \int_0^{\xi_j} b_{p(j-1)}(\xi_{j-1}, \lambda) \dots \int_0^{\xi_{k+2}} b_{p(k+1)}(\xi_{k+1}, \lambda) d\xi_{k+1} \dots d\xi_{j-1} d\xi_j,$$

стоящими в j -й строке и k -м столбце ($k < j$), где

$$b_{p(j)}(\xi_j, \lambda) = \begin{cases} \lambda^{-m} a_{p(j)}(\xi_j), & \text{если } 1 \leq p(j) \leq n, \\ \lambda^{-(m-1)} a_{p(j)}(\xi_j), & \text{если } n+1 \leq p(j) \leq N. \end{cases}$$

Матрица Q_λ пределяется по формуле (10). Таким образом, в данном случае критерий гиперболичности легко проверяется.

ЛИТЕРАТУРА

1. Вальтер Х.-О., Скубачевский А. Л. Труды ММО, **64**, 3–53 (2003).
2. Хейл Дж. Теория функционально-дифференциальных уравнений. Мир, М., 1984.
3. Chow S. N., Diekmann O., Mallet-Paret J. Japan J. Appl. Math., **2**, No. 2, 433–469 (1985).
4. Chow S. N., Walther H. O. Trans. Amer. Math. Soc., **307**, No. 1, 127–142 (1988).
5. Walther H. O. Mem. Amer. Math. Soc., **402** (1989).
6. Diekmann O., van Gils S., Verduyn Lunel S., Walther H. O. Delay Equations. Functional, Complex, and Nonlinear Analysis. Springer-Verlag, New York, 1995.
7. Mallet-Paret J., Sell G. J. Differential Equations, **125**, No. 2, 385–440 (1996).

Mathematisches Institut,
Universitaet Giessen, Germany
e-mail: Hans-Otto.Walther@math.uni-giessen.de

Поступило в редакцию
28 июня 2004 г.

Московский авиационный институт
e-mail: skub@lector.ru

УДК 517.948

Об аппроксимации решений операторных уравнений методом наименьших квадратов*

© 2005. М. Л. ГОРБАЧУК

Пусть $\mathfrak{H}$ — сепарабельное гильбертово пространство над полем $\mathbb{C}$ комплексных чисел, $(\cdot, \cdot)$ и $\|\cdot\|$ — скалярное произведение и норма в нем, а A — обратимый замкнутый линейный оператор с $\mathcal{D}(A^{-1}) = \mathfrak{H}$ ($\mathcal{D}(\cdot)$ — область определения оператора).

Рассмотрим уравнение

$$Au = f, \quad f \in \mathfrak{H}, \quad (1)$$

и будем искать его приближенное решение u_n методом наименьших квадратов, т. е. в виде

$$u_n = \sum_{k=1}^n \alpha_k e_k,$$

где $\{e_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ — наперед выбранная линейно независимая система векторов из $\mathcal{D}(A)$ (так называемая координатная система), а $\alpha_k \in \mathbb{C}$ таковы, что величина

*Работа поддержана Совместным грантом CRDF и правительства Украины UM1-2567-OD03.