Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Досиев, Голоморфные функции от базиса
нильпотентной алгебры Ли, *Функц. анализ и его
прил.*, 2000, том 34, выпуск 4, 82–84

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa330>

Использование Общероссийского математического портала Math-
Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользователь-
ским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.147.182.235

26 апреля 2023 г., 17:55:01

УДК 517.51

Голоморфные функции от базиса нильпотентной алгебры Ли

© 2000. А. А. Досиев

В работе [1] Дж. Тейлором предложена общая схема построения функционального исчисления, в частности включающая в себя процедуру пополнения универсальной обертывающей алгебры $\mathcal{U}(E)$ конечномерной алгебры Ли E . Задача о функциональном исчислении для заданного гомоморфизма $\alpha: \mathcal{U}(E) \rightarrow A$ в произвольную банахову алгебру A относительно некоторого семейства топологических алгебр «функций» $\mathcal{O}_\gamma$ и гомоморфизмов $\varphi_\gamma: \mathcal{U}(E) \rightarrow \mathcal{O}_\gamma$ формулируется как вопрос о нахождении тех $\mathcal{O}_\gamma$, для которых α продолжается до непрерывного гомоморфизма $\alpha_\gamma: \mathcal{O}_\gamma \rightarrow A$, $\alpha_\gamma \varphi_\gamma = \alpha$. В данной заметке мы введем в рассмотрение топологические алгебры $\mathcal{O}_E(D_r)$, которые обобщают алгебры $\mathcal{O}(D_r)$ голоморфных функций на открытых полидисках $D_r = D_{r_1} \times \dots \times D_{r_n}$ в $\mathbb{C}^n$ на случай, когда «координатные функции» являются базисом конечномерной nilпотентной алгебры Ли E . Мы устанавливаем при естественных условиях наличие функционального исчисления относительно семейства алгебр $\mathcal{O}_E(D_r)$ и свойство отображения спектра (в версии З. Слодковского [2]) голоморфными функциями некоммутирующих переменных.

1. Если не оговорено противное, всюду далее E — комплексная nilпотентная алгебра Ли с базисом $e = (e_1, \dots, e_n)$, в котором присоединенное представление приводится к строго треугольному виду. Для наборов чисел $s = (s_i)_{i=1}^n$, $t = (t_i)_{i=1}^n$ положим $s < t$, если $s_i < t_i$ для всех $i = 1, \dots, n$; кроме того, положим $s^{-1} \cdot \alpha(e) = (s_1^{-1} \alpha(e_1), \dots, s_n^{-1} \alpha(e_n))$ для гомоморфизма $\alpha: E \rightarrow A$ и для $s > 0$. Пусть M — ограниченное подмножество банаховой алгебры A , $\|M\| = \sup\{\|a\| : a \in M\}$, $M^n = \{a_1 \cdots a_n : a_i \in M\}$ и $\text{SG}(M) = \bigcup_{n \geq 1} M^n$. Число $\rho(M) = \lim_n \|M^n\|^{1/n}$ называется совместным спектральным радиусом множества M [3].

ЛЕММА 1. Пусть $\mathcal{F}$ — банахова алгебра Ли и $\mathcal{F}_{(1)}$ — замкнутый единичный шар в $\mathcal{F}$. Существуют банахова алгебра $\mathcal{A}(\mathcal{F})$ и непрерывный гомоморфизм $\varphi: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{A}(\mathcal{F})$, такие, что для любых банаховой алгебры A и непрерывного гомоморфизма $u: \mathcal{F} \rightarrow A$ с ограниченной полугруппой $\text{SG}(u(\mathcal{F}_{(1)}))$ существует единственный непрерывный гомоморфизм $v: \mathcal{A}(\mathcal{F}) \rightarrow A$, такой, что $v \cdot \varphi = u$.

Ясно, что если $\rho(u(\mathcal{F}_{(1)})) < 1$, то полугруппа $\text{SG}(u(\mathcal{F}_{(1)}))$ ограничена. Для любого набора $r > 0$ рассмотрим банахову алгебру Ли E с ℓ_1 -нормой относительно базиса $r^{-1} \cdot e$. Обозначим получаемую из леммы 1 алгебру $\mathcal{A}(E)$ через $\mathcal{A}(r^{-1} \cdot e)$. Тогда $\mathcal{U}(E)$ является плотной подалгеброй в $\mathcal{A}(r^{-1} \cdot e)$, и если E коммутативна, то $\mathcal{A}(r^{-1} \cdot e)$ — аналитическая банахова алгебра [4, гл. 1], отвечающая набору r .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Алгеброй голоморфных функций $\mathcal{O}_E(D_r)$ на полидиске D_r называется пополнение мультинормированной [5, п. 1.2.4] алгебры $(\mathcal{U}(E), \|\cdot\|_s, 0 < s < r)$, где $\|\cdot\|_s$ — норма в $\mathcal{U}(E)$, индуцированная нормой в $\mathcal{A}(s^{-1} \cdot e)$.

Если $D_r = \mathbb{C}^n$, то $\mathcal{O}_E(D_r)$ является оболочкой Аренса–Майкла [5, п. 5.2.21] алгебры $\mathcal{U}(E)$. Для коммутативной алгебры Ли E алгебра $\mathcal{O}_E(D_r)$ совпадает

с $\mathcal{O}(D_r)$. Можно показать, что любой элемент $f \in \mathcal{O}_E(D_r)$ единственным способом разлагается в сходящийся (в топологии алгебры $\mathcal{O}_E(D_r)$) степенной ряд $f = \sum a_{t_1 \dots t_n} e_1^{t_1} \dots e_n^{t_n}$. Из этого следует, что любая конечномерная подалгебра Ли в $\mathcal{O}_E(D_r)$ является нильпотентной. Пусть $e_1, \dots, e_m$ образуют базис дополнителя к коммутанту подпространства алгебры Ли E и $D_{r(m)} = D_{r_1} \times \dots \times D_{r_m}$. Рассмотрим радикал Джекобсона $\text{Rad } \mathcal{O}_E(D_r)$.

ТЕОРЕМА 1. *Отображение $\pi: \mathcal{O}_E(D_r) \rightarrow \mathcal{O}(D_{r(m)})$, $\pi(\sum a_{i_1 \dots i_n} e_1^{i_1} \dots e_n^{i_n}) = \sum a_{i_1 \dots i_m 0 \dots 0} z_1^{i_1} \dots z_m^{i_m}$ ($n - m$ нулей), является непрерывным гомоморфизмом алгебр и $\ker(\pi) = \text{Rad } \mathcal{O}_E(D_r)$. При этом $\mathcal{O}_E(D_r)$ разлагается в топологическую прямую сумму подпространств $\text{Rad } \mathcal{O}_E(D_r) \oplus S$, где S топологически изоморфно алгебре $\mathcal{O}(D_{r(m)})$.*

ТЕОРЕМА 2. *Пусть A — банахова алгебра. Гомоморфизм алгебр Ли $\alpha: E \rightarrow A$ продолжается до непрерывного гомоморфизма алгебр $\alpha: \mathcal{O}_E(D_r) \rightarrow A$, $\alpha(f) = f(\alpha(e))$, в том и только в том случае, когда $\rho(r^{-1} \cdot \alpha(e)) < 1$.*

Пусть $\mathcal{X}_r(E)$ — множество всех непрерывных мультипликативных линейных функционалов алгебры $\mathcal{O}_E(D_r)$ и $\hat{D} = D_{r(m)} \times \{0\} \subseteq D_r$. Если $\lambda \in E^*$, $\lambda(e) \in \hat{D}$, то $\rho(r^{-1} \cdot \lambda(e)) < 1$ и по теореме 2 λ продолжается до $\lambda \in \mathcal{X}_r(E)$. Таким образом, $\mathcal{X}_r(E) = \hat{D}$.

Определение 1 можно распространить на конечномерные разрешимые алгебры Ли E . Отметим, что в нильпотентном случае канонический гомоморфизм $\mathcal{U}(E) \rightarrow \mathcal{O}_E(D_r)$ имеет нетривиальное ядро. Тем не менее теоремы 1 и 2 сохраняют силу и в этом случае.

Пусть теперь (X, α) — банахов E -модуль. Если имеет место формула $\rho(r^{-1} \cdot \alpha(e)) = \max_i \rho(r_i^{-1} \alpha(e_i))$, то условие $\rho(r^{-1} \cdot \alpha(e)) < 1$ в теореме 2 можно заменить условием, что для спектра $\sigma(\alpha(e_i))$ имеет место включение $\sigma(\alpha(e_i)) \subset D_{r_i}$, $1 \leq i \leq n$. Эта формула в виде $\rho(\{T_1, \dots, T_n\}) = \max_i \rho(T_i)$ справедлива для триангулируемого множества $\{T_1, \dots, T_n\}$ компактных операторов [6]. Поскольку любая конечномерная разрешимая алгебра Ли компактных операторов триангулируема [7], теорема 2 в этом случае допускает следующее уточнение: если $\alpha(E)$ состоит из компактных операторов, то α продолжается на $\mathcal{O}_E(D_r)$ в том и только в том случае, когда $\sigma(\alpha(e_i)) \subset D_{r_i}$, $1 \leq i \leq n$.

2. Пусть $\mathcal{F}$ — конечномерная алгебра Ли и $\Delta(\mathcal{F})$ — множество всех характеров алгебры Ли $\mathcal{F}$ (т.е. всех $\lambda \in \mathcal{F}^*$, $\lambda([\mathcal{F}, \mathcal{F}]) = 0$). Рассмотрим банахов $\mathcal{F}$ -модуль (X, α) , где $\alpha: \mathcal{F} \rightarrow B(X)$ — представление алгебр Ли. Для целого $p \geq 0$ пусть $C^p(\mathcal{F}, X)$ — пространство всех знакопеременных p -линейных форм на $\mathcal{F}$ со значениями в X . Рассмотрим коцепной комплекс, порожденный $\mathcal{F}$ -модулем (X, α_λ) , где $\alpha_\lambda = \alpha - \lambda$, $\lambda \in \Delta(\mathcal{F})$,

$$0 \rightarrow X \xrightarrow{d_\lambda^0} C^1(\mathcal{F}, X) \xrightarrow{d_\lambda^1} \dots \xrightarrow{d_\lambda^{p-1}} C^p(\mathcal{F}, X) \xrightarrow{d_\lambda^p} \dots$$

с дифференциалом

$$\begin{aligned} (d_\lambda^p \omega)(u_1, \dots, u_{p+1}) &= \sum_{i=1}^p (-1)^{i+1} \alpha_\lambda(u_i) \omega(u_1, \dots, \widehat{u}_i, \dots, u_{p+1}) \\ &\quad + \sum_{i=1}^p (-1)^{i+j} \omega([u_i, u_j], u_1, \dots, \widehat{u}_i, \dots, \widehat{u}_j, \dots, u_{p+1}), \end{aligned}$$

где $\omega \in C^p(\mathcal{F}, X)$, а $\hat{u}_i$ означает пропуск переменной u_i . Если $H^p(\lambda)$ есть p -е (преднормированное) пространство когомологий этого комплекса, то положим $\Sigma_p(\alpha) = \{\lambda \in \Delta(\mathcal{F}) : H^p(\lambda) \neq \{0\}\}$, $\Sigma_p^e(\alpha) = \{\lambda \in \Delta(\mathcal{F}) : \dim H^p(\lambda) = \infty\}$. Пусть $\sigma_{\delta,k}(\alpha) = \bigcup_{n-k \leq p \leq n} \Sigma_p(\alpha)$ ($\sigma_{\delta,k}^e(\alpha) = \bigcup_{n-k \leq p \leq n} \Sigma_p^e(\alpha)$), и пусть $\sigma_{\pi,k}(\alpha)$ ($\sigma_{\pi,k}^e(\alpha)$) есть множество всех $\lambda \in \Delta(\mathcal{F})$, для которых $\lambda \in \bigcup_{0 \leq p \leq k} \Sigma_p(\alpha)$ ($\lambda \in \bigcup_{0 \leq p \leq k} \Sigma_p^e(\alpha)$) или $H^{k+1}(\lambda)$ — неотделимое пространство, где $0 \leq k \leq n = \dim(\mathcal{F})$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Совокупность всех $\sigma_{\delta,k}(\alpha)$ и $\sigma_{\pi,k}(\alpha)$, $0 \leq k \leq n$, назовем *семейством спектров Слодковского* представления α . Соответственно *существенные спектры Слодковского* — это совокупность всех $\sigma_{\delta,k}^e(\alpha)$ и $\sigma_{\pi,k}^e(\alpha)$, $0 \leq k \leq n$.

В дальнейшем $\sigma(\alpha)$ ($\sigma^e(\alpha)$) обозначает какой-либо из спектров Слодковского (соответственно существенных спектров Слодковского) представления α .

Пусть теперь (X, α) — банахов E -модуль и $r > 0$ — набор, такой, что $\rho(r^{-1} \cdot \alpha(e)) < 1$. По теореме 2 гомоморфизм α продолжается до непрерывного представления $\alpha: \mathcal{O}_E(D_r) \rightarrow B(X)$. Пусть $\alpha_{\mathcal{F}}$ — его сужение на подалгебру Ли $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{O}_E(D_r)$. Если $\lambda \in \sigma(\alpha)$, то по проекционному свойству [8, 9] $\lambda(e_i) \in \sigma(\alpha(e_i))$, т. е. $\sigma(\alpha) \subseteq \mathcal{X}_r(E)$. Для всякого $M \subseteq \mathcal{X}_r(E)$ положим $M|_{\mathcal{F}} = \{\lambda|_{\mathcal{F}} : \lambda \in M\}$, где $\lambda|_{\mathcal{F}}$ — сужение характера λ на $\mathcal{F}$.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $\mathcal{F}$ — конечномерная подалгебра Ли в $\mathcal{O}_E(D_r)$, (X, α) — банахов E -модуль и $\rho(r^{-1} \cdot \alpha(e)) < 1$. Тогда

$$\sigma(\alpha_{\mathcal{F}}) = \sigma(\alpha_E)|_{\mathcal{F}}, \quad \sigma^e(\alpha_{\mathcal{F}}) = \sigma^e(\alpha_E)|_{\mathcal{F}}.$$

Пусть $f = (f_1, \dots, f_k)$ есть семейство образующих алгебры Ли $\mathcal{F}$ и $\text{sp}(\alpha(f), X) = \bar{f}(\sigma(\alpha))$, $\text{sp}^e(\alpha(f), X) = \bar{f}(\sigma^e(\alpha))$, где $\bar{f}: \Delta(\mathcal{F}) \rightarrow \mathbb{C}^k$, $\bar{f}(\lambda) = (\lambda(f_i))_{i=1}^k$. Согласно теореме 1, элементы $f_i \in \mathcal{F}$ определяют обычные функции $\pi(f_i)$ на $D_{r(m)}$, которые продолжаются на $D_{r(m)} \times \mathbb{C}^{n-m}$ как постоянные на слое $\mathbb{C}^{n-m}$ функции. Полученные функции обозначим через $\hat{f}_i$. Пусть $\hat{f} = (\hat{f}_1, \dots, \hat{f}_k)$.

СЛЕДСТВИЕ 1. Если $f = (f_1, \dots, f_k)$ порождает конечномерную подалгебру Ли в $\mathcal{O}_E(D_r)$, то $\text{sp}(f(a), X) = \hat{f}(\text{sp}(a, X))$, $\text{sp}^e(f(a), X) = \hat{f}(\text{sp}^e(a, X))$, где $a = \alpha(e)$.

Автор глубоко признателен Ю. В. Туровскому за постановку задачи и за ценные советы и А. Я. Хелемскому, В. С. Шульману и А. С. Файнштейну за полезное обсуждение работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Taylor J. Adv. Math., **9**, 183–252 (1972).
2. Slodkowski Z. Studia Math., **61**, 239–255 (1977).
3. Rota G.-C., Strang W. G. Indag. Math., **22**, 379–381 (1960).
4. Граузерт Г., Реммерт Р. Аналитические локальные алгебры. Наука, М., 1988.
5. Хелемский А. Я. Банаховы и полинормированные алгебры. Наука, М., 1989.
6. Туровский Ю. В. Функциональный анализ и его прил., **18**, вып. 2, 77–78 (1984).
7. Ваксман Л. Л., Гуракий Д. Л. Функциональный анализ и его прил., **8**, вып. 4, 81–82 (1974).
8. Fainstein A. S. J. Operator Theory, **29**, 3–27 (1993).
9. Ott C. Pacif. J. Math., **173**, 173–179 (1996).