Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Лаптев, Отрицательный спектр класса двумерных операторов Шрёдингера с потенциалами, зависящими от радиуса, *Функци. анализ и его прил.*, 2000, том 34, выпуск 4, 85–87

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa331>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.82.47.9

26 апреля 2023 г., 16:40:03

УДК 517.9

Отрицательный спектр класса двумерных операторов Шрёдингера с потенциалами, зависящими от радиуса

© 2000. А. ЛАПТЕВ

1. Введение и основной результат. Предлагаемая заметка посвящается изучению отрицательного спектра самосопряженного оператора Шрёдингера, действующего в $L^2(\mathbb{R}^d)$, $d \geq 2$,

$$H = H_{b,V} = -\Delta + b|x|^{-2} - V, \quad x \in \mathbb{R}^d, \quad b \in \mathbb{R}, \quad (1)$$

где $V \geq 0$ — локально интегрируемая функция в $\mathbb{R}^d$. Обозначим через $N_b(V)$ число отрицательных собственных чисел оператора (1). Если $d \geq 3$ и $b > -(d-2)^2/4$, то справедлива оценка Цвикеля–Либба–Розенблюма (см. [4, 8, 11])

$$N_b(V) \leq C(b, d) \int_{\mathbb{R}^d} V^{d/2} dx. \quad (2)$$

Известно также, что если $d = 2$ и $b = 0$, то сколь угодно малое возмущение неотрицательным потенциалом V приводит к появлению по крайней мере одного отрицательного собственного числа. Это означает, что в этом случае оценка (2) невозможна.

В работах [13, 14], а также в работе [2] (в более сильной форме) было показано, что при некоторых дополнительных условиях на потенциал V в случае $d = 2$ и $b = 0$ задача расщепляется на две. Первая определяется сужением оператора (1) на функции, зависящие только от $|x|$, что приводит к изучению одномерного оператора Шрёдингера. Его потенциал $\tilde{V}$ равен среднему значению V по сфере S^1 . В частности, для таких операторов в [3] получены необходимые и достаточные условия справедливости асимптотической формулы $N_{b=0}(\alpha\tilde{V}) = O(\alpha)$ при $\alpha \rightarrow \infty$. Вторая задача определяется классом функций, для которых среднее по сфере равно нулю. Для этого класса выполняется неравенство Харди (см. [9, 10]), что автоматически выделяет «подпирающий» член $b|x|^{-2}$ с некоторым $b > 0$. Именно этими обстоятельствами оправдывается введение члена $b|x|^{-2}$, $b > 0$, при изучении оператора Шрёдингера в $L^2(\mathbb{R}^2)$. Заметим, однако, что «снятие» виртуального уровня в нуле выбором $b > 0$ все еще не обеспечивает даже полуограниченности оператора (1) ($d = 2$), если предположить только, что $V \in L^1(\mathbb{R}^2)$.

Обозначим через $\mathcal{H}^1(\mathbb{R}^2)$ так называемое однородное пространство Соболева, определяемое равенством

$$\mathcal{H}^1(\mathbb{R}^2) = \left\{ u : \int \left(|\nabla u|^2 + \frac{|u|^2}{|x|^2} \right) dx < \infty \right\}.$$

Для потенциалов, зависящих от $|x|$, квадратичная форма

$$h_{b,V}[u] = \int_{\mathbb{R}^2} (|\nabla u|^2 + b|x|^{-2}|u|^2) dx - \int_{\mathbb{R}^2} V|u|^2 dx, \quad (3)$$

определенная на $\mathcal{H}^1(\mathbb{R}^2)$, полуограничена, замкнута и, следовательно, задает самосопряженный оператор $H_{b,V}$.

Нашим главным результатом является следующая теорема.

ТЕОРЕМА. Пусть $d = 2$, $b > 0$ и $V(x) = V(|x|) \geq 0$. Тогда

$$N_b(V) \leq \frac{A(b)}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^2} V(x) dx,$$

где

$$A(b) = \min_{\mu > 0} \{ \mu : \mu^{-1/2} \cdot (\#\{n : n^2 + b - \mu < 0, n \in \mathbb{Z}\}) \}. \quad (4)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Легко видеть, что $A(b) \rightarrow \infty$ при $b \rightarrow 0$. В частности, если $b < \mu \leq 1 + b$, то $A(b) = \mu^{-1/2}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Сформулированная выше теорема дает пример простого класса потенциалов, для которого верна оценка (2) в случае $d = 2$. По поводу обобщений этого результата см. [7].

2. Вспомогательный результат. При доказательстве теоремы мы используем предельный случай неравенства Либба–Тирринга для одномерного оператора Шрёдингера. Пусть

$$Lv(t) = -v''(t) - W(t)v(t), \quad W \geq 0, t \in \mathbb{R}^1, \quad (5)$$

есть самосопряженный оператор в $L^2(\mathbb{R}^1)$ с дискретным отрицательным спектром. Обозначим через $\{-\mu_k\}_{k=1}^\infty$ отрицательные собственные числа оператора L .

ЛЕММА. Если при введенных выше обозначениях $W \in L^1(\mathbb{R}^1)$ и $W \geq 0$, то

$$\sum_k \mu_k^{1/2} \leq \frac{1}{2} \int W(t) dt. \quad (6)$$

Постоянная $1/2$ в правой части неравенства (6) неулучшаема, что было недавно доказано в [6] (см. также [5]). Оценка величины $\sum_k \mu_k^{1/2}$ через $\|W\|_{L^1(\mathbb{R}^1)}$ с некоторой постоянной, большей чем $1/2$, была впервые получена в [15]. Заметим, что равенство в (6) достигается в случае, когда $W(t) = \delta(t)$. При этом возникает только одно отрицательное собственное число, равное $-1/4$. Оба доказательства, полученные в работах [6] и [15], основаны на принципе Бирмана–Швингера [1, 12].

3. Доказательство теоремы. Рассмотрим квадратичную форму (3) и введем полярные координаты $x = (r, \theta)$, $r \in \mathbb{R}_+$, $\theta \in [0, 2\pi]$. Тогда форма (3) перепишется в виде

$$h_{b,V}[u] = \int_0^\infty \int_0^{2\pi} (|u'_r|^2 + r^{-2}(|u'_\theta|^2 + (b - r^2 V(r))|u|^2)) r dr d\theta. \quad (7)$$

Обозначим через $\{-\lambda_n\}$ отрицательные собственные числа оператора H . Тогда в силу вариационного принципа

$$N_b(V) = \#\{n : -\lambda_n(H) < 0\} = \dim\{u : (Hu, u) \leq 0, u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})\}.$$

Это позволяет нам работать с функциями из класса $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$. Производя замену $r = e^t$ и $w(t, \theta) = u(e^t, \theta)$, $t \in \mathbb{R}$, $\theta \in [0, 2\pi]$, мы получаем, что (7)

переходит в форму

$$\tilde{h}[w] := \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\mathbb{S}^1} (|w'_t|^2 + (|w'_\theta|^2 + (b - \tilde{V})|w|^2)) dt d\theta, \quad \text{где } \tilde{V}(t) = e^{2t}V(e^t).$$

Пусть теперь $\{-\mu_k(\tilde{V})\}$ и $\{v_k(t)\}$, $k \in \mathbb{N}$, — собственные числа и собственные функции оператора (5), где в качестве потенциала выбрана функция $W = \tilde{V}$. Разделяя переменные, мы получаем, что собственные функции оператора, определяемого формой $\tilde{h}$, равны $v_k(t)e^{in\theta}$, $n \in \mathbb{Z}$, $k \in \mathbb{N}$, а соответствующие собственные числа равны $b + n^2 - \mu_k$. Таким образом,

$$\begin{aligned} N(V) &= \#\{(k, n) : b + n^2 - \mu_k, k \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{Z}\} \\ &\leq A(b) \sum \mu_k^{1/2} \leq \frac{A(b)}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{V}(t) dt \\ &= \frac{A(b)}{2} \int_{-\infty}^{\infty} V(e^t) e^{2t} dt \\ &= \frac{A(b)}{4\pi} \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} V(r) r dx \\ &= \frac{A(b)}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^2} V(x) dx, \end{aligned}$$

где постоянная $A(b)$ определена равенством (4). Доказательство завершено.

В заключение автор благодарит М. Соломяка за приглашение в институт Вейцманна (Реховот, Израиль), где автор имел возможность завершить работу над этой заметкой.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бирман М. Ш. Матем. сб., **55**, 125–174 (1961).
2. Birman M. Sh., Laptev A. Comm. Pure Appl. Math., **49**, 967–997 (1996).
3. Birman M. Sh., Solomyak M. Z. Adv. Soviet Math., **7**, 1–55 (1991).
4. Cwikel M. Ann. Math., **106**, 93–100 (1977).
5. Hundertmark D., Laptev A., Weidl T. Invent. Math., **140**, 693–704 (2000).
6. Hundertmark D., Lieb E. H., Thomas L. E. Adv. Theor. Math. Phys., **2**, 719–731 (1998).
7. Laptev A., Netrusov Yu. Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, **189**, 178–186 (1998).
8. Lieb E. H. Bull. Amer. Math. Soc., **82**, 751–753 (1976).
9. Maz'ya V. Sobolev Spaces. Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York–Tokyo (1985).
10. Opic B., Kufner A. Hardy-Type Inequalities. Pitman Research Notes in Mathematics Series, vol. 219, Longman Scientific & Technical, Harlow, 1990.
11. Розенблюм Г. В. Изв. ВУЗов, сер. матем., **1**, 75–86 (1976).
12. Schwinger J. Proc. Nat. Acad. Sci., **47**, 122–129 (1961).
13. Solomyak M. Israel J. Math., **86**, 253–276 (1994).
14. Solomyak M. Proc. London Math. Soc., **71**, 53–75 (1995).
15. Weidl T. Comm. Math. Phys., **178**, 135–146 (1996).

Королевская техническая школа,
факультет математики,
Стокгольм, Швеция
laptev@math.kth.se

Поступило в редакцию
7 апреля 1999 г.