Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. М. Маламуд, Л. Л. Оридорога, Теоремы полноты для систем дифференциальных уравнений, *Функц. анализ и его прил.*, 2000, том 34, выпуск 4, 88–90

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa332>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.187.58

26 апреля 2023 г., 15:35:19

УДК 517.9

Теоремы полноты для систем дифференциальных уравнений

© 2000. М. М. МАЛАМУД, Л. Л. ОРИДОРОГА

1. Введение. Рассмотрим систему уравнений

$$Ly := \frac{1}{i} B \frac{dy}{dx} + Q(x)y = \lambda y, \quad y = \text{col}(y_1, \dots, y_n) \quad (1)$$

с невырожденной диагональной матрицей $B = \text{diag}(\lambda_1 I_{n_1}, \dots, \lambda_r I_{n_r}) \in \mathbb{C}^{n \times n}$ и суммируемой $n \times n$ -матрицей Q , имеющей блочное (относительно разложения $\mathbb{C}^n = \mathbb{C}^{n_1} \oplus \dots \oplus \mathbb{C}^{n_r}$) представление $Q = (Q_{ij})_{i,j=1}^r$. При $r = 2$, $\lambda_1 = -\lambda_2 = 1$ и $Q_{11} = Q_{22} = 0$ система (1) эквивалентна системе Дирака [6]. При $r = n$ и $\lambda_j = \exp(2\pi i j/n)$ к системе (1) сводится (см. [5]) дифференциальное уравнение n -го порядка.

Присоединим к системе (1) невырожденные граничные условия

$$Cy(0) + Dy(1) = 0, \quad \text{Ker}(CC^* + DD^*) = \{0\}, \quad (2)$$

в которых $C, D \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Обозначим, далее, через $L_{C,D}$ оператор, порожденный в $L^p[0, 1] \otimes \mathbb{C}^n$ задачей (1)–(2).

В настоящем сообщении приводятся теоремы о полноте и минимальности в $L^p[0, 1] \otimes \mathbb{C}^n$ системы собственных и присоединенных функций (ССПФ) оператора $L_{C,D}$.

2. Асимптотика решений. Доказательство основных результатов опирается на теорему 1 об асимптотике решений системы (1), аналогичную теореме о решениях уравнения n -го порядка (см. [7]).

Будем придерживаться стандартных обозначений из книги [7].

ЛЕММА 1. Пусть $\mu_j = \lambda_j^{-1} \in \mathbb{C}$ ($1 \leq j \leq r$). Тогда комплексная плоскость $\mathbb{C}$ может быть разбита на секторы S_ν так, что после некоторой перестановки чисел $\{\mu_j\}_1^r$ для всех $\lambda \in S_\nu$ справедливы неравенства $\text{Re}(\mu_{j_1}\lambda) < \text{Re}(\mu_{j_2}\lambda) < \dots < \text{Re}(\mu_{j_r}\lambda)$.

Наряду с сектором $S = \{z \in \mathbb{C} : \varphi_1 < \arg z < \varphi_2\}$ рассматриваются вложенные в него секторы $S_\varepsilon = \{z \in \mathbb{C} : \varphi_1 + \varepsilon < \arg z < \varphi_2 - \varepsilon\}$, $\varepsilon > 0$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть матрица Q принадлежит $L^1[0, 1] \otimes \mathbb{C}^{n \times n}$ и в блочном (относительно разложения $\mathbb{C}^n = \mathbb{C}^{n_1} \oplus \dots \oplus \mathbb{C}^{n_r}$) представлении имеет нулевую диагональ: $Q_{jj}(x) = 0$, $x \in [0, 1]$ ($1 \leq j \leq r$), а S — один из секторов S_ν , указанных в лемме 1. Тогда при каждом $\varepsilon > 0$ и достаточно большом $R > 0$ в области $S_{\varepsilon,R} := \{z \in S_\varepsilon : |z| > R\}$ существует фундаментальная матрица решений $Y(x, \lambda)$ со следующими свойствами:

- (a) $Y(x, \lambda)$ аналитична по $\lambda \in S_{\varepsilon,R}$;
- (b) в блочном (относительно разложения $\mathbb{C}^n = \mathbb{C}^{n_1} \oplus \dots \oplus \mathbb{C}^{n_r}$) представлении $Y(x, \lambda) = (Y_{kj}(x, \lambda))_{k,j=1}^r$ она удовлетворяет равномерному по $x \in [0, 1]$

асимптотическому соотношению

$$Y(x, \lambda) = \begin{pmatrix} I_{n_1}(x, \lambda) & O_{12}(x, \lambda) & \dots & O_{1r}(x, \lambda) \\ O_{21}(x, \lambda) & I_{n_2}(x, \lambda) & \dots & O_{2r}(x, \lambda) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O_{r1}(x, \lambda) & O_{r2}(x, \lambda) & \dots & I_{n_r}(x, \lambda) \end{pmatrix} e(x, \lambda), \quad (3)$$

в котором

$$e(x, \lambda) := \text{diag}(e^{i\mu_1 \lambda x} I_{n_1}, \dots, e^{i\mu_r \lambda x} I_{n_r}), \quad (4)$$

$I_{n_j}(x, \lambda) = I_{n_j} + O_{jj}(x, \lambda)$, а $O_{jk}(x, \lambda): [0, 1] \times S_{\varepsilon, R} \rightarrow \mathbb{C}^{n_j \times n_k}$ — матрицы-функции с элементами вида $o(1)$, аналитические по $\lambda \in S_{\varepsilon, R}$. Если $Q \in L^\infty[0, 1] \otimes \mathbb{C}^{n \times n}$, то $O_{jk}(x, \lambda) = O(1/\lambda)$.

3. Теорема о полноте. Случай $B = B^*$. Пусть матрица B самосопряженная. Обозначим через $P_\pm$ спектральные проекторы на положительную и отрицательную части спектра матрицы B .

ТЕОРЕМА 2. Пусть $Q \in L^1[0, 1] \otimes \mathbb{C}^{n \times n}$, $1 \leq p < \infty$ и

$$T_1 := P_+ C + P_- D, \quad T_2 := P_- C + P_+ D.$$

Тогда ССПФ задачи (1) — (2) полна и минимальна в $L^p[0, 1] \otimes \mathbb{C}^n$, если

$$\det T_1 \neq 0, \quad \det T_2 \neq 0. \quad (5)$$

Заметим, что с помощью калибровочного преобразования доказательство сводится к случаю матрицы Q , имеющей нулевую диагональ.

Остановимся кратко на некоторых частных случаях теоремы 2, а также на необходимых условиях полноты.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть матрицы $C, D (\in \mathbb{C}^{n \times n})$ удовлетворяют условию (2) и неравенству $DB^{-1}D^* - CB^{-1}C^* \geq 0$ (≤ 0). Тогда:

1) ССПФ оператора $L_{C,D}$ полна и минимальна в $L^p[0, 1] \otimes \mathbb{C}^n$, если $\det T_1 \neq 0$ ($\det T_2 \neq 0$).

2) Если к тому же $\text{Im } Q(x) \geq 0$ ($\text{Im } Q(x) \leq 0$), $x \in [0, 1]$, то условие $\det T_1 \neq 0$ ($\det T_2 \neq 0$), эквивалентное паре условий (5), необходимо и достаточно для полноты ССПФ оператора $L_{C,D}$ в $L^2[0, 1] \otimes \mathbb{C}^n$. При этом в случае $\det T_1 = 0$ ($\det T_2 = 0$) дефект ССПФ в $L^2[0, 1] \otimes \mathbb{C}^n$ бесконечен.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть $C, D (\in \mathbb{C}^{n \times n})$ удовлетворяют условию (2) и равенству $CB^{-1}C^* - DB^{-1}D^* = 0$. Тогда ССПФ оператора $L_{C,D}$ полна и минимальна в $L^p[0, 1] \otimes \mathbb{C}^n$ ($1 \leq p < \infty$).

ЗАМЕЧАНИЯ. 1. По-видимому, условия (5) необходимы для полноты ССПФ произвольного, а не только диссипативного (см. предложение 1) оператора $L_{C,D}$. Это доказано пока при помощи операторов преобразования [5] для некоторых специальных типов граничных условий, а также (без операторов преобразования) в следующих случаях: (а) $B = I_n$, Q произвольна; (б) $B = B^*$ произвольна, а $Q = 0$; (с) $n = 2$. Во всех перечисленных случаях дефект ССПФ бесконечен.

2. В случае 2×2 -системы Дирака в [6] изучена близкая задача о полноте множества матриц-решений в пространстве матриц-функций.

В случае простейшего оператора $L_{C,D} = -iI_n \otimes d/dx$ ($B = I_n$, $Q = 0$) утверждение 2) предложения 1 довольно сложным образом доказано в [1].

3. При $p = 2$ следствие 1 вытекает из известной теоремы М. В. Келдыша [2, 4]. Действительно, в условиях следствия 1 оператор $L_{C,D}^0$ (вида (1)–(2) с $Q = 0$) самосопряжен, а его резольвента имеет конечный (равный единице) порядок.

4. Теорема о полноте. Случай $B \neq B^*$. Для формулировки результата нам понадобится следующая конструкция. Пусть $A = \text{diag}(a_1, \dots, a_n)$ — диагональная матрица с (не обязательно различными) элементами a_k , не лежащими на мнимой оси, $ia_k \notin \mathbb{R}$. Отправляясь от произвольных матриц $C, D \in \mathbb{C}^{n \times n}$, введем вспомогательную матрицу $T_A(C, D)$ следующим образом: k -й столбец в матрице $T_A(C, D)$ совпадает с k -м столбцом матрицы C , если $\text{Re } a_k > 0$, и с k -м столбцом матрицы D , если $\text{Re } a_k < 0$. Ясно, что $T_A(C, D) = T_{-A}(D, C)$.

ТЕОРЕМА 3. Пусть найдутся комплексные числа $\{z_j\}_1^3$, такие, что

(а) ноль — внутренняя точка треугольника $\Delta_{z_1 z_2 z_3}$;

(б) $\det T_{z_j B}(C, D) \neq 0$, $j \in \{1, 2, 3\}$.

Тогда ССПФ оператора $L_{C,D}$ вида (1) — (2) полна в $L^p[0, 1] \otimes \mathbb{C}^n$.

СЛЕДСТВИЕ 2. Если для некоторого $z \in \mathbb{C}$ матрицы $T_{zB}(C, D)$ и $T_{zB}(D, C)$ невырождены, то ССПФ оператора $L_{C,D}$ полна в $L^p[0, 1] \otimes \mathbb{C}^n$.

Это заведомо так при $C = \alpha D$, $\alpha \in \mathbb{C} \setminus 0$.

Остановимся кратко на связи теоремы 3 с уравнением n -го порядка

$$y^{(n)} + q_1 y^{(n-2)} + \dots + q_{n-1} y = \lambda^n y. \quad (6)$$

Как известно, полноту ССПФ краевой задачи с нерегулярными распадающимися краевыми условиями для уравнения (6), анонсированную М. В. Келдышем [3], впервые доказал А. А. Шкаликов [8]. В [5] показано, что уравнение (6) сводится к системе (1) с матрицей $B = \text{diag}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$, где $\varepsilon_j = \exp(2\pi i j/n)$. При этом из теоремы 3 вытекает полнота ССПФ некоторых классов граничных задач со спектральным параметром, рационально входящим в граничные условия. Метод доказательства теоремы 3 является развитием метода, примененного в [8].

Отметим, однако, что изученная в [8] задача приводит к задаче (1)–(2) с матрицами C и D , полиномиально зависящими от спектрального параметра. Этим задачам будет посвящена отдельная работа.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гинзбург Ю. П. Функциональный анализ и его прил., **5**, вып. 3, 32–41 (1971).
2. Гохберг И. Ц., Крейн М. Г. Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов. Наука, М., 1965.
3. Келдыш М. В. ДАН СССР, **77**, №1, 11–14 (1951).
4. Келдыш М. В., Лидский В. Б. В кн.: Труды IV Всесоюзного математического съезда, т. 1, 1963, с. 101–120.
5. Маламуд М. М. Труды ММО, **60**, 199–258 (1999).
6. Марченко В. А. Операторы Штурма–Лиувилля и их приложения. Наукова думка, Киев, 1977.
7. Наймарк М. А. Линейные дифференциальные операторы. Наука, М., 1968.
8. Шкаликов А. А. Функциональный анализ и его прил., **10**, вып. 4, 69–80 (1976).