Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. И. Рабанович, Ю. С. Самойленко, Когда сумма идемпотентов или проекторов кратна единице, *Функц. анализ и его прил.*, 2000, том 34, выпуск 4, 91–93

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa333>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.97.219

26 апреля 2023 г., 17:10:25

УДК 517.98

Когда сумма идемпотентов или проекторов кратна единице*

© 2000. В. И. РАБАНОВИЧ, Ю. С. САМОЙЛЕНКО

Пусть H — сепарабельное гильбертово пространство (конечномерное или счетно-мерное), $L(H)$ — пространство ограниченных операторов в H и I — единичный оператор в H . Операторы Q , такие, что $Q = Q^2$, называются идемпотентами в $L(H)$, а операторы P , для которых $P = P^2 = P^*$, — проекторами. В целом ряде работ (см., например, [1–10] и библиографию, приведенную в них) исследуется множество операторов, которые могут быть представлены в виде линейной комбинации конечного числа идемпотентов или проекторов. В настоящей работе изучаются множества $\Lambda_1 \subset \dots \subset \Lambda_n = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \text{существуют идемпотенты } Q_1, \dots, Q_n, \text{ такие, что } \sum_{k=1}^n Q_k = \lambda \cdot I\} \subset \Lambda_{n+1} \subset \dots \subset \Lambda_\infty = \bigcup_{n=1}^\infty \Lambda_n \subset \mathbb{C}$ и множества $\Sigma_1 \subset \dots \subset \Sigma_n = \{\alpha \in \mathbb{R} \mid \text{существуют } n \text{ проекторов } P_1, \dots, P_n, \text{ таких, что } \sum_{k=1}^n P_k = \alpha \cdot I\} \subset \Sigma_{n+1} \subset \dots \subset \Sigma_\infty = \bigcup_{n=1}^\infty \Sigma_n \subset \mathbb{R}$. Результаты заметки получены при изучении представлений алгебр $\mathbb{C}\langle q_1, \dots, q_n \mid q_k^2 = q_k, [\sum_{j=1}^n q_j, q_k] = 0, k = 1, \dots, n \rangle$ и $*$ -алгебр $\mathbb{C}\langle p_1, \dots, p_n \mid p_k^2 = p_k^* = p_k, [\sum_{j=1}^n p_j, p_k] = 0, k = 1, \dots, n \rangle$ и их применения к задачам теории операторов и операторных алгебр (см., например, обзор [6]).

1. Предварительная информация. Так как для любого идемпотента Q_k оператор $I - Q_k$ также является идемпотентом, а для любого проектора P_k оператор $I - P_k$ — проектор, то из того, что $\lambda \in \Lambda_n$, следует включение $n - \lambda \in \Lambda_n$. Аналогично включение $\alpha \in \Sigma_n$ приводит к включению $n - \alpha \in \Sigma_n$. Имеет место

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. $\Sigma_n \subset \{0, 1, 1 + \frac{1}{n-1}, [1 + \frac{1}{n-2}, n-1 - \frac{1}{n-2}], n-1 - \frac{1}{n-1}, n-1, n\}$.

ПРИМЕР 1. Для любого $n \geq 2$ существуют (строятся) n проекторов $P_1, \dots, P_n$ в конечномерном пространстве H ($\dim H = n-1$), таких, что $\sum_{k=1}^n P_k = (1 + \frac{1}{n-1}) \cdot I$. Для всех $i \neq j$ проекторы P_i и P_j не коммутируют, и семейство проекторов $P_1, \dots, P_n$ неприводимо. Таким образом, $\Sigma_n \ni 1 + \frac{1}{k-1}$ при всех $k \leq n$.

ПРИМЕР 2. Для любого рационального r , $1 > r = m/n > 0$, существуют (строятся) проекторы $P_1, \dots, P_{n+m}$ в H ($\dim H = n$), такие, что $P_1 + \dots + P_{n+m} = (1 + r)I$. Семейство $P_1, \dots, P_{n+m}$ неприводимо. Таким образом, Σ_∞ содержит все рациональные $r \geq 1$.

Примеры 1 и 2 можно построить при помощи теоремы 1 из [2].

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Если H конечномерно, то ненулевые решения уравнения $\sum_{k=1}^n Q_k = \lambda I$ могут существовать лишь при вещественных рациональных $\lambda = (\sum_{k=1}^n \text{Tr}(Q_k)) / \dim H \geq 1$, так как $\sum_{k=1}^n \text{Tr}(Q_k) \in \mathbb{N}$. Таким образом, множество тех $\lambda \in \Lambda_\infty$, для которых существуют ненулевые идемпотенты с суммой λI , в случае конечномерного пространства H совпадает с множеством рациональных $\lambda \geq 1$. Это следует также из результатов статьи [3].

2. Λ_n и Σ_n при $n \leq 4$.

*Исследования второго автора частично поддержаны грантом CRDF UM1-311.

ТЕОРЕМА 1. $\Sigma_1 = \Lambda_1 = \{0, 1\} \subset \Sigma_2 = \Lambda_2 = \{0, 1, 2\} \subset \Sigma_3 = \Lambda_3 = \{0, 1, \frac{3}{2}, 2, 3\} \subset \Sigma_4 = \Lambda_4 = \{0, 1, 2 \pm \frac{1}{k} (k \geq 2), 2, 2 \pm \frac{2}{2k+1} (k \in \mathbb{N}), 3, 4\}$.

Описание множеств Σ_n и Λ_n , $n \leq 4$, известно (см., например, [4, 6, 8, 9] и др.). Совпадение множеств Σ_n и Λ_n при $n \leq 4$ не случайно. Оказывается, что при $n = 4$ ($\lambda \neq 2$) для любого представления π алгебры $Q_{4,\lambda} = \mathbb{C}\langle q_1, \dots, q_4 \mid q_k^2 = q_k (k = 1, \dots, 4), \sum_1^4 q_k = \lambda e \rangle$ в $L(H)$ в H существует такое эквивалентное скалярное произведение, что π в новом скалярном произведении становится $*$ -представлением $*$ -алгебры $\mathcal{P}_{4,\lambda} = \mathbb{C}\langle p_1, \dots, p_4 \mid p_k^2 = p_k = p^* (k = 1, \dots, 4), \sum_1^4 p_k = \lambda e \rangle$. Все неприводимые $*$ -представления алгебры $\mathcal{P}_{4,\lambda}$ ($\lambda = \alpha > 0$) конечномерны. Описание неприводимых $*$ -представлений $*$ -алгебр $\mathcal{P}_{4,\alpha}$ см. в [5, 9–11].

ЗАМЕЧАНИЕ 2. В конечномерном векторном пространстве H представление единичного оператора в виде суммы n идемпотентов является ортогональным разложением единицы, т.е. обладает свойством $Q_i Q_j = Q_j Q_i = 0$, $i \neq j$ (см., например, [12]). Как следует из доказательства теоремы 1, при $n \leq 4$ это верно и когда H бесконечномерно. Конструкция операторов из теоремы 2 ниже показывает, что при $n \geq 5$ не каждое представление единичного оператора в виде суммы n идемпотентов является ортогональным.

3. Λ_n ($n = 5, \dots, \infty$).

ТЕОРЕМА 2. $\Lambda_5 = \Lambda_\infty = \mathbb{C}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение теоремы непосредственно следует из [1], где доказано, что любой ограниченный оператор в H есть сумма пяти идемпотентов. Для любого $\lambda \in \mathbb{C}$ мы приведем непосредственную конструкцию пяти идемпотентов $Q_i = Q_i^2 \in L(H)$ ($i = 1, \dots, 5$), которые в сумме дают скалярный оператор λI . Пусть $H = l_2 \oplus l_2 \oplus l_2$ и $\mathcal{J}$ — тождественный оператор в l_2 . Определим следующие операторы из $L(H)$:

$$Q_1 = \begin{pmatrix} a\mathcal{J} & 3a\mathcal{J} & \frac{1}{3}(4\lambda - 7) \cdot \mathcal{J} \\ a\mathcal{J} & 3a\mathcal{J} & \frac{1}{3}(4\lambda - 7) \cdot \mathcal{J} \\ a\mathcal{J} & 3a\mathcal{J} & \frac{1}{3}(4\lambda - 7) \cdot \mathcal{J} \end{pmatrix}, \quad Q_2 = \begin{pmatrix} a\mathcal{J} & -3a\mathcal{J} & \frac{1}{3}(4\lambda - 7) \cdot \mathcal{J} \\ -a\mathcal{J} & 3a\mathcal{J} & -\frac{1}{3}(4\lambda - 7) \cdot \mathcal{J} \\ a\mathcal{J} & -3a\mathcal{J} & \frac{1}{3}(4\lambda - 7) \cdot \mathcal{J} \end{pmatrix},$$

$$Q_3 = \begin{pmatrix} 4a\mathcal{J} & 0 & -\frac{2}{3}(4\lambda - 7) \cdot \mathcal{J} \\ 0 & 0 & 0 \\ -2a\mathcal{J} & 0 & \frac{1}{3}(4\lambda - 7) \cdot \mathcal{J} \end{pmatrix}, \quad Q_4 = \begin{pmatrix} 2b\mathcal{J} & 0 & (7 - 3\lambda)b \cdot S_1^* \\ 0 & 2b\mathcal{J} & (7 - 3\lambda)b \cdot S_2^* \\ S_1 & S_2 & \frac{1}{2}(7 - 3\lambda) \cdot \mathcal{J} \end{pmatrix},$$

$$Q_5 = \begin{pmatrix} 2b\mathcal{J} & 0 & -(7 - 3\lambda)b \cdot S_1^* \\ 0 & 2b\mathcal{J} & -(7 - 3\lambda)b \cdot S_2^* \\ -S_1 & -S_2 & \frac{1}{2}(7 - 3\lambda) \cdot \mathcal{J} \end{pmatrix},$$

где $a = \frac{1}{6}(5 - 2\lambda)$, $b = \frac{1}{4}(3\lambda - 5)$, $S_1^*(x_0, x_1, \dots) = (x_0, x_2, x_4, \dots)$, $S_2^*(x_0, x_1, \dots) = (x_1, x_3, x_5, \dots)$, $S_1(x_0, x_1, \dots) = (x_0, 0, x_1, 0, x_2, \dots)$ и $S_2(x_0, x_1, \dots) = (0, x_0, 0, x_1, 0, x_2, \dots)$. Операторы S_i , S_i^* связаны соотношениями $S_1^* S_2 = 0$ и $S_1^* S_1 = I = S_2^* S_2 = S_1 S_1^* + S_2 S_2^*$.

Непосредственно проверяется, что

$$Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4 + Q_5 = \lambda \cdot I.$$

Эта конструкция является обобщением примера, приведенного в [7], пяти идемпотентов, сумма которых равна нулю. $\square$

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Из приведенных в доказательстве соотношений между S_i следует, что любое представление алгебры Кунца $\mathcal{Q}_2$ дает подходящую пару операторов S_1, S_2 [13].

4. Σ_n ($n \geq 6, n = \infty$).

ТЕОРЕМА 3. Если $n \geq 6$, то $\Sigma_n \supset \{0, 1, 1 + \frac{k}{k(n-3)+2} \ (k \in \mathbb{N}), [1 + \frac{1}{n-3}, n-1 - \frac{1}{n-3}], n-1 - \frac{k}{k(n-3)+2} \ (k \in \mathbb{N}), n-1, n\}$.

Ее доказательство основано на следующих трех леммах:

ЛЕММА 1. $\Sigma_n \supset \{1 + \frac{k}{k(n-3)+2}, k \in \mathbb{N}\}$ для любого $n \geq 6$.

ЛЕММА 2. $\Sigma_n \supset [2, n-2]$ для $n \geq 6$.

ЛЕММА 3. $\Sigma_n \supset \{[1 + \frac{1}{n-3}, 2]\}$ для $n \geq 6$.

Доказательство лемм конструктивно.

СЛЕДСТВИЕ 1. $\Sigma_\infty = \{0, [1, \infty)\}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Следствие 1 можно получить также, применяя теорему 4.12 из [6].

Авторы благодарны профессорам В. С. Шульману и Торстену Эрхардту за полезные обсуждения изложенных вопросов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Pearcy C., Topping D. M.* Michigan Math. J., **14**, 453–465 (1967).
2. *Fillmore P. A.* J. Funct. Anal., **4**, 146–152 (1969).
3. *Hartwing R. E., Putcha M. S.* Linear Multilinear Algebra, **26**, 279–286 (1990).
4. *Wang J.-H.* Ph. D. Dissertation, National Chiao Tung Univ., Hsinchu, Taiwan, 1991.
5. *Беспалов Ю. Н.* Укр. матем. ж., **44**, 309–317 (1992).
6. *Wu P. Y.* In: Functional Analysis and Operator Theory, Banach Center Publ., vol. 30, Warszawa, 1994, 337–361.
7. *Bart H., Ehrhardt T., Silbermann B.* Integral Equations Operator Theory, **19**, 123–134 (1994).
8. *Ehrhardt T.* (unpublished). Chemnitz, 1995.
9. *Galinsky D. V., Muratov M. A.* In: Spectral Evolutionary Problems, no. 8, Simferopol, Tavria, 1998, pp. 15–22.
10. *Ostrovskii V., Samoilenko Yu.* Introduction to the Theory of Representations of Finitely Presented *-Algebras. 1. Representations by Bounded Operators. Gordon and Breach, London, 1999.
11. *Городний М. Ф., Подколзин Г. Б.* В кн.: Спектральная теория операторов и бесконечномерный анализ, ИМ АН УССР, Киев, 1984, с. 66–76.
12. *Глазман И. М., Любич Ю. И.* Конечномерный линейный анализ в задачах. Наука, М., 1969.
13. *Cuntz J.* Comm. Math. Phys., **57**, 173–185 (1977).

Институт математики НАНУ,
Киев, Украина

Поступило в редакцию
9 апреля 1999 г.