Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Г. Костюченко, К. А. Мирзоев, Обобщенные якобиевы матрицы и индексы дефекта обыкновенных дифференциальных операторов с полиномиальными коэффициентами, *Функц. анализ и его прил.*, 1999, том 33, выпуск 1, 30–45

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa336>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.93.64.190

26 апреля 2023 г., 03:25:31

УДК 517.984, 517.929

Обобщенные якобиевы матрицы и индексы дефекта обыкновенных дифференциальных операторов с полиномиальными коэффициентами*

© 1999. А. Г. Костюченко, К. А. Мирзоев

Светлой памяти Миши Юркина посвящаем

В настоящей работе исследуются задачи об индексах дефекта якобиевых матриц с квадратными матричными элементами и обыкновенных симметрических дифференциальных операторов с полиномиальными коэффициентами в пространствах l_2 и $\mathcal{L}_2(-\infty, +\infty)$ соответственно. Как известно, якобиевы матрицы с матричными элементами возникают, например, в связи с матричной проблемой моментов. В данной статье, в частности, найден критерий того, что якобиева матрица с матричными элементами специального вида является вполне неопределенной (определение см. ниже). Из него следует, что операторы, порожденные вполне неопределенными якобиевыми матрицами в пространстве l_2 , являются целыми операторами минимального типа (см. [1, 2]). Следовательно, самосопряженные расширения этих операторов имеют дискретный спектр, спектральные меры — определенную структуру и т. д.

Еще одним источником возникновения подобных якобиевых матриц является матричное представление обыкновенных симметрических дифференциальных операторов с полиномиальными коэффициентами на всей оси. Таким образом обнаруживаются новые классы целых операторов минимального типа с определенными дефектными числами. При этом дефектные числа таких операторов могут быть меньше или равны, но — что особенно интересно — могут оказаться и больше порядка соответствующего дифференциального выражения.

Таким образом, оказывается, что открытый М. Г. Крейном в [1, 2] класс целых операторов значительно шире, чем ранее предполагалось.

§0. Предварительные сведения

1. Пусть $\mathbb{C}^p$ ($p \geq 1$) — евклидово p -мерное пространство вектор-столбцов со стандартным скалярным произведением $y^*x = \sum_{j=1}^p x_j \bar{y}_j$, где комплексные числа x_j, y_j ($j = 1, \dots, p$) — координаты векторов x и y соответственно, а звездочка означает комплексно-сопряженную матрицу. Пусть далее A_j, B_j ($j = 0, 1, \dots$) — квадратные матрицы порядка p , элементы кото-

* Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант № 96-01-00333 и грант поддержки научных школ № 96-15-01292.

рых являются комплексными числами, причем A_j — самосопряженные матрицы и B_j^{-1} ($j = 0, 1, \dots$) существуют. Бесконечную матрицу

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} A_0 & B_0 & O & O & \dots \\ B_0^* & A_1 & B_1 & O & \dots \\ O & B_1^* & A_2 & B_2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix},$$

где O — нулевая матрица порядка p , назовем якобиевой матрицей с матричными элементами. Обозначим через l_p^2 гильбертово пространство бесконечных последовательностей $u = (u_0, u_1, \dots)$, $u_j \in \mathbb{C}^p$, со скалярным произведением $(u, v) = \sum_{j=0}^{+\infty} v_j^* u_j$. Матрица $\mathbf{J}$ посредством операций

$$(lu)_j = B_j u_{j+1} + A_j u_j + B_{j-1}^* u_{j-1}, \quad j = 0, 1, \dots, \quad (0.1)$$

где $u_{-1} = 0$, $u_0, u_1, \dots \in \mathbb{C}^p$, определяет на многообразии всех финитных векторов (т.е. векторов с конечным числом ненулевых векторов-координат) пространства l_p^2 симметрический оператор, замыкание которого мы обозначим через L . Хорошо известно, что L — минимальный замкнутый симметрический оператор, порожденный выражением (0.1) и граничным условием $u_{-1} = 0$ в пространстве l_p^2 , — вообще говоря, несамосопряжен и дефектные числа n_+ и n_- этого оператора удовлетворяют неравенствам $0 \leq n_+, n_- \leq p$ (см. [1–3, гл. VII, §2]).

Согласно М. Г. Крейну [1, 2], матричная проблема моментов, порождаемая матрицей $\mathbf{J}$, называется вполне неопределенной, если $n_+ = n_- = p$. Несколько упрощая терминологию, в этом случае мы будем говорить, что для матрицы $\mathbf{J}$ (для выражения l , для оператора L) имеет место вполне неопределенный случай. В [4], в частности, установлено, что справедлива

ТЕОРЕМА 0.1. *Для матрицы $\mathbf{J}$ тогда и только тогда имеет место вполне неопределенный случай, когда все решения векторного уравнения*

$$(lu)_j = zu_j, \quad j = 1, 2, \dots, \quad (0.2)$$

при $z = 0$ принадлежат пространству l_p^2 .

В §1 данной работы, исходя из теоремы 0.1, получен эффективный критерий того, что обобщенная якобиева матрица простейшего вида является вполне неопределенной (см. п. 1, §1).

2. Бесконечную матрицу $\mathbf{J}_n$ с квадратными матричными элементами C_{ij} ($i, j = 0, 1, \dots$) порядка p назовем обобщенной якобиевой матрицей порядка $2n$, если $C_{ij} = C_{ji}^*$, $C_{ij} = O$ при $|i - j| > n$ и $C_{j, j+n} \neq O$. Обобщенная якобиева матрица $\mathbf{J}_n$, очевидно, имеет ту же структуру, что и $\mathbf{J}$ с матричными элементами A_j и B_j размера $np \times np$, но некоторые из матриц B_j могут оказаться необратимыми. Однако и в этом случае с матрицей $\mathbf{J}_n$ естественным образом можно связать операцию l_n , аналогичную операции (0.1). В терминах элементов C_{ij} операция l_n имеет вид

$$(l_n u)_j = \sum_{k=-n}^n C_{j, j+k} u_{j+k}, \quad j = 0, 1, \dots, \quad (0.3)$$

где $u_{-n} = u_{-n+1} = \dots = u_{-1} = 0$, $u_0, u_1, \dots \in \mathbb{C}^p$. Обозначим через L_n минимальный замкнутый симметрический оператор, порожденный выражением (0.3) в пространстве l_p^2 . Нетрудно видеть, что дефектные числа n_+ и n_- оператора L_n удовлетворяют неравенствам $0 \leq n_+$, $n_- \leq pr$. Действительно, существует, очевидно, вещественное число μ , такое, что матрицы $\tilde{C}_{j,j+n} = C_{j,j+n} + \mu I$ ($j = 0, 1, \dots$), где I — единичная матрица, обратимы. Заметив это, обозначим через $\tilde{\mathbf{J}}_n$ якобиеву матрицу, полученную из $\mathbf{J}_n$ заменой элементов $C_{j,j+n}$ (вслед за ними и $C_{j,j-n}$) на $\tilde{C}_{j,j+n}$. Дефектные числа $\tilde{n}_+$ и $\tilde{n}_-$ оператора $\tilde{L}_n$, соответствующего матрице $\tilde{\mathbf{J}}_n$, удовлетворяют неравенствам $0 \leq \tilde{n}_+$, $\tilde{n}_- \leq pr$. С другой стороны, разность $L_n - \tilde{L}_n$ является ограниченным самосопряженным оператором в l_p^2 . Поэтому, согласно известной теореме (см., например, [5, т. 2, гл. VIII, п. 100, предложение 4°]), $n_+ = \tilde{n}_+$ и $n_- = \tilde{n}_-$.

Таким образом, определения и факты п. 1 применимы и для обобщенных якобиевых матриц $\mathbf{J}_n$. В §§ 1, 2 настоящей работы исследуются дефектные числа оператора L_n в терминах элементов C_{ij} матрицы $\mathbf{J}_n$.

3. Пусть l — формально самосопряженное дифференциальное выражение четного или нечетного порядка r на прямой вида

$$l = \sum_{j=0}^r q_j(x) \frac{d^j}{dx^j}, \quad (0.4)$$

где q_j ($j = 0, 1, \dots, r$) — заданные полиномы от переменного x . Оператор, порождаемый выражением l на финитных бесконечно дифференцируемых функциях на $(-\infty, +\infty)$, является симметрическим в пространстве квадратично интегрируемых функций $\mathcal{L}_2$ ($\equiv \mathcal{L}_2(-\infty, +\infty)$) и поэтому допускает замыкание. Символом L обозначим это замыкание. Матричное представление оператора L в некотором базисе имеет вид якобиевой матрицы $\mathbf{J}$ (см. п. 1 §3 настоящей работы). Поэтому мы сохранили одинаковые обозначения для выражений (0.1) и (0.4) и соответствующих им минимальных операторов.

Рассмотрим дифференциальные выражения

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(x + \frac{d}{dx} \right), \quad a^* = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(x - \frac{d}{dx} \right).$$

На множестве финитных бесконечно дифференцируемых функций выполняются соотношения

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}}(a + a^*), \quad \frac{d}{dx} = \frac{1}{\sqrt{2}}(a - a^*), \quad aa^* - a^*a = E,$$

где E — единичный оператор в $\mathcal{L}_2$. Из этих соотношений следует, что выражение (0.4) можно представить в виде

$$l = \sum_{s+t \leq n} h_{st} a^{*s} a^t, \quad h_{st} = \bar{h}_{ts}, \quad (0.5)$$

где $h_{st} \in \mathbb{C}$ и n — натуральное число. Отметим, что число n , вообще говоря, отлично от r . Кроме того, от чисел h_{st} требуется лишь, чтобы $h_{s,s-n} \neq 0$

при некотором $s \in \{0, 1, \dots, n\}$. Эти обстоятельства, как правило, затрудняют работу с представлением (0.5) для выражения l . С другой стороны, именно представление (0.5) в некоторых случаях позволяет найти дефектные числа оператора L . Небольшой §3 настоящей работы посвящен дефектным числам оператора L в терминах чисел n и h_{st} .

Работы [6] и [7] также посвящены индексам дефекта операторов, порожденных обобщенными якобиевыми матрицами. В частности, в работе [7] асимптотическими методами для конечно-разностных уравнений исследуются дефектные числа операторов, порожденных выражениями вида (0.3) и (0.5).

§1. Об обобщениях теоремы Березанского о неопределенности якобиевых матриц

1. Предположим, что обобщенная симметрическая якобиева матрица $\mathbf{J}_m^{(0)}$ имеет только две ненулевые диагонали, а именно, пусть элементы C_{ij} этой матрицы удовлетворяют следующим условиям: $C_{ij} = 0$, если $|i - j| \neq m$, $C_{i, i+m} = B_i$ и $C_{ij} = C_{ji}^*$ ($i, j = 0, 1, \dots$), где m — фиксированное натуральное число, а B_i — последовательность обратимых матриц порядка p . Символом $\|\cdot\|$ обозначим спектральную матричную норму. Справедлива следующая теорема:

ТЕОРЕМА 1.1. *Для якобиевой матрицы $\mathbf{J}_m^{(0)}$ тогда и только тогда имеет место вполне неопределенный случай, когда ее матричные элементы B_i при $s = 0, 1, \dots, 2m - 1$ удовлетворяют условиям*

$$\sum_{j=1}^{+\infty} \|B_{(2j-1)m+s}^{-1} B_{(2j-2)m+s}^* \cdots B_{m+s}^{-1} B_s^*\|^2 < +\infty. \quad (1.1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Матричное конечно-разностное уравнение, соответствующее векторному уравнению (0.2) (при $z = 0$), имеет вид

$$B_j U_{j+m} + B_{j-m}^* U_{j-m} = 0, \quad j = m, m+1, \dots \quad (1.2)$$

Обозначим через $P_j^{(s)}$ ($s = 0, 1, \dots, 2m-1$, $j = 0, 1, \dots$) решения уравнения (1.2), удовлетворяющие начальным условиям

$$U_0 = U_1 = \dots = U_{s-1} = U_{s+1} = \dots = U_{2m-1} = 0, \quad U_s = C_s,$$

где

$$C_s = \begin{cases} B_s^{*-1}, & s = 0, 1, \dots, m-1, \\ I, & s = m, m+1, \dots, 2m-1. \end{cases} \quad (1.3)$$

Последовательности $P_j^{(s)}$ вычисляются явно из уравнения (1.2):

$$P_{2jm+k}^{(s)} = \begin{cases} 0, & k \neq s, \\ (-1)^j B_{(2j-1)m+s}^{-1} B_{(2j-2)m+s}^* \cdots B_{m+s}^{-1} B_s^* C_s, & k = s. \end{cases} \quad (1.4)$$

Из равенств (1.4) следует, что

$$\sum_{j=0}^{+\infty} \|P_j^{(s)}\|^2 < +\infty, \quad s = 0, 1, \dots, 2m-1,$$

тогда и только тогда, когда выполняются условия (1.1) теоремы 1.1. Это, в свою очередь, очевидно, равносильно утверждению о том, что все решения уравнения (0.2) принадлежат пространству l_p^2 . Таким образом, применяя теорему 0.1, завершаем доказательство теоремы 1.1.

2. В нашей работе [4] приведены признаки того, что якобиева матрица $\mathbf{J}$ является не вполне неопределенной, в терминах элементов A_j и B_j этой матрицы. Здесь же приведем несколько следствий теоремы 1.1, в которых утверждается, что для матрицы $\mathbf{J}_m^{(0)}$ при определенных условиях на ее элементы B_j имеет место вполне неопределенный случай. Применяя признак Даламбера к рядам в левой части условий (1.1), приходим к выводу, что справедливо

СЛЕДСТВИЕ 1.1. Пусть

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{\|B_{(2j+1)m+s}^{-1} B_{2jm+s}^* \cdots B_{m+s}^{-1} B_s^*\|}{\|B_{(2j-1)m+s}^{-1} B_{(2j-2)m+s}^* \cdots B_{m+s}^{-1} B_s^*\|} = q_s, \quad s = 0, 1, \dots, 2m-1.$$

Если $q_s < 1$ для любого $s \in \{0, 1, \dots, 2m-1\}$, то для матрицы $\mathbf{J}_m^{(0)}$ имеет место вполне неопределенный случай; если же $q_s > 1$ при некотором $s \in \{0, 1, \dots, 2m-1\}$, то для матрицы $\mathbf{J}_m^{(0)}$ вполне неопределенный случай места не имеет.

Применяя теперь кольцевое свойство матричной нормы, получаем, что общие члены рядов в левой части условий (1.1) не превосходят соответственно величин

$$\|B_s B_{m+s}^{*-1}\|^2 \cdots \|B_{(2j-2)m+s} B_{(2j-1)m+s}^{*-1}\|^2. \quad (1.5)$$

Используя далее признаки сходимости рядов с общими членами (1.5), можно найти различные достаточные условия выполнимости условий (1.1). В частности, применяя признак Раабе, получаем

СЛЕДСТВИЕ 1.2. Пусть, начиная с некоторого номера j ,

$$\|B_j B_{j+m}^{*-1}\| \leq 1 - q/j, \quad \text{где } q > m.$$

Тогда для матрицы $\mathbf{J}_m^{(0)}$ имеет место вполне неопределенный случай.

Теперь докажем, что справедливо

СЛЕДСТВИЕ 1.3. Пусть, начиная с некоторого номера $j \geq m$,

$$\|B_{j-m}\| \cdot \|B_{j+m}\| \leq \|B_j^{-1}\|^{-2} \quad (1.6)$$

и

$$\sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{\|B_j\|} < +\infty. \quad (1.7)$$

Тогда для матрицы $\mathbf{J}_m^{(0)}$ имеет место вполне неопределенный случай.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из условий (1.6) вытекает, что

$$\begin{aligned} & \|B_{m+s}^{-1}\|^2 \|B_{3m+s}^{-1}\|^2 \cdots \|B_{(2j-1)m+s}^{-1}\|^2 \\ & \leq \|B_s\|^{-1} (\|B_{2m+s}\| \cdots \|B_{(2j-2)m+s}\|)^{-2} \|B_{2jm+s}\|^{-1}. \end{aligned}$$

Поэтому величины (1.5) и, следовательно, общие члены рядов из левой части условий (1.1) не превосходят $\|B_s\|/\|B_{2jm+s}\|$. Остается заметить, что условие (1.7) обеспечивает сходимость рядов

$$\|B_s\| \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{\|B_{2jm+s}\|}, \quad s = 0, 1, \dots, 2m-1.$$

Следствие 1.3 доказано.

Отметим, что если имеют место неравенства (1.6), то условия (1.7) и

$$\sum_{j=1}^{+\infty} \|B_j^{-1}\| < +\infty \quad (1.8)$$

равносильны. Действительно, из (1.6) следует, что

$$\|B_j^{-1}\| \leq \frac{1}{\sqrt{\|B_{j-m}\| \|B_{j+m}\|}} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\|B_{j-m}\|} + \frac{1}{\|B_{j+m}\|} \right).$$

Поэтому из (1.7) вытекает (1.8). Обратное же утверждение справедливо всегда, поскольку $\|B_j\|^{-1} \leq \|B_j^{-1}\|$. Применяя далее признак Карлемана (см. [3, гл. VII, §2, п. 11]) и следствие 1.3, легко убедиться, что если выполнены условия (1.6), то минимальный оператор $L_m^{(0)}$, порожденный матрицей $\mathbf{J}_m^{(0)}$ (см. §0, п. 2), имеет либо максимальные, либо минимальные дефектные числа, в зависимости от того, выполняется или нет условие (1.7) (или (1.8)). Здесь промежуточные значения дефектных чисел невозможны.

3. Рассмотрим два примера.

Пусть $m = 1$ и $p = 1$ и элементы b_j скалярной якобиевой матрицы $\mathbf{J}_1^{(0)}$ — положительные числа. Хорошо известно, что матрица $\mathbf{J}_1^{(0)}$ порождается классической проблемой моментов Гамбургера.

ПРИМЕР 1. Пусть a_k — произвольная числовая последовательность с положительными членами и $b_{2k} = b_{2k+1} = a_k$ ($k = 0, 1, \dots$). Из теоремы 1.1, очевидно, следует, что для матрицы $\mathbf{J}_1^{(0)}$ имеет место определенный случай, т. е. соответствующая проблема моментов определенная.

ПРИМЕР 2. Пусть $b_{2k} = c_1 k^\alpha (1 + \alpha_k)$ и $b_{2k+1} = c_2 k^\beta (1 + \beta_k)$, где α, β, c_1 и c_2 — положительные постоянные и $\lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \beta_k = 0$. Из следствия 1.1 вытекает, что если $\alpha \neq \beta$ или $\alpha = \beta$, но $c_1 \neq c_2$, то соответствующая проблема моментов определенная. Пусть теперь $\alpha = \beta$ и $c_1 = c_2$. Тогда следует учесть асимптотическое поведение последовательностей α_k и β_k при $k \rightarrow \infty$. Действительно, например, в случае, когда $\alpha_k = ak^{-1} + O(k^{-1-\sigma})$ и

$\beta_k = bk^{-1} + O(k^{-1-\sigma})$ ($\sigma > 0$) при $k \rightarrow \infty$, применяя признак Гаусса сходимости рядов, из теоремы 1.1 мы получаем, что соответствующая проблема моментов является неопределенной, если $b - a > 1/2$ и $\alpha > 1/2 + b - a$, и определенной во всех остальных случаях.

Отметим, что известные нам признаки определенности или неопределенности, полученные ранее другими авторами, не позволяют определить тип матрицы $J_1^{(0)}$ в случаях примеров 1 и 2. Кроме того, эти примеры хорошо иллюстрируют рамки применимости признака Карлемана и следствий 1.1–1.3.

4. Пусть теперь обобщенная якобиева матрица $\mathbf{J}_n$ ($n \geq m$) имеет вид $\mathbf{J}_n = \mathbf{J}_m^{(0)} + \mathbf{J}_n^{(1)}$, где $\mathbf{J}_m^{(0)}$ — матрица той же структуры, что и раньше, а элементы $C_{ij}^{(1)}$ матрицы $\mathbf{J}_n^{(1)}$ ограничены в совокупности, т. е. $\|C_{ij}^{(1)}\| \leq M$ при некотором $M > 0$. Тогда оператор L_n имеет вид $L_n = L_m^{(0)} + L_n^{(1)}$, где $L_n^{(1)}$, очевидно, — ограниченный самосопряженный оператор. Поэтому, согласно известной теореме (см., например [5, т. 2, гл. VIII, п. 10, предложение 4°]), дефектные числа операторов L_n и $L_m^{(0)}$ совпадают. Таким образом, теорема 1.1 и следствия 1.1–1.3 позволяют определить дефектные числа оператора L_n . В частности, при $n = m$, положив $m = p = 1$ в следствии 1.3, получим еще одно доказательство теоремы Ю. М. Березанского о неопределенности якобиевых матриц (см. [3, гл. VIII, § 1, п. 2, теорема 1.5]).

Утверждение типа следствия 1.2 содержится в работе [6, II] (см. следствие 2.3 и п. 5 § 2 настоящей работы).

§ 2. Индексы дефекта операторов, порожденных обобщенными якобиевыми матрицами

1. Пусть F_j ($j = 0, 1, \dots$) — произвольная последовательность матриц размера $p \times p$. Методом вариации постоянных решим матричное уравнение

$$B_j U_{j+m} + B_{j-m}^* U_{j-m} = F_{j-m}, \quad j = m, m+1, \dots \quad (2.1)$$

Заметим, что последовательность

$$U_j = \sum_{s=0}^{2m-1} P_j^{(s)} C_j^{(s)}$$

удовлетворяет уравнению (2.1), если последовательности матриц $C_j^{(s)}$ ($s = 0, 1, \dots, 2m-1$) удовлетворяет равенствам

$$B_j \left(\sum_{s=0}^{2m-1} P_{j+m}^{(s)} \Delta C_{j+m-k}^{(s)} \right) = \delta_{k, 2m-1} F_{j-m}, \quad (2.2)$$

$$k = 0, 1, \dots, 2m-1, \quad j = m, m+1, \dots,$$

где $\Delta C_j^{(s)} = C_j^{(s)} - C_{j-1}^{(s)}$, а δ_{ij} — символ Кронекера.

Положив $j+m-k = l$ в равенствах (2.2), получаем, что неизвестные $\Delta C_l^{(s)}$ ($s = 0, 1, \dots, 2m-1$) при фиксированном l являются решениями системы

уравнений

$$B_{l+k-m} \left(\sum_{s=0}^{2m-1} P_{l+k}^{(s)} \Delta C_l^{(s)} \right) = \delta_{k,2m-1} F_{l+k-2m}, \quad (2.3)$$

$$l+k \geq 2m, \quad k=0,1,\dots,2m-1.$$

Система уравнений (2.3) при $l=2m, 2m+1, \dots$ имеет единственное решение. Действительно, из формул (1.4) следует, что, во-первых, все неизвестные $\Delta C_l^{(s)}$ этой системы, кроме той, которая определяется из последнего уравнения ($k=2m-1$), равны нулевой матрице. Во-вторых, положив $l+2m-1=2nm+i$ ($n=1,2,\dots, i=0,1,\dots,2m-1$) в последнем уравнении системы (2.3), получаем, что

$$B_{(2n-1)m+i} P_{2nm+i}^{(i)} \Delta C_{(2n-2)m+i+1}^{(i)} = F_{(2n-2)m+i}.$$

Используя далее соотношения (1.3) и (1.4), из этого равенства легко извлечь, что

$$\Delta C_{(2n-2)m+i+1}^{(i)} = \begin{cases} -(P_{(2n-1)m+i}^{(i+m)})^* F_{(2n-2)m+i}, & i=0,1,\dots,m-1, \\ (P_{(2n-1)m+i}^{(i-m)})^* F_{(2n-2)m+i}, & i=m,m+1,\dots,2m-1. \end{cases}$$

Таким образом, при $l=2m, 2m+1, \dots$ система (2.3) имеет единственное решение и справедлива формула

$$\Delta C_l^{(s)} = \begin{cases} -(P_{l+m-1}^{(s+m)})^* F_{l-1}, & s=0,1,\dots,m-1, \\ (P_{l+m-1}^{(s-m)})^* F_{l-1}, & s=m,m+1,\dots,2m-1. \end{cases} \quad (2.4)$$

При $l=1,2,\dots,2m-1$ количество уравнений в системе (2.3) меньше, чем количество неизвестных. Однако легко показать, что и в этом случае формулы (2.4) определяют решения этой системы. Полагая теперь $l=i, i+1, \dots, j$ в равенствах (2.4) и суммируя полученные равенства, имеем

$$C_j^{(s)} = C_{i-1}^{(s)} + \begin{cases} -\sum_{k=i+m-1}^{j+m-1} (P_l^{(s+m)})^* F_{l-m}, & s=0,1,\dots,m-1, \\ \sum_{k=i+m-1}^{j+m-1} (P_l^{(s-m)})^* F_{l-m}, & s=m,m+1,\dots,2m-1. \end{cases}$$

Таким образом, последовательность U_j представляется в следующем виде:

$$U_j = \sum_{s=0}^{2m-1} P_j^{(s)} C_{i-1}^{(s)} + \sum_{l=i+m-1}^{j+m-1} K_{jl} F_{l-m}, \quad j=i, i+1, \dots, \quad (2.5)$$

где $C_{i-1}^{(s)}$ ($s=1,2,\dots,2m-1$) — постоянные матрицы и

$$K_{jl} = \sum_{s=0}^{m-1} [P_j^{(s+m)} (P_l^{(s)})^* - P_j^{(s)} (P_l^{(s+m)})^*]. \quad (2.6)$$

Последовательность K_{jl} — последовательность Коши для уравнения (2.1), — очевидно, удовлетворяет уравнению (1.2) при фиксированном l и соотношению $K_{jl}^* = -K_{lj}$. Кроме того, если взять $F_j = I$ ($j = 0, 1, \dots$) и подставить полученные выражения для $\Delta C_l^{(s)}$ из формул (2.4) в систему (2.3), то после некоторых элементарных преобразований, которые мы здесь не приводим, получим

$$K_{l+k,l} = \delta_{k,m} B_l^{-1}, \quad k = 0, 1, \dots, 2m-1, \quad l = 0, 1, \dots$$

Изложенные выше рассуждения позволяют установить, что для последовательности K_{jl} ($j, l = 0, 1, \dots$) справедливы формулы, аналогичные формулам (1.4): а именно, при $p = 0, 1, \dots$ имеет место равенство

$$K_{jl} = \begin{cases} O, & j \neq l + (2p+1)m, \\ (-1)^p B_{l+2pm}^{-1} B_{l+(2p-1)m}^* \cdots B_{l+m}^* B_l^{-1}, & j = l + (2p+1)m. \end{cases} \quad (2.7)$$

2. Пусть $\mathbf{J}'_n$ — обобщенная якобиева матрица, полученная из матрицы $\mathbf{J}_n$ путем замены в ней первых i строк и стольких же столбцов нулевыми матрицами порядка p , где i — некоторое натуральное число. Матричное уравнение, соответствующее векторному уравнению (0.2) для матрицы $\mathbf{J}'_n$, имеет вид

$$\sum_{k=-n}^n C_{j,j+k} U_{j+k} = z U_j, \quad j = i, i+1, \dots, \quad (2.8)$$

где $z \in \mathbb{C}$ и $U_{i-n} = U_{i-n+1} = \dots = U_{i-1} = O$. Уравнение (2.8) преобразуем к виду

$$B_j U_{j+m} + B_{j-m}^* U_{j-m} = \sum_{k=-n}^n C'_{jk} U_k,$$

где

$$\begin{aligned} C'_{j,j+k} &= -C_{j,j+k} \quad \text{при } k \in \{-n, -n+1, \dots, n\} \setminus \{-m, 0, m\}, \\ C'_{j,j-m} &= B_{j-m}^* - C_{j,j-m}, \quad C'_{jj} = zI - C_{jj}, \quad C'_{j,j+m} = B_j^* - C_{j,j+m}. \end{aligned}$$

Пусть теперь $U_i, U_{i+1}, \dots, U_{i+m-1}$ — произвольные матрицы порядка p . В равенстве (2.5) положим

$$F_{l-m} = \sum_{k=-n}^n C'_{l,l+k} U_{l+k}$$

и постоянные $C_{i-1}^{(s)}$ выберем так, чтобы выполнялись условия

$$\sum_{s=0}^{2m-1} P_j^{(s)} C_{i-1}^{(s)} = \begin{cases} O, & j = i-m, i-m+1, \dots, i-1, \\ U_j, & j = i, i+1, \dots, i+m-1. \end{cases}$$

Этими условиями постоянные $C_{i-1}^{(s)}$ ($s = 0, 1, \dots, 2m-1$), очевидно, определяются однозначно. Таким образом, матричные решения U_j уравнения (2.8)

удовлетворяют тождеству

$$U_j = \sum_{s=0}^{2m-1} P_j^{(s)} C_{i-1}^{(s)} + \sum_{l=i+m-1}^{j+m-1} K_{jl} \left\{ \sum_{k=-n}^n C'_{l,l+k} U_{l+k} \right\}, \quad j = i+m, i+m+1, \dots$$

Изменяя далее порядок суммирования и учитывая условия $U_{i-n} = \dots = U_{i-1} = O$, получаем, что

$$U_j = \sum_{s=0}^{2m-1} P_j^{(s)} C_{i-1}^{(s)} + \sum_{k=i}^{i+m-1} A_{jk} U_k + \sum_{k=i+m}^{j+m-1+n} A_{jk} U_k, \quad (2.9)$$

где коэффициенты A_{jk} при $j = i+m, i+m+1, \dots$ определяются равенствами

$$A_{jk} = \sum_{l=\alpha_k}^{\beta_k} K_{jl} C'_{lk}, \quad k = i, i+1, \dots, j+m-1+n,$$

а $\alpha_k = \max\{k-n, i+m-1\}$ и $\beta_k = \min\{k+n, j+m-1\}$.

3. Справедливо следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 2.1. Пусть матрицы B_j удовлетворяют условиям (1.1), а матрицы C_{ij} ($i, j = 0, 1, \dots$) таковы, что

$$\sum_{j=a_k}^{+\infty} \left\{ \sum_{l=a_k}^{j+m-1} \|K_{jl} \tilde{C}_{l,l+k}\|^2 \right\} < +\infty, \quad k = -n, -n+1, \dots, n, \quad (2.10)$$

где $a_k = \max\{0, -k\}$, $\tilde{C}_{l,l-m} = C_{l,l-m} - B_{l-m}^*$, $\tilde{C}_{l,l+m} = C_{l,l+m} - B_l$ и $\tilde{C}_{l,l+k} = C_{l,l+k}$ при $k \neq -m$ и $k \neq m$. Тогда дефектные числа n_+ и n_- оператора L_n удовлетворяют условиям $n_+ = n_- = n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через X_1 пространство бесконечных последовательностей $U = (U_0, U_1, \dots)$, где U_j — квадратные матрицы порядка p , с нормой

$$\|U\|_1 = \left(\sum_{j=0}^{+\infty} \|U_j\|^2 \right)^{1/2}.$$

Пусть Φ_i — оператор в пространстве X_1 ,

$$(\Phi_i U)_j = \sum_{k=i+m}^{j+m-1+n} A_{jk} U_k, \quad j = i+m, i+m+1, \dots$$

Стандартные вычисления показывают, что при $U, V \in X_1$ ($U_0 = \dots = U_{i+m-1} = V_0 = \dots = V_{i+m-1} = O$) справедливы неравенства

$$\|\Phi_i U - \Phi_i V\|_1 \leq k'_i \|U - V\|_1,$$

где

$$k'_i = \left\{ \sum_{j=i+m}^{+\infty} \left[\sum_{k=i+m}^{j+m-1+n} \|A_{jk}\|^2 \right] \right\}^{1/2}.$$

Кроме того, при фиксированном $j = i + m, i + m + 1, \dots$ и $i + m \leq k \leq i + m - 1 + n$ выполняется неравенство $\beta_k - \alpha_k \leq 2n$. Следовательно, в силу известного неравенства имеем

$$\|A_{jk}\|^2 \leq (2n + 1) \sum_{l=\alpha_k}^{\beta_k} \|K_{jl}C'_{lk}\|^2.$$

Учитывая это неравенство в выражении для k'_i , после некоторых элементарных преобразований получим, что

$$k'_i \leq \sqrt{2n + 1} \left\{ \sum_{k=-n}^n \left[\sum_{j=i+m}^{+\infty} \left(\sum_{l=i+m-1}^{j+m-1} \|K_{jl}C'_{l,l+k}\|^2 \right) \right] \right\}^{1/2},$$

где $C'_{l,l+k} = 0$, если $l + k < 0$.

Из условий (1.1), (2.10) и последнего неравенства следует, что при фиксированном $z \in \mathbb{C}$ число i можно взять настолько большим, чтобы $k'_i < 1$. Применяя далее принцип сжимающих отображений, заключаем, что система (2.9), а следовательно, и система (2.8) имеют единственное решение в пространстве X_1 . Таким образом, векторное уравнение (0.2) соответствующей матрицы $\mathbf{J}'_n$ имеет ровно mr линейно независимых решений из l_p^2 , т.е. дефектные числа n'_+ и n'_- матрицы $\mathbf{J}'_n$ таковы, что $n'_+ = n'_- = mr$. Остается заметить, что дефектные числа обобщенных якобиевых матриц $\mathbf{J}'_n$ и $\mathbf{J}_n$ равны. Теорема 2.1 доказана.

СЛЕДСТВИЕ 2.1. Пусть матрицы B_j удовлетворяют условиям (1.1), а матрицы C_{ij} ($i, j = 0, 1, \dots$) таковы, что

$$\sum_{l=a_k}^{+\infty} \|(P_l^{(s)})^* \tilde{C}_{l,l+k}\|^2 < +\infty, \quad s = 0, 1, \dots, 2m - 1, \quad k = -n, \dots, n,$$

где a_k и $\tilde{C}_{l,l+k}$ определяются, как в теореме 2.1. Тогда справедливо утверждение теоремы 2.1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из равенства (2.6) и из неравенства Коши–Буняковского легко извлечь, что справедливо неравенство

$$\|K_{jl}\tilde{C}_{l,l+k}\|^2 \leq \left(\sum_{s=0}^{2m-1} \|P_j^{(s)}\|^2 \right) \left(\sum_{s=0}^{2m-1} \|(P_l^{(s)})^* \tilde{C}_{l,l+k}\|^2 \right).$$

Из условий следствия 2.1 и из этого неравенства вытекает, что условия (2.10) выполнены. Применяя теорему 2.1, завершаем доказательство следствия 2.1.

Заметим, что в формулировках теоремы 2.1 и следствия 2.1 явный вид обобщенной якобиевой матрицы $\mathbf{J}_m^{(0)}$ не играет никакой роли. По-видимому, аналогичные утверждения справедливы каждый раз, когда известно, что для матрицы $\mathbf{J}_m$ имеет место вполне неопределенный случай, а матрица $\mathbf{J}_n$ в некотором смысле является возмущением матрицы $\mathbf{J}_m$.

В следующих трех следствиях теоремы 2.1 учитывается явный вид обобщенной якобиевой матрицы $\mathbf{J}_m^{(0)}$.

СЛЕДСТВИЕ 2.2. Пусть матрицы B_j удовлетворяют условиям (1.1), а матрицы C_{ij} ($i, j = 0, 1, \dots$) таковы, что при любом $k \in \{-n, -n+1, \dots, n\}$ выполняются условия

$$\sum_{i=n}^{+\infty} \sum_{j=0}^{+\infty} \|B_{i+2jm}^{-1} B_{i+(2j-1)m}^* \cdots B_{i+m}^* B_j^{-1} \tilde{C}_{i,i+k}\|^2 < +\infty. \quad (2.11)$$

Тогда справедливо утверждение теоремы 2.1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Изменив порядок суммирования в левых частях условий (2.10) и применив формулы (2.7), находим, что если выполнены условия (2.11), то выполняются и условия (2.10).

СЛЕДСТВИЕ 2.3. Пусть матрицы B_j удовлетворяют условиям следствия 1.2, а матрицы C_{ij} ($i, j = 0, 1, \dots$) таковы, что

$$\sum_{j=n}^{+\infty} \|B_j^{-1} \tilde{C}_{j,j+k}\|^2 < +\infty, \quad k = -n, -n+1, \dots, n. \quad (2.12)$$

Тогда дефектные числа n_+ и n_- оператора L_n удовлетворяют условиям $n_+ = n_- = \text{tr}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как мы уже отмечали, из условий следствия 1.2 вытекает, что условия (1.1) выполняются. Кроме того, $\|B_j B_{j+m}^{*-1}\| < 1$, и поэтому при всех $j > j_0$ для некоторого номера j_0 в силу формул (1.4) выполняется неравенство

$$\|(P_j^{(s)})^* \tilde{C}_{j,j+k}\| \leq \|B_j^{-1} \tilde{C}_{j,j+k}\|, \quad k = -n, -n+1, \dots, n.$$

Теперь в силу условий (2.12) все условия следствия 2.1 выполнены. Следствие 2.3 доказано.

СЛЕДСТВИЕ 2.4. Пусть матрицы B_j удовлетворяют условиям (1.6) и (1.7), а матрицы C_{ij} ($i, j = 0, 1, \dots$) таковы, что

$$\sum_{i=n}^{+\infty} \frac{\|\tilde{C}_{i,i+k}\|^2}{\|B_{i-m}\|} \left(\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{\|B_{i+(2j+1)m}\|} \right) < +\infty. \quad (2.13)$$

Тогда дефектные числа оператора L_n удовлетворяют условиям $n_+ = n_- = \text{tr}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно следствию 1.3, матрицы B_j удовлетворяют условиям (1.1). Кроме того, рассуждения, приведенные при доказательстве того же следствия 1.3, показывают, что из условий (1.6) следует справедливость неравенств

$$\|B_{i+2jm}^{-1} B_{i+(2j-1)m}^* \cdots B_{i+m}^* B_j^{-1}\| \leq (\|B_{i-m}\| \cdot \|B_{i+(2j+1)m}\|)^{-1/2}.$$

Поэтому общий член двойного ряда в левой части условий (2.11) не превосходит величину $\|\tilde{C}_{i,i+k}\|^2 / \|B_{i-m}\| \cdot \|B_{i+(2j+1)m}\|$.

Таким образом, условия (2.13) влекут за собой (2.11). Следствие 2.4 доказано.

4. Справедлива

ТЕОРЕМА 2.2. Пусть $\lambda \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Im} \lambda > 0$ ($\operatorname{Im} \lambda < 0$) и

$$\limsup_{j \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \{ \|(C_{jj} - \bar{\lambda}I)^{-1}C_{j,j-k}\| + \|(C_{jj} - \bar{\lambda}I)^{-1}C_{j,j+k}\| \} < 1. \quad (2.14)$$

Тогда верхнее (нижнее) дефектное число n_+ (n_-) оператора L_n равно нулю.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как и при доказательстве теоремы 2.1, пусть X_2 — пространство последовательностей матриц U_j с нормой

$$\|U\|_2 = \sup_j \|U_j\|,$$

а G_i — оператор в пространстве X_2 ,

$$(G_i U)_j = \sum_{k=1}^n \{ (\bar{\lambda}I - C_{jj})^{-1}C_{j,j-k}U_{j-k} + (\bar{\lambda}I - C_{jj})^{-1}C_{j,j+k}U_{j+k} \},$$

где $U_{i-n} = \dots = U_{i-1} = O$. Тогда

$$\|G_i U - G_i V\|_2 \leq k_j'' \|U - V\|_2,$$

где

$$k_i'' = \sup_{j \geq i} \sum_{k=1}^n \{ \|(C_{jj} - \bar{\lambda}I)^{-1}C_{j,j-k}\| + \|(C_{jj} - \bar{\lambda}I)^{-1}C_{j,j+k}\| \}.$$

Из условия (2.14) следует, что число i можно взять настолько большим, чтобы $k_i'' < 1$. Тогда, очевидно, матричное уравнение (2.8) при $z = \bar{\lambda}$ имеет в пространстве X_2 только тождественно нулевое решение. Следовательно, соответствующее векторное уравнение (0.2) имеет только тождественно нулевое решение в l_p^2 . Теорема 2.2 доказана.

СЛЕДСТВИЕ 2.5. Пусть, начиная с некоторого j_0 , все матрицы C_{jj} обратимы, $\lim_{j \rightarrow +\infty} \|C_{jj}^{-1}\| = 0$ и

$$\limsup_{j \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \{ \|C_{jj}^{-1}C_{j,j-k}\| + \|C_{jj}^{-1}C_{j,j+k}\| \} < 1.$$

Тогда оператор L_n самосопряжен.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В рассматриваемом случае, очевидно, существует число $\rho > 0$, такое, что условие (2.14) выполняется при $\lambda \in \{\lambda : |\lambda| \leq \rho\}$. Поэтому, согласно теореме 2.2, дефектные числа оператора L_n удовлетворяют условиям $n_+ = n_- = 0$. Следствие 2.5 доказано.

5. Отметим, что для обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка известно несколько теорем, близких по содержанию к следствию 2.1 (см. [8, гл. XI, §8 и примечания к нему]). Добавим также, что основные результаты работы [6, I] для обобщенных якобиевых матриц следуют из теоремы 2.2 настоящей работы.

§3. Индексы дефекта некоторых обыкновенных дифференциальных операторов с полиномиальными коэффициентами

1. Символами $H_k(x)$ ($k = 0, 1, \dots$), как обычно, обозначим классические ортогональные полиномы Чебышёва–Эрмита. Пусть, далее,

$$\varphi_k(x) = (2^k k! \sqrt{\pi})^{-1/2} H_k(x) e^{-x^2/2}, \quad k = 0, 1, \dots,$$

— полная ортонормированная система функций Чебышёва–Эрмита в пространстве $\mathcal{L}_2$. Дифференциальные операции a^* и a , введенные в п. 3 §0 настоящей работы, действуют на функции φ_k согласно формулам

$$a^* \varphi_k = \sqrt{k+1} \varphi_{k+1}, \quad a \varphi_k = \sqrt{k} \varphi_{k-1}, \quad k = 0, 1, \dots \quad (3.1)$$

Эти формулы легко следуют из соотношений для полиномов H_k и хорошо известны.

Пусть теперь $D(L)$ — область определения минимального замкнутого оператора L , порожденного выражением (0.4). Покажем, что

$$\varphi_k(x) \in D(L), \quad k = 0, 1, \dots \quad (3.2)$$

Действительно, пусть $w(x)$ — вещественная бесконечно дифференцируемая финитная функция на всей оси, удовлетворяющая неравенствам $0 \leq w(x) \leq 1$ и равная единице при $|x| < 1$. Легко видеть, что $w(x/n)\varphi_k(x) \rightarrow \varphi_k(x)$ и $l[w(x/n)\varphi_k(x)] \rightarrow l\varphi_k(x)$ при $n \rightarrow +\infty$ в пространстве $\mathcal{L}_2$. Таким образом, справедливы включения (3.2).

Из (3.2) следует, что ортонормированный базис $\varphi_k(x)$ ($k = 0, 1, \dots$) пространства $\mathcal{L}_2$ является базисом матричного представления оператора L (см. [5, т. 1, гл. IV, п. 53]). Используя далее представление (0.5) и соотношения (3.1), заключаем, что бесконечная эрмитова матрица, которая получается при матричном представлении дифференциальных операторов с полиномиальными коэффициентами в базисе φ_k , является обобщенной якобиевой матрицей.

2. Рассмотрим следующий пример:

ПРИМЕР 3. Пусть s и m — целые неотрицательные числа, $h \in \mathbb{C}$, $h \neq 0$, и

$$l_0 = ha^{*s+m} a^s + \bar{h}a^{*s} a^{s+m}.$$

Из равенств (3.1) следует, что

$$l_0 \varphi_k = 0, \quad \text{если } k < s, \quad l_0 \varphi_k = \frac{h\sqrt{k!(k+m)!}}{(k-s)!} \varphi_{k+m}, \quad \text{если } s \leq k < s+m,$$

и

$$l_0 \varphi_k = \frac{\bar{h}\sqrt{(k-m)!k!}}{(k-s-m)!} \varphi_{k-m} + \frac{h\sqrt{k!(k+m)!}}{(k-s)!} \varphi_{k+m}, \quad \text{если } k \geq s+m.$$

Таким образом, если не учитывать первые s тождественно нулевых строк и столбцов, то матричное представление минимального оператора L_0 , порожденного выражением l_0 в базисе φ_k ($k = 0, 1, \dots$), имеет вид якобиевой матрицы $\mathbf{J}_m^{(0)}$ (см. п. 1 §1) с числовыми элементами

$$b_k = \frac{h\sqrt{(k+s)!(k+s+m)!}}{k!}, \quad k = 0, 1, \dots$$

Легко видеть, что $|b_k| \sim |h|k^{s+m/2}$ при $k \rightarrow \infty$. Поэтому если $m \geq 1$ и $2s + m > 2$, то условие (1.7) следствия 1.3 выполняется. Кроме того, простые рассуждения показывают, что последовательность $|b_{k-m}|/|b_k|$ ($k = m, m+1, \dots$) является неубывающей. Таким образом, условия (1.6) следствия 1.3 также выполняются. Итак, мы доказали, что при $m \geq 1$ и $2s+m > 2$ для матрицы $\mathbf{J}_m^{(0)}$ имеет место вполне неопределенный случай, в частности, дефектные числа оператора L_0 удовлетворяют условиям $n_+ = n_- = m$. Эти равенства, очевидно, справедливы и в случае $m = 0$, поскольку тогда только элементы главной диагонали обобщенной якобиевой матрицы $\mathbf{J}_m^{(0)}$ не равны нулю.

В случаях же $s = 0$, $m = 1$ или $m = 2$ из признака Карлемана следует, что $n_+ = n_- = 0$.

3. Пусть теперь в примере 3 $s = 0$, а $m > 2$ — четное натуральное число. Тогда коэффициент при производной m -го порядка в дифференциальном выражении l_0 равен $\operatorname{Re} h$. Следовательно, в случае $\operatorname{Re} h = 0$ оператор L_0 является замкнутым симметрическим оператором, порождаемым дифференциальным выражением l_0 порядка $m-1$, в пространстве $\mathcal{L}_2$ с дефектными числами $n_+ = n_- = m$. Ясно, что аналогичные примеры можно построить и в случае нечетного $m > 2$. Таким образом, дефектные числа оператора L_0 могут оказаться и больше, чем порядок выражения l_0 . Причины этого явления очевидны: коэффициент при наивысшей производной в выражении l_0 обращается в нуль при $x = 0$. Как мы уже отмечали в п. 2 §0, указанное явление в случае обобщенных якобиевых матриц не имеет места.

Вернемся к случаю, когда $m \geq 1$ и $2s + m > 2$. Легко установить, что матричным представлением для минимального оператора, порожденного выражением l_0^k ($k \in \{1, 2, \dots\}$), служит обобщенная якобиева матрица $(\mathbf{J}_m^{(0)})^k$. Можно доказать, что и для этой матрицы имеет место вполне неопределенный случай. С другой стороны, как мы уже отмечали во введении, операторы, отвечающие вполне неопределенным якобиевым матрицам, являются целыми операторами минимального типа (см. [1, 2]) и обладают рядом замечательных свойств. Таким образом, оператор, порожденный дифференциальным выражением l_0^k , является целым оператором минимального типа с дефектными числами $n_+ = n_- = km$, а порядок этого выражения может отличаться от $k(s+2m)$ и зависит еще от h . Приведем примеры.

ПРИМЕР 4. (а) Пусть $s = 0$, $m = 3$, $h \neq 0$ и $h = \sqrt{2}(\alpha - 2\beta i)$. Тогда

$$l_0 f = \alpha[3(xf')' + x^3 f] + i\beta\{2f''' + 3[(x^2 f)'] + x^2 f'\}.$$

(б) Пусть $s = 1$, $m = 1$, $h \neq 0$ и $h = -\sqrt{2}(\alpha - 2\beta i)$. Тогда

$$l_0 f = \alpha[(xf')' - (x^3 - 2x)f] + i\beta\{2f''' - [((x^2 - 2)f)' + (x^2 - 2)f']\}.$$

Порядок дифференциального выражения l_0 равен двум, если $\beta = 0$, и трем во всех остальных случаях. При этом дефектные числа оператора, порожденного выражением l_0^k , удовлетворяют условиям $n_+ = n_- = 3k$ в случае (а) и $n_+ = n_- = k$ в случае (б).

4. Отметим, что результаты §2 позволяют определить индексы дефекта некоторых дифференциальных операторов, порожденных выражениями вида $l_0 + l_1$, где l_0 определено выше, а l_1 имеет вид

$$l_1 = \sum_{i+j < 2s+m} h_{ij} a^{*i} a^j, \quad h_{ij} = \bar{h}_{ji}.$$

Однако якобиевы матрицы, возникающие при матричном представлении дифференциальных операторов с полиномиальными коэффициентами, имеют ряд специфических свойств. Эти свойства позволяют усилить некоторые результаты §2 настоящей работы для соответствующих матриц. Таким путем, по-видимому, можно получить более исчерпывающую информацию о дефектных числах и других спектральных свойствах дифференциальных операторов, и мы планируем посвятить этому кругу вопросов отдельную работу.

ЛИТЕРАТУРА

1. Крейн М. Г. Основные положения теории представления эрмитовых операторов с индексом дефекта (m, m) . Укр. матем. ж., № 2, 3–66 (1949).
2. Крейн М. Г. Бесконечные **J**-матрицы и матричная проблема моментов. ДАН СССР, т. 69, № 3, 125–128 (1949).
3. Березанский Ю. М. Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. Наукова думка, Киев, 1965.
4. Костюченко А. Г., Мирзоев К. А. Трехчленные рекуррентные соотношения с матричными коэффициентами. Вполне неопределенный случай. Матем. заметки, **63**, вып. 5, 709–716 (1998).
5. Ахиезер Н. И., Глазман И. М. Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. Т. 1, 2, Харьков, 1977, 1978.
6. Чистяков А. Л. Индексы дефектов симметрических операторов в прямой сумме гильбертовых пространств. I. Вестник МГУ, сер. матем. мех., № 3, 5–21 (1969); II, там же, № 4, 3–5 (1969).
7. Чистяков А. Л. Индексы дефекта J_m -матриц и дифференциальных операторов с полиномиальными коэффициентами. Матем. сб., **85 (127)**, № 4(8), 474–503 (1971).
8. Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Мир, М., 1970.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова,
механико-математический факультет

Московский государственный авиационный
технологический университет им. К. Э. Циолковского

Поступило в редакцию
15 сентября 1998 г.