Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Б. С. Кругликов, Существование близких псевдоголоморфных дисков для почти комплексных многообразий и приложение к псевдонорме Кобаяси–Ройдена, *Функц. анализ и его прил.*, 1999, том 33, выпуск 1, 46–58

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa337>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.209.158.208

26 апреля 2023 г., 07:22:39

УДК 514.765.43

Существование близких псевдоголоморфных дисков для почти комплексных многообразий и приложение к псевдонорме Кобаяси–Ройдена*

© 1999. Б. С. КРУГЛИКОВ

Введение

Пусть (M^{2n}, J) — почти комплексное многообразие, т.е. $J^2 = -\mathbb{I} \in T^*M \otimes TM$. Отображение $\Phi: (M_1, J_1) \rightarrow (M_2, J_2)$ называется псевдоголоморфным, если его дифференциал сохраняет комплексное умножение в касательном расслоении: $\Phi_* \circ J_1 = J_2 \circ \Phi_*$.

Обозначим через $e = 1 \in T_0\mathbb{C}$ единичный вектор. Будем также обозначать через D_R диск в $\mathbb{C}$ радиуса R , снабженный стандартной комплексной структурой J_0 . Пусть $v \in T_pM$, $p = \tau_M v$, где через $\tau_M: TM \rightarrow M$ обозначена каноническая проекция. Будем говорить, что в направлении v проходит диск $f: D_R \rightarrow M$, если $f_*e = v$. В силу теоремы III из [1] существует малый псевдоголоморфный диск в направлении любого вектора v . Мы изучаем немалые псевдоголоморфные диски, лежащие в окрестности данного псевдоголоморфного диска. Основным результатом является

ТЕОРЕМА 1. Пусть через точку p на почти комплексном многообразии (M^{2n}, J) проходит непостоянный псевдоголоморфный диск радиуса R

$$f_0: (D_R, J_0) \rightarrow (M, J), \quad (f_0)_*(0)e = v_0 \neq 0.$$

Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует такая окрестность $\mathcal{V} = \mathcal{V}_\varepsilon(v_0)$ вектора $v_0 \in TM$, что в направлении каждого вектора $v \in \mathcal{V}$ проходит псевдоголоморфный диск радиуса $R - \varepsilon$

$$f: (D_{R-\varepsilon}, J_0) \rightarrow (M, J), \quad f_*(0)e = v.$$

Данная теорема имеет важное приложение в теории инвариантных метрик. В 1967 г. Кобаяси [2] ввел инвариантную относительно биголоморфизмов псевдометрику на комплексных многообразиях. Это послужило началом теории гиперболических пространств [3–5]. Псевдометрика Кобаяси — это наибольшая псевдометрика среди не увеличивающихся при голоморфных отображениях псевдометрик, которая совпадает на единичном диске $D_1 \subset \mathbb{C}$ с расстоянием d_D , индуцированным инфинитезимальной метрикой Пуанкаре модели Лобачевского

$$dl^2 = \frac{dz d\bar{z}}{(1 - |z|^2)^2}.$$

* Работа частично поддержана грантом INTAS 96-0713.

На комплексном многообразии M она определяется так:

$$d_M(p, q) = \inf \sum_{k=1}^m d_D(z_k, w_k),$$

где нижняя грань берется по всем голоморфным отображениям $f_k: D_1 \rightarrow M$, $k = 1, \dots, m$, таким, что $f_1(z_1) = p$, $f_k(w_k) = f_{k+1}(z_{k+1})$ и $f_m(w_m) = q$. В работе [6] псевдометрика Кобаяси была перенесена на случай произвольных почти комплексных многообразий и было показано, что основные свойства этой псевдометрики сохраняются.

В 1970 г. Ройден [7] обнаружил инфинитезимальный аналог этой псевдометрики для комплексных многообразий. Мы определяем соответствующие величины в категории почти комплексных многообразий и с помощью теоремы 1 доказываем теорему о совпадении (теорема 3). Мы доказываем критерий гиперболичности (теорема 4), а также рассматриваем процедуру редукции, позволяющую определить геометрические инварианты пространства модулей псевдоголоморфных кривых.

§1. Существование псевдоголоморфных дисков

1.1. Переформулировка основного результата. Переформулируем теорему 1 на языке дифференциальных уравнений в подходящих координатах. Вначале выберем эти координаты вдоль диска $f_0(D_R) \subset M$. В силу существования изометрических координат на поверхностях [8] диск $f_0(D_R)$ может задаваться в локальной комплексной системе координат $(z^1, \dots, z^n)$, определенной в некоторой окрестности этого диска, следующим образом: $|z^1| \leq R$, $z^2 = \dots = z^n = 0$. При этом диск будет псевдоголоморфным, $J|_{\text{Im } f_0} = J_0$, и $v_0 = (1, 0, \dots, 0) \in T_0\mathbb{C} \simeq \mathbb{C}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Подходящей заменой координат можно добиться, чтобы векторные поля $\partial_k = \partial/\partial z^k$ и $\bar{\partial}_k = \partial/\partial \bar{z}^k$ удовлетворяли в точках диска $f_0(D_R)$ условиям*

$$J\partial_k = i\partial_k, \quad J\bar{\partial}_k = -i\bar{\partial}_k. \quad (1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для векторных полей $\partial_1, \bar{\partial}_1$ эти уравнения на диске уже выполнены. Определим далее в точках диска трансверсальные к нему векторные поля $\partial_k, \bar{\partial}_k$, $k \geq 2$, так, чтобы в каждой точке вся совокупность $2n$ векторов образовывала базис, а также чтобы выполнялось условие (1). Построив такие поля в точках диска, продолжим их в окрестность с помощью леммы 1. Полученная структура J совпадает со структурой J_0 на диске и не обязана совпадать с ней вне диска. $\square$

ЛЕММА 1. *Пусть вдоль диска $D^k \subset \mathbb{R}^k \times \{0\}^{n-k} \subset \mathbb{R}^n$ заданы k стандартных коммутирующих касательных полей $v_i = \partial_i$, $i = 1, \dots, k$, и $n-k$ трансверсальных полей v_j , $j = k+1, \dots, n$, причем в каждой точке $x \in D^k$ векторы $v_1, \dots, v_n$ образуют базис. Тогда в малой окрестности диска D^k существуют координаты x^i , такие, что $v_i(x) = \partial_i = \partial/\partial x^i$, $i = 1, \dots, n$, для всех $x \in D^k$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку коммутаторы векторных полей вдоль D^k определяются их 1-продолжениями вне D^k , то запишем общую формулу для 1-продолжения векторного поля v_1 :

$$v_1 = \sum_{r=1}^n \left(\delta_1^r + \sum_{s=k+1}^n x^s \phi_s^r(x_1, \dots, x_k) \right) \partial_r \mod \mu^2 \mathcal{D}, \quad (2)$$

где $\mu^2 \mathcal{D}$ — подмодуль модуля векторных полей, имеющих на подмногообразии $D^k \subset \mathbb{R}^n$ нуль второго порядка. Если на диске D^k

$$v_j = \sum_{s=1}^n a_j^s(x_1, \dots, x_k) \partial_s, \quad j = k+1, \dots, n, \quad (3)$$

то уравнения $[v_1, v_j] = 0$ при $x^{k+1} = \dots = x^n$ имеют вид

$$\sum_{r=1}^n (\partial_1 a_j^r(x^1, \dots, x^k)) \partial_r = \sum_{s=k+1}^n a_j^s(x^1, \dots, x^k) \sum_{r=1}^n \phi_s^r(x^1, \dots, x^k) \partial_r.$$

Данная система распадается (по r) на n определенных систем из $n - k$ линейных уравнений с $n - k$ неизвестными. Матрица $(a_j^s)_{k+1 \leq j, s \leq n}$ каждой системы невырожденна, а потому система имеет решение.

Итак, поле v_1 построено. Выпрямим его: $v_1 = \partial / \partial x^1$. Можно считать, что на диске $D^k \subset \{x^{k+1} = \dots = x^n = 0\}$ касательные векторные поля имеют первоначальный вид $v_i = \partial_i$. В новых координатах коэффициенты разложения (3) уже не зависят от x^1 . Поэтому можно искать продолжение поля v_2 в виде, аналогичном (2), но без зависимости от x^1 . Продолжая этот процесс, получим координаты $x^1, \dots, x^n$, в которых диск D^k принадлежит подпространству $\{x^{k+1} = \dots = x^n = 0\}$ и на этом диске

$$v_i = \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad i = 1, \dots, k, \quad v_j = \sum_{s=1}^n a_j^s \partial_s, \quad a_j^s = \text{const}, \quad j = k+1, \dots, n. \quad (4)$$

Теперь продолжаем поля в окрестность по формуле (4). $\square$

Итак, мы ввели комплексные координаты $z^k = x^k + iy^k$ в окрестности диска $f_0(D^k)$. Наше многообразие, будучи суженным, имеет вид

$$M_0 = \{|z_1| \leq R, |z_k| \leq R_1, k \geq 2\} \simeq D_R \times (D_{R_1})^{n-1} \subset \mathbb{C}^n, \quad R_1 \ll R, \quad (5)$$

и структура J имеет в точках диска $D_R = \{(x_1, y_1, 0, \dots, 0, 0)\}$ вид

$$J \frac{\partial}{\partial x^k} = \frac{\partial}{\partial y^k}, \quad J \frac{\partial}{\partial y^k} = -\frac{\partial}{\partial x^k}. \quad (6)$$

Записав уравнение Коши–Римана $f_* \circ J_0 = J \circ f_*$ для отображения диска $f: (D_{R-\varepsilon}, J_0) \rightarrow (M, J)$ (аналогично п. 3.3 из [1]) и используя условия выпрямления (6), мы получим эквивалентную формулировку основного утверждения $(\partial, \bar{\partial})$ рассматриваются в координатах z^k :

ТЕОРЕМА 1'. Пусть на многообразии M_0 вида (5) заданы n^2 функций $a_m^i(i, m = 1, \dots, n)$ класса $C^{k+\lambda}$, $k \in \mathbb{Z}_+$, $\lambda \in (0, 1)$. Пусть $\varepsilon \in (0, R)$

— произвольное сколь угодно малое действительное число. Если $a_m^i(z) = 0$ для всех точек $z \in D_R \times \{0\}^{n-1} \subset M_0$, то уравнение

$$\bar{\partial} z^i + \sum_{m=1}^n a_m^i(z) \bar{\partial} \bar{z}^m = 0, \quad z^i(0) = p^i, \quad \partial z^i(0) = u^i, \quad i = 1, \dots, n,$$

имеет решение $z^i = z^i(\zeta) \in C^{k+1+\lambda}(D_{R-\varepsilon}; M_0)$ при условии, что окрестность $\mathcal{V} = \mathcal{V}(v_0) \ni v$ вектора $v_0 = (1, 0, \dots, 0) \in T_0 M_0$ выбрана достаточно малой. Здесь $v = (p, u)$, $p = \tau_M v \in M_0$, $u \in T_p M_0$.

1.2. Покрывание окрестности дисками и еще одна переформулировка.

ТЕОРЕМА 1''. В формулировке теоремы 1' можно положить $p = 0$. Таким образом, уравнение на искомый псевдоголоморфный диск принимает в выбранных координатах следующий вид:

$$\begin{cases} \bar{\partial} z^1 = - \sum_{m=1}^n a_m^1(z) \bar{\partial} \bar{z}^m, \\ \bar{\partial} z^I = - \sum_{m=1}^n a_m^I(z) \bar{\partial} \bar{z}^m, \end{cases} \quad (7)$$

$$z^1(0) = 0, \quad z^I(0) = 0, \quad (\partial z^1(0), \partial z^I(0)) = (u^1, \dots, u^n),$$

где мультииндекс I — это $(2, \dots, n)$.

Следующее утверждение доказывает эквивалентность теорем 1' и 1''.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Для любого псевдоголоморфного диска $f_0: D_R \rightarrow M_0$ и любого $\varepsilon > 0$ малая окрестность образа $f_0(D_{R-\varepsilon})$ может быть покрыта образами близких псевдоголоморфных дисков f радиусов $R - \delta$, где $\delta < \varepsilon$: $\mathcal{O}(\text{Im } f_0(D_{R-\varepsilon})) \subseteq \bigcup_f \text{Im } f(D_{R-\delta})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возмутим почти комплексную структуру J в окрестности диска $f_0(D_R)$ так, чтобы на границе она совпала со стандартной интегрируемой структурой J_0 : для любого $\varepsilon > 0$ существует такая почти комплексная структура $\tilde{J}$, что $\tilde{J} = J$ в малой окрестности диска $f_0(D_{R-\varepsilon/2}) = D_{R-\varepsilon/2} \times \{0\}^{n-1} \subset M_0$ и $\tilde{J} = J_0$ в окрестности границы многообразия $\widetilde{M} = D_R \times (D_\delta)^{n-1} \subset M_0 \subset \mathbb{C}^n$. Далее, можно считать, что $\widetilde{M} \subset \widehat{M} = S_R^2 \times (S_{2R}^2)^{n-1} \simeq (S^2)^n$, причем $\widehat{M}$ можно снабдить почти комплексной структурой $\widehat{J}$, совпадающей с $\tilde{J}$ на $\widetilde{M}$ и являющейся стандартной интегрируемой комплексной структурой J_0 на дополнении. Снабдим многообразие $\widehat{M}$ симплектической структурой $\omega = \omega_0^{(1)} \oplus \omega_0^{(2)} \oplus \dots \oplus \omega_0^{(2)}$, где ω_0 — стандартная форма объема, причем $\omega_0^{(1)}(S_R^2) = \pi R^2$, а $\omega_0^{(2)}(S_{2R}^2) = 4\pi R^2$. Уменьшая при необходимости размер окрестности диска $f_0(D_{R-\varepsilon/2})$, можно считать, что почти комплексная структура $\widehat{J}$ подчинена симплектической структуре ω , т.е. $\omega(\xi, \widehat{J}\xi) > 0$ для $\xi \neq 0$.

Обозначим через $A \in H_2(\widehat{M}; \mathbb{Z})$ гомологический класс сферы $S_R^2 \times \{*\}^{n-1} \subset \widehat{M}$. Диск $f_0(D_{R-\varepsilon/2})$ может быть продолжен до полной рациональной псев-

доголоморфной кривой $u_0: S^2 \rightarrow \widehat{M}$, лежащей в классе A . Рассмотрим пространство $\mathcal{M}(A, \widehat{J})$ полных псевдоголоморфных кривых $u: S^2 \rightarrow \widehat{M}$ класса A . Поскольку класс A не представим в виде суммы гомологических классов $\sum_{i=1}^n A_i$, $n \geq 2$, с $\omega(A_i) > 0$, то из теоремы компактности Громова ([9, Sec. 1.5.B] или [10, Sec. 4.3.2]) следует компактность пространства $\mathcal{M}(A, \widehat{J})/G$, где $G \simeq PSL_2$ является группой комплексных автоморфизмов сферы (S^2, J_0) , $\dim G = 6$. Кроме того, для почти комплексной структуры $\widehat{J}$ общего вида пространство $\mathcal{M}(A, \widehat{J})$ является гладким многообразием размерности $2n+4$ [9, Sec. 2.1–2.2; 10, Sec. 3.1.2]. Рассмотрим непараметризованное пространство псевдоголоморфных кривых $\mathcal{W}(A, \widehat{J}) = \mathcal{M}(A, \widehat{J}) \times_G S^2$. Это пространство является компактным многообразием размерности $2n$. Рассмотрим отображение вычисления значения $e: \mathcal{W}(A, \widehat{J}) \rightarrow \widehat{M}$, действующее по формуле $e(u, z) = u(z)$ для $z \in S^2$, $u \in \mathcal{M}(A, \widehat{J})$. Мы считаем, что группа G действует на $\mathcal{M} \times S^2$ сопряжением, $\phi(u, z) = (u \circ \phi^{-1}, \phi(z))$, $\phi \in G$, а потому определение отображения e корректно. Так как вне малой окрестности образа $u_0(S^2)$ A -кривые расслаивают многообразие $\widehat{M}$ (поскольку там $\widehat{J} = J_0$), отображение e имеет степень 1, $\deg e = 1$. Поэтому через любую точку, близкую к кривой $u_0(S^2)$, проходит псевдоголоморфная кривая $u(S^2)$, гомологичная кривой $u_0(S^2)$.

Чтобы избавиться от условия общности положения для $\widehat{J}$, нужно взять последовательность $\widehat{J}_k$ структур общего положения, сходящуюся к $\widehat{J}$ в C^∞ -топологии, и воспользоваться теоремой компактности [10, В.4.2]. Пересекая полученный набор псевдоголоморфных сфер $u(S^2)$ с малой окрестностью $\mathcal{O}$ диска $f(D_{R-\varepsilon/2})$, мы получим искомым набор дисков $f(D)$ в окрестности $(\mathcal{O}, J)$. Гладкость этих дисков вытекает из стандартной эллиптической регулярности [1, Sec. 5.4, 4.3; 10, Sec. В.4.1]. $\square$

1.3. Пространства, нормы и оценки. Определим λ -гёльдерову норму комплекснозначных функций на диске D_R радиуса R формулой $\|f\| = |f| + (2R)^\lambda H_\lambda[f]$, $\lambda \in (0, 1)$, где

$$H_\lambda[f] = \sup_{w \neq 0} \left| \frac{f(z+w) - f(z)}{w^\lambda} \right|, \quad |f| = \sup |f(z)|.$$

Пространство $C^\lambda(D_R, M_0)$ λ -гёльдеровых отображений состоит из всех отображений $f: D_R \rightarrow M_0$, компоненты которых имеют конечную λ -норму, $\|f^i\| < \infty$. Пространство $C^{k+\lambda}(D_R, M_0)$, $k \in \mathbb{Z}_+$, $(k+\lambda)$ -гёльдеровых отображений состоит из отображений, все частные производные которых до порядка k включительно принадлежат C^λ .

Введем также пространство $B = C_\bullet^{k+\lambda}(D_R, M_0)$, состоящее из отображений $f \in C^{k+\lambda}$, $f(0) = 0$, с нормой $\|f\| = \sum_1^n \|f^i\|$. Заметим, что пространство B может быть также снабжено нормой

$$\|f\|' = \max \{ \|\partial f\|, \|\bar{\partial} f\| \}.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Пространства $(C^\lambda, \|\cdot\|)$ и $(C_\bullet^{1+\lambda}, \|\cdot\|')$ банаховы.

Второе утверждение следует из первого и оценки [1, Sec. 7.1.c–7.1.e]

$$\|f\| \leq 6R\|f\|'. \quad (8)$$

Рассмотрим операторы Коши

$$Sf(w) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial D_R} \frac{f(\zeta)}{\zeta - w} d\zeta, \quad Tf(w) = \frac{1}{2\pi i} \iint_{D_R} \frac{f(\zeta)}{\zeta - w} d\zeta \wedge d\bar{\zeta}.$$

Напомним известные свойства этих операторов [1, Sec. 6.1–6.2]:

$$f \in C^\lambda(D) \implies Tf \in C^{1+\lambda}(D), \quad \bar{\partial}Tf = f, \quad (9)$$

$$f \in C^\lambda(D) \implies Sf \in C^\lambda(\text{Int } D), \quad \bar{\partial}Sf = 0, \quad STf = 0, \quad (10)$$

$$f = Sf + T\bar{\partial}f \quad (\text{формула Коши–Грина–Помпейю}), \quad (11)$$

$$\|Tf\|' \leq c_1\|f\|, \quad \|Sf\| \leq c_2\|f\|. \quad (12)$$

Рассмотрим также операторы $T_k f(w) = Tf(w) - \sum_{s=0}^k \frac{1}{s!} \partial^s Tf(0) w^s$.

ЛЕММА 2. Для точек $w \in \text{Int } D$ имеет место формула

$$T_k f(w) = \frac{w^{k+1}}{2\pi i} \iint_{D_R} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - w)\zeta^{k+1}} d\zeta \wedge d\bar{\zeta}.$$

ЛЕММА 3. Оператор $T_\infty = \lim_{k \rightarrow \infty} T_k$ определен для функций $f \in C^\lambda(D_R)$, причем $T_\infty f \in C^{1+\lambda}(D_{R-\varepsilon})$.

ЛЕММА 4. $T_k(w^l \bar{w}^m) = w^l \bar{w}^{m+1}/(m+1)$ при $l < k + m + 2$ и $T_k(w^l \bar{w}^m) = w^l \bar{w}^{m+1}/(m+1) - R^{2(m+1)} w^{l-m-1}/(m+1)$ при $l \geq k + m + 2$.

СЛЕДСТВИЕ. $T_\infty(w^l \bar{w}^m) = w^l \bar{w}^{m+1}/(m+1)$.

Таким образом, оператор T_∞ реализует интегрирование по ζ на многочленах на D_R . Наряду с пространством B рассмотрим также его замкнутое подмножество $B_\delta = \{f = (f_1, \dots, f_n) \in B, |f_1 - \zeta| \leq \delta, |f_k| \leq \delta, k \geq 2\}$. Мы будем искать решение f уравнения Коши–Римана (7) в пространстве B_δ для малой окрестности $\mathcal{V}$ вектора v_0 .

1.4. Доказательство теоремы 1''.

ИДЕЯ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА. В работе [1, Theorem III] было найдено решение уравнения (7) с фиксированным вектором скорости v и малым радиусом диска $R \ll 1$. Для этого рассматривалась линейаризация почти комплексной структуры в точке. В силу близости уравнений на псевдоголоморфные кривые для заданной почти комплексной структуры J и для линейаризованной J_0 следующее отображение являлось сжимающим:

$$\Phi: B \rightarrow B, \quad (\Phi f)^i(\zeta) = v^i \zeta + T_1 \left(- \sum_m a_{\bar{m}}^i(f) \bar{\partial} \bar{f}^{\bar{m}} \right)(\zeta). \quad (13)$$

В нашем случае радиус диска не является малым; поэтому дословное перенесение аргументов из [1] возможно, только если структура J отличается от J_0 на диске f_0 на величину второго порядка малости, т. е. если функции a_1^i

на диске f_0 вырождаются вместе со своими производными. В общей ситуации это не так, и мы линеаризуем почти комплексную структуру J вдоль диска f_0 . При этом линеаризация параметризована координатой $z^1 = \zeta$ на этом диске. Решение комплексного линейного уравнения ведет себя аналогично решению действительного уравнения $\dot{x} = Ax + B$: для немалых значений параметра неверно, что $e^{At} \approx 1$, и члены ряда $e^{At} = \sum_{s=0}^{\infty} (At)^s/s!$ не являются убывающими по модулю; однако это свойство выполняется, начиная с некоторого номера $s \geq s_0$. Итак, конечные суммы ряда для экспоненты не представляют собой сжимающуюся последовательность, но нужно рассматривать эти суммы, начиная с некоторого члена.

Перейдем к доказательству. Как и в [1], исходя из формул (11), (10), мы ищем решение уравнения (7) в виде (13), но заменяем пространство B на B_δ . На самом деле, как указано выше, мы должны изменить определение оператора Φ для улучшения сходимости. Рассмотрим автоморфизм пространства $\mathbb{C}^n$, сжимающий пространство M_0 ,

$$z^1 \rightarrow z^1, \quad z^I \rightarrow z^I/N, \quad N \gg 1. \quad (14)$$

Поскольку $a_{\bar{m}}^i = 0$ вдоль диска $D_R \times \{0\}^{n-1} \subset M_0$, то при большом N в уравнении (7) функция a_1^1 станет малой, а функции a_1^I будут мало отличаться от своих линеаризаций по переменным z^I в норме $\|\cdot\|'$.

Следовательно, первое из уравнений (7), рассматриваемое как одно z^I -параметрическое уравнение, решается методом итераций с применением формулы (13) для комплексной размерности 1 и с заменой B на B_δ . При малом δ и большом N в (14) оценки из [1, Сес. 5.2] доказывают сжимаемость в норме $\|\cdot\|'$ итерационной процедуры, которую мы будем обозначать следующим образом: $z^1 \mapsto \Psi^1(z^1, z^I)$.

Для рассмотрения второго из уравнений (7) линеаризуем входящие в него функции по z^I :

$$a_1^I(z) = \sum_{m \geq 2} (a_{1;m}^I(z^1) z^m + a_{1;\bar{m}}^I(z^1) \bar{z}^m) + \hat{a}_1^I(z). \quad (15)$$

В этой формуле функции $\hat{a}_1^I(z)$ имеют второй порядок малости вдоль диска $D_R \subset M_0$. Положим также $\hat{a}_{\bar{m}}^I(z) = a_{\bar{m}}^I(z)$ при $m \neq 1$.

По теореме Вейерштрасса коэффициенты при линейных по z^I членах в (15) приближаются в норме $|\cdot|$ на D_R многочленами от $z^1, \bar{z}^1$:

$$\begin{aligned} a_{1;m}^I(z^1) &= p_m^I(z^1, \bar{z}^1) + \alpha_m^I(z^1), \\ a_{1;\bar{m}}^I(z^1) &= p_{\bar{m}}^I(z^1, \bar{z}^1) + \alpha_{\bar{m}}^I(z^1), \quad |\alpha_m^I|, |\alpha_{\bar{m}}^I| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Пусть $A^I(\zeta, z^I) = \sum_{m \geq 2} (p_m^I(\zeta, \bar{\zeta}) z^m + p_{\bar{m}}^I(\zeta, \bar{\zeta}) \bar{z}^m)$, $A_\delta^I(\zeta, z) = A^I(\zeta, z^I) - A^I(z^1, z^I)$. Тогда второе из уравнений (7) записывается в форме

$$\bar{\partial} z^I(\zeta) = -A^I(\zeta, z^I) + U^I(z(\zeta)), \quad (16)$$

где слагаемые остатка $U^I = A_\delta^I + U_1^I + U_2^I + U_3^I$ имеют вид

$$\begin{aligned} U_1^I(z) &= A^I(z^1, z^I)(1 - \bar{\partial}z^1), & U_2^I(z) &= - \sum_m \hat{a}_m^I \bar{\partial} \bar{z}^m, \\ U_3^I(z) &= - \sum_{m \geq 2} (\alpha_m^I(z^1) z^m + \alpha_{\bar{m}}^I(z^1) \bar{z}^m) \bar{\partial} \bar{z}^1. \end{aligned}$$

Уравнение (16) аппроксимируется следующим уравнением с линейной по z^I правой частью и полиномиальными по ζ коэффициентами:

$$\bar{\partial} z^I(\zeta) = -A^I(\zeta, z^I). \quad (17)$$

Его решение строится как предел итерационной процедуры

$$z_{(k+1)}^I = v^I \zeta - T_\infty[A^I(\zeta, z_{(k)}^I)]. \quad (18)$$

В силу следствия из леммы 4 итерация интегрирования с помощью оператора T_∞ имеет вид $T_\infty^k(w^l \bar{w}^m) = w^l m! \bar{w}^{m+k} / (m+k)!$, и потому процесс итераций (18) сходится при любом начальном значении $z_{(0)}^I$ к решению уравнения (17), причем сходимость экспоненциальная. В частности, начиная с некоторого номера k , последовательность $z_{(k)}^I$ становится сжимающейся. Более того, существуют такие константы C и μ , зависящие только от почти комплексной структуры J (т. е. от коэффициентов $a_{\bar{m}}^i$), что для любого $k \geq 1$ и многочлена $p(\zeta, \bar{\zeta})$ имеет место неравенство

$$\|T_\infty^k[A^I(\zeta, p)]\|' \leq C e^{\mu R} \|p\|. \quad (19)$$

Определим теперь итерационную процедуру для вычисления $z^I(\zeta)$. Пусть итерационный член $z_{[r]}^I$ уже построен. При этом данный член на основании предыдущего шага равен сумме многочлена $P_{[r]}^I(\zeta, \bar{\zeta})$ и функции $\theta_{[r]}^I(\zeta) \in C^{1+\lambda}$. Представим последнюю функцию по теореме Вейерштрасса в виде суммы многочлена (по $\zeta, \bar{\zeta}$) и погрешности: $\theta_{[r]}^I(\zeta) = Q_{[r]}^I(\zeta) + q_{[r]}^I(\zeta)$, $|q_{[r]}^I| \leq \nu |\theta_{[r]}^I|$. Определим следующий член формулой

$$z_{[r+1]}^I(\zeta) = v^I \zeta - T_\infty[A^I(P_{[r]}^I)] - T_\infty^{k_r}[A^I(Q_{[r]}^I)] - T_1[A^I(q_{[r]}^I)] + T_1[U^I(z_{[r]}^I)].$$

Здесь $A^I = A^I(\zeta, \cdot)$ и k_r — такое число, что, начиная с номера k_r , последовательность $T_\infty^{k_r}[A^I(Q_{[r]}^I)]$ сжимается с коэффициентом ε_r . При этом (см. (8)) имеют место следующие оценки на дополнительные члены:

$$\begin{aligned} \|A_\delta^I(\zeta, z') - A_\delta^I(\zeta, z'')\| &\leq c_3 \delta \|z' - z''\|', & \|U_1^I(z') - U_1^I(z'')\| &\leq c_3 \delta \|z' - z''\|', \\ \|U_2^I(z') - U_2^I(z'')\| &\leq c_3 \delta \|z' - z''\|', & \|U_3^I(z') - U_3^I(z'')\| &\leq c_4 \varepsilon \|z' - z''\|'. \end{aligned}$$

Учитывая неравенство (12), мы заключаем, что при малых $\delta, \varepsilon, \varepsilon_r$ и ν последовательность $z_{[r]}^I$ будет сжимающейся: $\|z_{[r+1]}^I - z_{[r]}^I\|' \leq (1 - \varkappa) \|z_{[r]}^I - z_{[r-1]}^I\|'$ для некоторого $\varkappa < 1$, не зависящего от r . Следовательно, учитывая итерацию с помощью Ψ^1 для переменной z^1 , мы получаем сходящуюся в $C^{1+\lambda}$

последовательность, предел которой и будет нужным решением. Действительно, положим $z_{[r+1]}^1 = \Psi^1(z_{[r]}^1, z_{[r]}^I)$, выбрав в качестве параметра z^I итерационный член $z_{[r]}^I$. Далее, при определении члена $z_{[r+1]}^I$ будем считать, что $z^1 = z_{[r]}^1$. Таким образом, мы получаем последовательность $z_{[r]}$.

В силу приведенных оценок и неравенства (19) члены и предел последовательности $z_{[r]}$ отличаются от ее начального члена $z_{[0]} = v\zeta$ менее, чем в экспоненциальное по R количество раз по сравнению с $|v - v_0|$ в норме $\|\cdot\|'$. Следовательно, при малом $|v - v_0| \ll 1$ все члены и предел итерационной последовательности лежат в B_δ . Значит, последовательность сходится в B_δ . Легко видеть, что предел последовательности $z_{[r]}$ будет решением уравнения (7). При условии гладкости коэффициентов $a_m^i \in C^{k+\lambda}(M_0)$ полученное решение гладкости $C^{1+\lambda}$ будет в действительности иметь больший класс гладкости $C^{k+1+\lambda}$. Это следует из эллиптичности уравнения при применении стандартных методов доказательства регулярности [1, Сес. 5.4, 4.3], [10, Сес. В.4.1]. При $a_m^i \in C^\infty(M_0)$ мы получаем гладкое решение уравнения Коши–Римана $z(\zeta) \in C^\infty(D_{R-\varepsilon}; M_0)$. $\square$

1.5. Пространства струй и связь с $\hbar$ -принципом. Назовем расслоением на псевдоголоморфные диски любое вложение (погружение) $\Phi: D_R \times N^{2n-2} \rightarrow M$, такое, что все отображения $\Phi|_{D_R \times \{x\}}$ псевдоголоморфны, а образ отображения Φ покрывает все многообразие M . Из конструкции предложения 2 с учетом положительности пересечений в размерности 4 [9, Сес. 2.1.C₂; 11, Сес. 1.1] следует

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Пусть (M, J) — четырехмерное почти комплексное многообразие. Для любого вложенного (погруженного) псевдоголоморфного диска $f: D_R \rightarrow M$ и любого $\varepsilon > 0$ малая окрестность образа $f(D_{R-\varepsilon})$ допускает расслоение на псевдоголоморфные диски.

Рассмотрим многообразие псевдоголоморфных струй $\mathcal{J}_{PH}^1(D_R; M)$ отображений $u: D_R \rightarrow M$. Его точками являются тройки (ζ, z, Φ) , где $\zeta \in D_R$, $z \in M$, а $\Phi: (T_\zeta D_R, J_0) \rightarrow (T_z M, J(z))$ — комплексное линейное отображение. В работе [13] показано, что на многообразии $\mathcal{J}_{PH}^1$ существует каноническая почти комплексная структура $J_{[1]}$, равная $J_0 \oplus J \oplus J$ в индуцированном минимальной связностью разложении $T_p \mathcal{J}_{PH}^1 = T_\zeta D_R \oplus T_z M \oplus T_p \mathcal{F}$, где $\mathcal{F}$ — слой естественной проекции $\tau: \mathcal{J}_{PH}^1(D_R, M) \rightarrow D_R \times M$. Каноническая проекция $\pi: \mathcal{J}_{PH}^1(D_R; M) \rightarrow M$ является псевдоголоморфным отображением, и любое псевдоголоморфное отображение $f: D_R \rightarrow M$ канонически поднимается до псевдоголоморфного отображения $j^1 f: D_R \rightarrow \mathcal{J}_{PH}^1(D_R; M)$, $j^1 f(\zeta) = (\zeta, f(\zeta), d_\zeta f)$.

Мы определим структуру $J_{[1]}$ другим способом (ср. [14, замечание 1]). Если $p = (\zeta, z, \Phi) \in \mathcal{J}_{PH}^1$, то можно считать, что отображение Φ является дифференциалом в точке ζ малого псевдоголоморфного диска $u: D_\varepsilon \rightarrow M$. Обозначим через $p^{(2)}$ 2-струю диска u в точке $\zeta \in D_\varepsilon \subset D_R$. Рассмотрим отображение $j^1 u: D_\varepsilon \rightarrow \mathcal{J}_{PH}^1$. Касательное пространство в точке p зависит только от значения $p^{(2)}$. Обозначим его через $L_{p^{(2)}}$.

Рассмотрим естественную проекцию $\rho: \mathcal{J}_{PH}^1 \rightarrow D_R$ со слоем $\mathcal{H}$. Имеем $T_p \mathcal{J}_{PH}^1 = L_{p^{(2)}} \oplus T_p \mathcal{H}$, причем оба слагаемых естественным образом наделены комплексной структурой. Положим $J_{[1]} = J_0 \oplus J$. Эта структура не зависит от выбора $p^{(2)}$, т. е. определена канонически.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Назовем псевдоголоморфный диск $g: D_R \rightarrow \mathcal{J}_{PH}^1(D_R, M)$ голономным, если отображение g является струйным поднятием псевдоголоморфного диска из D_R в M : $g = j^1 f$.

Из предложения 2 для голономного диска $g = j^1 f: D_R \rightarrow \mathcal{J}_{PH}^1$ следует существование псевдоголоморфного диска g' через любую сколь угодно близкую к образу диска g точку, не обязанного, однако, быть голономным, $g' \neq j^1(\pi \circ g')$. В этом смысле теорема 1 дает более сильное утверждение. Действительно, близость начальных точек дисков $g = j^1 f$ и $g' = j^1 f'$ в $\mathcal{J}_{PH}^1(D_{R-\varepsilon}; M)$ означает близость начальных точек и направлений отображений f и f' в TM . Поэтому из теоремы 1 следует существование C^1 -близкого диска f' , и мы можем положить $g' = j^1 f'$. Итак, доказана

ТЕОРЕМА 2. *Через любую точку, близкую к образу вложенного (погруженного) голономного псевдоголоморфного диска $g: D_R \rightarrow \mathcal{J}_{PH}^1(D_R; M)$ проходит вложенный (погруженный) голономный псевдоголоморфный диск $g': D_{R-\varepsilon} \rightarrow \mathcal{J}_{PH}^1(D_{R-\varepsilon}; M)$.* $\square$

Другими словами, предложение 2 остается верным в голономной ситуации. Доказанное утверждение является частным случаем h -принципа [15]. Также представляет интерес голономная версия предложения 4.

§2. Псевдонорма Кобаяси–Ройдена

2.1. Определение псевдонормы и основные свойства. Рассмотрим множество $\mathcal{R}(v) = \bigcup_{r>0} \mathcal{R}_r(v)$, где $\mathcal{R}_r(v)$ для $r \in \mathbb{R}_+$ состоит из псевдоголоморфных отображений $f: D_1 \rightarrow M$, таких, что $f_*(0)e = rv$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Псевдонормой Кобаяси–Ройдена на почти комплексном многообразии M назовем функцию на касательном расслоении TM , определенную формулой

$$F_M(v) = \inf_{\mathcal{R}(v)} \frac{1}{r}.$$

По теореме III из [1] множество $\mathcal{R}_r(v)$ непусто для малых r , а потому определение корректно. Мы называем F_M псевдонормой, поскольку эта функция является неотрицательной и однородной степени один: $F_M(tv) = |t|F_M(v)$. Однако F_M может обращаться в нуль на некоторых направлениях, и неравенство треугольника не выполнено. Из определения следует

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. *Для любого вектора $v \in TM_1$ и для любого псевдоголоморфного отображения $f: (M_1, J_1) \rightarrow (M_2, J_2)$ имеем*

$$F_{M_2}(f_*v) \leq F_{M_1}(v).$$

Фиксируем произвольную норму $|\cdot|$ на TM .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. (i) Для любого компакта $K \subset M$ существует константа C_K , такая, что для каждого вектора $v \in TM$ с $\tau_M v \in K$

$$F_M(v) \leq C_K |v|.$$

(ii) Пусть M — компактное многообразие (возможно, с краем) с почти комплексной структурой J , подчиненной точной симплектической форме $\omega = d\alpha$, $\omega(\xi, J\xi) > 0$ для $\xi \neq 0$. Тогда существует константа $c_M > 0$, такая, что для всех $v \in TM$

$$F_M(v) \geq c_M |v|.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для малой окрестности U точки $p \in M$ из оценок п. 5.2а работы [1] следует существование зависящего только от почти комплексной структуры J и окрестности U числа $\varepsilon > 0$, такого, что для любых $q \in U$, $v \in T_q M$, $|v| = 1$, и $r \in (0, \varepsilon)$ существует псевдоголоморфный диск $f: D_1 \rightarrow M$, такой, что $f(0) = q$, $f_*(0)e = rv$. Полагая $C_U = 1/\varepsilon$, мы имеем $F_M(v) \leq C_U |v|$ для всех (уже не обязательно единичных) векторов v с $\tau_M v \in U$. Поскольку компактное множество может быть покрыто конечным числом окрестностей U , первая часть предложения доказана. Вторая часть является переформулировкой нелинейной леммы Шварца [9, Sec. 1.3.A]: если почти комплексная структура J на компактном многообразии подчинена точной симплектической структуре ω , то производная в нуле любого псевдоголоморфного диска $f: D_1 \rightarrow M$, проходящего через фиксированную точку многообразия, ограничена константой, не зависящей от выбранного диска: $|f_*(0)e| < C$. $\square$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7. Функция F_M полунепрерывна сверху.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Неравенство $\overline{\lim}_{v \rightarrow v_0} F_M(v) \leq F_M(v_0)$ равносильно утверждению теоремы 1, поскольку $F_M(v) = \inf(1/R)$, где нижняя грань рассматривается для всех отображений $f: D_R \rightarrow M$, таких, что $f_*(0)e = v$. $\square$

2.2. Теорема о совпадении. Определим функцию $\bar{d}_M: M \times M \rightarrow \mathbb{R}$ формулой

$$\bar{d}_M(p, q) = \inf_{\gamma} \int_0^1 F_M(\dot{\gamma}(t)) dt,$$

где нижняя грань берется по всем кусочно-гладким путям из точки p в q . Из предложений 6(i) и 7 следует корректность данного определения и

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8. Функция $\bar{d}_M$ является псевдометрикой. $\square$

ТЕОРЕМА 3. Введенная псевдометрика совпадает с псевдометрикой Кобаяси, $d_M = \bar{d}_M$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $F_M(v) = \inf |\xi|$, где нижняя грань берется по всем псевдоголоморфным отображениям $f: D_1 \rightarrow M$, $f_*\xi = v$, а норма — относительно метрики Пуанкаре, то неравенство $\bar{d}_M \leq d_M$ очевидно. Докажем обратное. Мы следуем доказательству Ройдена [7].

Пусть γ — гладкая кривая из точки p в точку q , такая, что $\int_{\gamma} F_M < \bar{d}_M(p, q) + \varepsilon$. В силу полунепрерывности сверху существует непрерывная на

$[0, 1]$ функция h , такая, что $h(t) > F_M(\dot{\gamma}(t))$ и

$$\int_0^1 h(t) dt < \bar{d}_M(p, q) + \varepsilon,$$

т. е. для достаточно плотного разбиения $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_k = 1$ имеем

$$\sum_{i=1}^k h(t_{i-1})(t_i - t_{i-1}) < \bar{d}_M(p, q) + \varepsilon.$$

Рассмотрим произвольную псевдоголоморфную кривую $u_t^\gamma: D_\delta \rightarrow M$, удовлетворяющую условиям $u_t^\gamma(0) = \gamma(t)$ и $(u_t^\gamma)_*e = \dot{\gamma}(t)$. Определим для малых $\Delta t \in \mathbb{R}_+ \subset \mathbb{C}$ кривую $\hat{\gamma}(t; \Delta t) = u_t^\gamma(\Delta t)$. Так как $\hat{\gamma}(t; \Delta t) = \gamma(t + \Delta t) + O(|\Delta t|^2)$, то в силу предложений 8 и 6 для малых Δt

$$\begin{aligned} d_M(\gamma(t), \gamma(t + \Delta t)) &\leq d_M(\gamma(t), \hat{\gamma}(t; \Delta t)) + d_M(\hat{\gamma}(t; \Delta t), \gamma(t + \Delta t)) \\ &\leq F_M(\dot{\gamma}(t)) \Delta t + O(|\Delta t|^2) \leq (1 + \varepsilon) h(t) \Delta t. \end{aligned}$$

Таким образом, для достаточно плотного разбиения

$$d_M(p, q) \leq \sum_{i=1}^k d_M(\gamma(t_{i-1}), \gamma(t_i)) < (1 + \varepsilon)(\bar{d}_M(p, q) + \varepsilon).$$

Так как $\varepsilon > 0$ произвольно, то теорема доказана. $\square$

2.3. Гиперболичность и негиперболичность.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Почти комплексное многообразие (M, J) называется *гиперболическим*, если псевдометрика d_M является метрикой.

Рассмотрим расслоение единичных касательных векторов $\tau_M^{(1)}: T_1 M \rightarrow M$ для нормы $|\cdot|$, и пусть $F_M^{(1)}: T_1 M \rightarrow \mathbb{R}$ — ограничение псевдонормы Кобаяси–Ройдена. Из предложения 6(i) и теоремы 3 следует

ТЕОРЕМА 4. Функция $F_M^{(1)}$ является ограниченной на компактных подмножествах в M . Многообразие M является гиперболическим, если и только если $F_M^{(1)}$ отделена от нуля на компактных подмножествах.

Предположим теперь, что многообразие M не является гиперболическим, например, допускает псевдоголоморфные сферы. В случае почти комплексной структуры J общего вида, подчиненной некоторой симплектической форме ω на M , множество псевдоголоморфных сфер в заданном гомологическом классе $A \in H_2(M; \mathbb{Z})$ (пополненных для компактности множеством разложимых рациональных кривых) является конечномерным многообразием $\mathcal{M}(A; J)$ [9, 10]. Мы определим при помощи процедуры редукции псевдометрику на этом многообразии. А именно, положим для любых двух псевдоголоморфных сфер $f_i: S^2 \rightarrow M$, определенных с точностью до перепараметризации сферы S^2 ,

$$d_{\mathcal{M}}([f_1], [f_2]) = d_M(p_1, p_2),$$

где $p_i \in \text{Im}(f_i)$ — произвольные точки образов. Легко видеть, что $d_{\mathcal{M}}$ является корректно определенной псевдометрикой на многообразии $\mathcal{M}$.

Псевдометрика $d_{\mathcal{M}}$ является, например, метрикой для почти комплексного многообразия $M^4 = \Sigma_g^2 \times S^2$ с $g > 1$: как и в предложении 4, доказывается расслоенность M^4 на псевдоголоморфные сферы и изоморфизм $\mathcal{M} \simeq \Sigma_g^2$. Однако в случае четырехмерных многообразий данное определение интересно лишь для нулевых самопересечений. Действительно, если $A \cdot A > 0$ (в неисключительных случаях $A \cdot A \geq 0$ [11]), то две сферы $\text{Im}(f_1)$ и $\text{Im}(f_2)$ данного гомологического класса пересекаются. Поэтому $d_{\mathcal{M}}([f_1], [f_2]) = 0$.

В работе [16] показано, что для больших N многообразие $\mathcal{M} \times \mathbb{R}^{2N}$ обладает гомотопически канонической почти комплексной структурой $\tilde{J}$. Псевдометрика Кобаяши $d_{\mathcal{M} \times \mathbb{R}^{2N}}$ индуцирует псевдометрику $\hat{d}_{\mathcal{M}}$ на $\mathcal{M}$ при редукции по $\mathbb{R}^{2N}$. Возникает естественный вопрос о существовании таких структур $\tilde{J}$, что псевдометрики $\hat{d}_{\mathcal{M}}$ и $d_{\mathcal{M}}$ совпадают.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Nijenhuis A., Woolf W.* Some integration problems in almost-complex and complex manifolds. *Ann. Math.*, **77**, 424–489 (1963).
2. *Kobayashi S.* Invariant distances on complex manifolds and holomorphic mappings. *J. Math. Soc. Japan*, **19**, 460–480 (1967).
3. *Kobayashi S.* Intrinsic distances, measures, and geometric function theory. *Bull. Amer. Math. Soc.*, **82**, 357–416 (1976).
4. *Lang S.* Introduction to Complex Hyperbolic Spaces. Springer-Verlag, 1987.
5. *Полецкий Е. А., Шабат Б. В.* Инвариантные метрики. В кн.: Современные проблемы математики, Фундамент. напр., т. 9, ВИНТИ, М., 1986, с. 73–125.
6. *Kruglikov B., Overholt M.* The Kobayashi pseudodistance on almost complex manifolds, Preprint Univ. Tromsø, 97-19 (1997); e-print: <http://xxx.lanl.gov/abs/dg-ga/9703005>.
7. *Royden H. L.* Remarks on the Kobayashi metric, In: *Lect. Notes in Math.*, vol. 185, 1971, pp. 125–137.
8. *Chern S. S.* An elementary proof of the existence of isothermal parameter on a surface. *Proc. Amer. Math. Soc.*, **6**, 771–782 (1955).
9. *Gromov M.* Pseudo-holomorphic curves in symplectic manifolds. *Invent. Math.*, **82**, 307–347 (1985).
10. *McDuff D., Salamon D.* *J*-holomorphic curves and Quantum cohomology. *Amer. Math. Soc., Univ. Lecture Series*, vol. 6, 1994.
11. *McDuff D.* The local behaviour of holomorphic curves in almost complex 4-manifolds. *J. Differential Geom.*, **34**, 143–164 (1991).
12. *McDuff D.* Blow ups and symplectic embeddings in dimension 4. *Topology*, **30**, No. 3, 409–421 (1991).
13. *Gauduchon P.* The canonical almost complex structure on the manifold of 1-jets of pseudo-holomorphic mappings between two almost complex manifolds. In: *Holomorphic curves in symplectic geometry* (M. Audin, J. Lafontaine, eds.), *Progr. in Math.*, vol. 117, Birkhäuser Verlag, 1994, pp. 69–73.
14. *Кругликов Б. С.* Тензоры Ниеенхейса и препятствия к построению псевдоголоморфных отображений. *Матем. заметки*, **63**, вып. 4, 541–561 (1998).
15. *Громов М. Л.* Дифференциальные соотношения с частными производными, Мир, М., 1990.
16. *McDuff D.* Examples of symplectic structures. *Invent. Math.*, **89**, 13–36 (1987).