Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. М. Губреев, Безусловные базисы гильбертовых пространств, составленные из значений целых вектор-функций экспоненциального типа, *Функц. анализ и его прил.*, 1999, том 33, выпуск 1, 62–65

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa339>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.60.19

26 апреля 2023 г., 17:19:32

УДК 517.5

Безусловные базисы гильбертовых пространств, составленные из значений целых вектор-функций экспоненциального типа*

© 1999. Г. М. ГУБРЕЕВ

Успехи в исследовании базисных свойств конкретных семейств функций в пространствах $L_2(0, a)$ [1–3] привели к возможности изучения специальных классов безусловных базисов, ассоциированных с диссипативными вольтерровыми операторами, действующими в абстрактных гильбертовых пространствах [4]. Настоящая заметка посвящена изложению некоторых дальнейших результатов исследования, начатого в работе [4].

Пусть $e: \mathbb{C} \rightarrow \mathfrak{H}$ — целая функция экспоненциального типа со значениями в сепарабельном гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$ и $\tilde{e}(\lambda) \stackrel{\text{def}}{=} \lambda^{-1}(e(\lambda) - e(0))$. Такую функцию будем называть *квазиэкспонентой*, если выполнены следующие условия:

1) для каждого $z \in \mathbb{C}$ существует такой вектор $h(z) \in \mathfrak{H}$, что

$$(\tilde{e}(\lambda), e(z)) = (e(\lambda), h(z))$$

при всех $\lambda \in \mathbb{C}$;

2) $\text{Im}(\sum_k c_k \tilde{e}(\lambda_k), \sum_k c_k e(\lambda_k)) \geq 0$ для любых конечных совокупностей комплексных чисел $\{c_k\}_1^n$ и $\{\lambda_k\}_1^n$, причем $\text{Im} \lambda_k > 0$, $k = 1, \dots, n$.

Далее, квазиэкспоненту e будем называть *регулярной*, если существует хотя бы одна такая последовательность $\{\lambda_n\}_{-\infty}^{+\infty}$, $\inf_k \text{Im} \lambda_k > 0$, что семейство $\{e(\lambda_n)\}_{-\infty}^{+\infty}$ образует безусловный базис пространства $\mathfrak{H}$.

Задача об описании базисов, состоящих из значений квазиэкспонент, распадается на две части. Необходимо, во-первых, описать все регулярные квазиэкспоненты и, во-вторых, дать описание всех безусловных базисов пространства $\mathfrak{H}$, составленных из значений регулярной квазиэкспоненты.

Обозначим через $\Lambda^{(\text{exp})}$ [5] класс всех вольтерровых диссипативных операторов B в пространстве $\mathfrak{H}$, для которых резольвента $(I - \lambda B)^{-1}$ имеет конечный экспоненциальный тип. Мы получим пример квазиэкспоненты, если положим

$$e(\lambda) = (I - \lambda B)^{-1} y, \quad (1)$$

где y — произвольный элемент из $\mathfrak{H}$. В самом деле,

$$(\tilde{e}(\lambda), e(z)) = (e(\lambda), B^* e(z)),$$

$$\text{Im} \left(\sum_k c_k \tilde{e}(\lambda_k), \sum_k c_k e(\lambda_k) \right) = \frac{1}{2i} \left((B - B^*) \sum_k c_k e(\lambda_k), \sum_k c_k e(\lambda_k) \right) \geq 0.$$

* Эта работа выполнена при поддержке Международного научного фонда, гранты UCZ000, UCZ200.

В частности, квазиэкспонентой в $L_2(0, a)$ является вектор-функция

$$e(\lambda) = \frac{d}{dx} \int_0^x y(x-t) e^{i\lambda t} dt, \quad y \in L_2(0, a), \quad (2)$$

отвечающая выбору $\mathfrak{H} = L_2(0, a)$, $B = J_a$, где

$$(J_a f)(x) = i \int_0^x f(t) dt.$$

Особенно важную роль играют квазиэкспоненты этого класса, которые с помощью изложенной ниже процедуры порождаются весами w^2 , удовлетворяющими условию Макенхаупта

$$\sup \left\{ |K|^{-1} \int_K w^2(x) dx |K|^{-1} \int_K w^{-2}(x) dx \right\} < \infty, \quad (A_2)$$

где K — произвольный интервал вещественной оси, а $|K|$ — его длина. Для каждого такого веса существует внешняя в области $\text{Im } \lambda < 0$ функция w_- , такая, что $|w_-(x-i0)|^2 \stackrel{\text{п.в.}}{=} w^2(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Эта функция допускает интегральное представление [3]:

$$w_-(\lambda) = \lambda \int_0^\infty e^{-i\lambda t} y_w(t) dt, \quad \text{Im } \lambda < 0,$$

с некоторой функцией $y_w \in L_2^{\text{loc}}(\mathbb{R}_+)$. Обозначим теперь через e_w квазиэкспоненту вида (2) с $y(t) \stackrel{\text{п.в.}}{=} y_w(t)$, $t \in [0, a]$. Отметим, что квазиэкспоненты e_w регулярны [3].

Оказывается, что регулярные квазиэкспоненты следует искать в классе вектор-функций вида (1).

ТЕОРЕМА 1. *Каждая регулярная квазиэкспонента $e: \mathbb{C} \rightarrow \mathfrak{H}$ допускает представление*

$$e(\lambda) = (I - \lambda B)^{-1} y, \quad y \in \mathfrak{H},$$

где $B \in \Lambda^{(\text{exp})}$ имеет тривиальное ядро и ядерную мнимую компоненту.

Две квазиэкспоненты e_i со значениями в пространствах $\mathfrak{H}_i$ ($i = 1, 2$) назовем эквивалентными, если существует непрерывный и непрерывно обратимый оператор S из $\mathfrak{H}_1$ на $\mathfrak{H}_2$, такой, что $S e_1(\lambda) = e_2(\lambda)$ для всех $\lambda \in \mathbb{C}$. Ясно, что эквивалентные квазиэкспоненты могут быть регулярными лишь одновременно. Основным результатом заметки является

ТЕОРЕМА 2. *Квазиэкспонента $e: \mathbb{C} \rightarrow \mathfrak{H}$, экспоненциальный тип которой равен a , регулярна тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:*

- 1) вес $w^2(x) \stackrel{\text{def}}{=} \|e(x)\|^2$ удовлетворяет условию (A_2) на $\mathbb{R}$;
- 2) e эквивалентна квазиэкспоненте e_w со значениями в $L_2(0, a)$, построенной по весу w^2 на $\mathbb{R}$.

Таким образом, квазиэкспоненты e_w , где w^2 — произвольный вес Макенхаупта на $\mathbb{R}$, являются свободной моделью в классе всех регулярных квазиэкспонент со значениями в абстрактных гильбертовых пространствах. Отметим также, что условие эквивалентности квазиэкспонент e и e_w равносильно

равенствам

$$B = S^{-1} J_a S, \quad Sy = y_w, \quad S: \mathfrak{H} \rightarrow L_2(0, a), \quad (3)$$

где оператор B и вектор y отвечают квазиэкспоненте e в силу теоремы 1. Поэтому теорема 2 может быть положена в основу нового метода доказательства критериев подобия вольтерровых диссипативных операторов. Первоначальные результаты в этом направлении получены в [4]; дальнейшему их развитию будет посвящена отдельная статья.

Поскольку центральной частью теоремы 2 является необходимость условия 1), то наметим основные вехи в доказательстве этого утверждения. Прежде всего, для регулярных квазиэкспонент e устанавливается сходимость интегралов

$$\int_{-\infty}^{+\infty} w^{\pm 2}(x)(1+x^2)^{-1} dx, \quad w(x) = \|e(x)\|.$$

Поэтому существует внешняя в области $\operatorname{Im} \lambda > 0$ функция w_+ , для которой $|w_+(x+i0)|^2 \stackrel{\text{п.в.}}{=} w^2(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Доказывается, что $\|e(\lambda)\| < |w_+(\lambda)|$ при $\operatorname{Im} \lambda > 0$. Второй шаг состоит в том, чтобы, отправляясь от этого неравенства, получить оценку для интеграла Пуассона

$$\frac{\operatorname{Im} \lambda}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} w^2(x)|x-\lambda|^{-2} dx \leq K|w_+(\lambda)|^2, \quad \operatorname{Im} \lambda > 0. \quad (4)$$

Далее, модифицируя соответствующие рассуждения из [4], доказываем ограниченность оператора $w\mathcal{H}w^{-1} - w\varphi^{-1}\mathcal{H}\varphi w^{-1}$ в пространстве $L_2(\mathbb{R})$. Здесь $\mathcal{H}$ — преобразование Гильберта, а

$$\varphi(\lambda) = e^{ia\lambda/2} \text{ v. p. } \prod_k \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_k}\right),$$

где $\{\lambda_k\}_{-\infty}^{+\infty}$ — такая последовательность, что семейство $\{e(\lambda_k)\}_{-\infty}^{+\infty}$ образует безусловный базис в $\mathfrak{H}$. Записывая условие ограниченности этого оператора на функциях $(x-\lambda)^{-1}$, $\operatorname{Im} \lambda \neq 0$, и учитывая (4), приходим к ограниченности оператора $w\mathcal{H}w^{-1}$, что и требовалось.

Перейдем теперь к описанию безусловных базисов, порожденных регулярной квазиэкспонентой. Соединяя сказанное выше с результатами из [3], приходим к следующей теореме.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $e: \mathbb{C} \rightarrow \mathfrak{H}$ — регулярная квазиэкспонента экспоненциального типа a и $w(x) \stackrel{\text{def}}{=} \|e(x)\|$, $x \in \mathbb{R}$. Тогда семейство $\{e(\lambda_k)\}_{-\infty}^{+\infty}$, $\inf_k \operatorname{Im} \lambda_k > 0$, образует безусловный базис пространства $\mathfrak{H}$ в том и только том случае, когда последовательность $\{\lambda_k\}_{-\infty}^{+\infty}$ совпадает с множеством (простых) корней целой функции конечной степени φ , удовлетворяющей условиям

- 1) $h_\varphi(\pi/2) = 0$, $h_\varphi(-\pi/2) = a$;
- 2) вес $w^{-2}(x)|\varphi(x)|^2$ удовлетворяет условию (A_2) на $\mathbb{R}$;
- 3) последовательность $\{\lambda_k\}_{-\infty}^{+\infty}$ отделима в смысле Карлесона, т.е.

$$\inf_k \prod_{j \neq k} |\lambda_k - \lambda_j| \cdot |\lambda_k - \bar{\lambda}_j|^{-1} > 0.$$

Не вдаваясь в подробности, отметим, что аналогичный результат можно сформулировать и без ограничения $\inf_k \operatorname{Im} \lambda_k > 0$.

В качестве приложения сформулированных результатов дадим описание всех регулярных квазиэкспонент вида (2). Для этого рассмотрим множество всех аналитических в области $\operatorname{Im} \lambda < 0$ функций вида $W(\lambda) = S(\lambda)V(\lambda)$, где функция V внешняя, причем вес $|V(x - i0)|^2$ удовлетворяет условию (A_2) на $\mathbb{R}$, а S внутренняя и такая, что

$$\inf_{\operatorname{Im} \lambda < 0} \{|S(\lambda)| + \exp(\operatorname{Im} \lambda a)\} > 0. \quad (5)$$

Каждая такая функция W изображается в виде

$$W(\lambda) = \lambda \int_0^\infty e^{-i\lambda t} y_W(t) dt, \quad \operatorname{Im} \lambda < 0, \quad y_W \in L_2^{\text{loc}}(\mathbb{R}_+).$$

Полученное таким образом множество функций из $L_2^{\text{loc}}(\mathbb{R}_+)$ обозначим через $\mathcal{M}$.

ТЕОРЕМА 4. *Квазиэкспонента вида (2) со значениями в $L_2(0, a)$ регулярна тогда и только тогда, когда у почти всюду совпадает с сужением на $[0, a]$ некоторой функции $y_W \in \mathcal{M}$.*

Доказательство основано на теореме Сарасона о коммутанте [6], поскольку в этом случае $B = J_a$ и равенство (3) означает, что S принадлежит коммутанту J_a . Из теоремы о короне [7] выводится, что условие (5) равносильно непрерывной обратимости оператора S .

Теорема 3 дает описание всех безусловных базисов, порожденных такими квазиэкспонентами. В частности, имеет место

СЛЕДСТВИЕ. *Семейство функций*

$$\frac{d}{dx} \int_0^x y(x-t) e^{int} dt, \quad n \in \mathbb{Z},$$

образует безусловный базис в $L_2(0, 2\pi)$ тогда и только тогда, когда у почти всюду совпадает с сужением на $[0, a]$ некоторой функции $y_W \in \mathcal{M}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Hruscev S. V., Nikol'skii N. K., Pavlov B. S. Lect. Notes in Math., Vol. 864, 1981, pp. 214–335.
2. Губреев Г. М. Изв. АН АрмССР, Математика, **23**, № 3, 237–269 (1988).
3. Губреев Г. М. Записки научн. сем. ЛОМИ, Исследования по линейным операторам и теории функций, 19, **190**, 34–80 (1991).
4. Губреев Г. М. Матем. сборник, **183**, № 9, 105–146 (1992).
5. Бродский М. С. Треугольные и жордановы представления линейных операторов. Наука, М., 1969.
6. Sarason D. Trans. Amer. Math. Soc., **127**, No. 2, 179–203 (1967).
7. Гофман К. Банаховы пространства аналитических функций. ИЛ, М., 1963.

Южноукраинский педагогический
университет, г. Одесса

Поступило в редакцию
27 января 1997 г.