Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. Л. Горбачук, Об аппроксимации решений операторных уравнений методом наименьших квадратов, *Функц. анализ и его прил.*, 2005, том 39, выпуск 1, 85–90

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa34>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.92.164.108

26 апреля 2023 г., 13:25:22

стоящими в j -й строке и k -м столбце ($k < j$), где

$$b_{p(j)}(\xi_j, \lambda) = \begin{cases} \lambda^{-m} a_{p(j)}(\xi_j), & \text{если } 1 \leq p(j) \leq n, \\ \lambda^{-(m-1)} a_{p(j)}(\xi_j), & \text{если } n+1 \leq p(j) \leq N. \end{cases}$$

Матрица Q_λ пределяется по формуле (10). Таким образом, в данном случае критерий гиперболичности легко проверяется.

ЛИТЕРАТУРА

1. Вальтер Х.-О., Скубачевский А. Л. Труды ММО, **64**, 3–53 (2003).
2. Хейл Дж. Теория функционально-дифференциальных уравнений. Мир, М., 1984.
3. Chow S. N., Diekmann O., Mallet-Paret J. Japan J. Appl. Math., **2**, No. 2, 433–469 (1985).
4. Chow S. N., Walther H. O. Trans. Amer. Math. Soc., **307**, No. 1, 127–142 (1988).
5. Walther H. O. Mem. Amer. Math. Soc., **402** (1989).
6. Diekmann O., van Gils S., Verduyn Lunel S., Walther H. O. Delay Equations. Functional, Complex, and Nonlinear Analysis. Springer-Verlag, New York, 1995.
7. Mallet-Paret J., Sell G. J. Differential Equations, **125**, No. 2, 385–440 (1996).

Mathematisches Institut,
Universitaet Giessen, Germany
e-mail: Hans-Otto.Walther@math.uni-giessen.de

Поступило в редакцию
28 июня 2004 г.

Московский авиационный институт
e-mail: skub@lector.ru

УДК 517.948

Об аппроксимации решений операторных уравнений методом наименьших квадратов*

© 2005. М. Л. ГОРБАЧУК

Пусть $\mathfrak{H}$ — сепарабельное гильбертово пространство над полем $\mathbb{C}$ комплексных чисел, $(\cdot, \cdot)$ и $\|\cdot\|$ — скалярное произведение и норма в нем, а A — обратимый замкнутый линейный оператор с $\mathcal{D}(A^{-1}) = \mathfrak{H}$ ($\mathcal{D}(\cdot)$ — область определения оператора).

Рассмотрим уравнение

$$Au = f, \quad f \in \mathfrak{H}, \quad (1)$$

и будем искать его приближенное решение u_n методом наименьших квадратов, т. е. в виде

$$u_n = \sum_{k=1}^n \alpha_k e_k,$$

где $\{e_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ — наперед выбранная линейно независимая система векторов из $\mathcal{D}(A)$ (так называемая координатная система), а $\alpha_k \in \mathbb{C}$ таковы, что величина

*Работа поддержана Совместным грантом CRDF и правительства Украины UM1-2567-OD03.

$R_n^2 = \|Au_n - f\|^2$ принимает свое наименьшее значение. Числа α_k однозначно определяются системой уравнений

$$\sum_{k=1}^n \alpha_k (Ae_k, Ae_i) = (f, Ae_i), \quad i = 1, \dots, n.$$

Если система $\{e_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ полна в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}^1 = \mathscr{D}(A)$ со скалярным произведением $(x, y)_1 = (Ax, Ay)$, то, как известно (см., например, [1]),

$$r_n = \|u - u_n\| \rightarrow 0, \quad R_n = \|Au_n - f\| \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

Однако исследование зависимости асимптотического поведения величин r_n и R_n при $n \rightarrow \infty$ от выбора системы $\{e_k\}_{k \in \mathbb{N}}$, свойств параметров уравнения (1) и его решения u оказалось довольно трудной задачей, которая в общем случае не решена до сих пор. Некоторые частные результаты для обыкновенных дифференциальных уравнений содержатся в [2, 3] и для уравнения (1) с самосопряженным положительно определенным оператором A с дискретным спектром — в [4]. Настоящая заметка посвящена решению указанной задачи в случае, когда $\{e_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ — ортонормированный собственный базис самосопряженного положительно определенного оператора B , сходного с A , т. е. такого, что $\mathscr{D}(B) = \mathscr{D}(A)$. Представляемые здесь результаты носят заверченный характер в том смысле, что условия, гарантирующие определенный порядок стремления к нулю величин r_n и R_n , сформулированные в терминах степени гладкости относительно оператора B решения u , являются необходимыми и достаточными. Заметим еще, что вопрос зависимости степени гладкости решения u от асимптотического поведения r_n и R_n на бесконечности (обратные теоремы) рассматривается впервые.

1. Всюду в дальнейшем предполагается, что

- (i) оператор A^{-1} компактный;
- (ii) спектр $\lambda_k = \lambda_k(B)$ самосопряженного положительно определенного оператора B , сходного с A , простой;
- (iii) в качестве координатной системы $\{e_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ в методе наименьших квадратов выбран ортонормированный собственный базис оператора B .

Следующая теорема показывает, что величина $R_n = \|Au_n - f\|$ может стремиться к нулю на бесконечности произвольным образом.

ТЕОРЕМА 1. Пусть выполнены условия (i)–(iii). Какова бы ни была убывающая числовая последовательность $\{\gamma_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, $\gamma_n > 0$, $\gamma_n \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$), существует вектор $f \in \mathfrak{H}$, такой, что

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad R_n \geq \gamma_n.$$

Естественно возникает вопрос, какими свойствами должно обладать решение u уравнения (1) для того, чтобы величина R_n имела определенный, наперед заданный порядок стремления к нулю. Ответ дает следующая (прямая)

ТЕОРЕМА 2. Предположим, что условия (i)–(iii) выполнены. Тогда для $\alpha \geq 0$

$$u \in \mathscr{D}(B^{\alpha+1}) \implies \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_{n+1}^\alpha R_n = 0. \quad (2)$$

Поскольку B — оператор, сходный с A , по теореме о замкнутом графике операторы AB^{-1} и BA^{-1} определены на всем $\mathfrak{H}$ и ограничены. Поэтому соотношение (2) эквивалентно утверждению

$$u \in \mathcal{D}(B^{\alpha+1}) \implies \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_{n+1}^\alpha \|B(u_n - u)\| = 0.$$

Нетрудно привести пример, показывающий, что обратное к теореме 2 утверждение, вообще говоря, неверно, т. е. что равенство $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_{n+1}^\alpha \|Au_n - f\| = 0$ еще не гарантирует принадлежности u к $\mathcal{D}(B^{\alpha+1})$. Зато имеет место

ТЕОРЕМА 3. *В предположениях (i)–(iii) существует $\varepsilon > 0$, такое, что*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_{n+1}^{\alpha+\varepsilon} R_n = 0 \implies u \in \mathcal{D}(B^{\alpha+1}).$$

Следующая теорема устанавливает связь между величиной $r_n = \|u - u_n\|$ и степенью гладкости относительно B решения u уравнения (1).

ТЕОРЕМА 4. *Пусть выполняются условия (i)–(iii). Тогда*

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_{n+1}^{\alpha+\varepsilon} r_n = 0 \implies u \in \mathcal{D}(B^\alpha).$$

Если, кроме того, $\mathcal{D}(B^2) = \mathcal{D}(A^*A)$ и $\alpha \geq 2$, то

$$u \in \mathcal{D}(B^\alpha) \implies \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_{n+1}^\alpha r_n = 0.$$

Для самосопряженного положительно определенного A и $\alpha = 2$ второе утверждение теоремы содержится в [4]. Заметим также, что из условия $\mathcal{D}(B^2) = \mathcal{D}(A^*A)$ следует, что $\mathcal{D}(B) = \mathcal{D}(A)$. Однако обратное, вообще говоря, не верно.

Обозначим через $C^\infty(B)$ множество всех бесконечно дифференцируемых векторов оператора B :

$$C^\infty(B) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}_0} \mathcal{D}(B^n), \quad \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}.$$

Из теорем 2–4 вытекает

СЛЕДСТВИЕ 1. *Имеют место соотношения*

$$u \in C^\infty(B) \iff \forall \alpha > 0 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_{n+1}^\alpha R_n = 0 \iff \forall \alpha > 0 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_{n+1}^\alpha r_n = 0.$$

2. Пусть $\{m_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ — неубывающая последовательность положительных чисел (без ограничения общности можно считать, что $m_0 = 1$). Положим

$$C_{\{m_n\}}(B) = \bigcup_{\alpha > 0} C_\alpha \langle m_n \rangle(B), \quad C_{(m_n)}(B) = \bigcap_{\alpha > 0} C_\alpha \langle m_n \rangle(B),$$

где

$$C_\alpha \langle m_n \rangle(B) = \{x \in C^\infty(B) \mid \exists c = c(x) > 0 : \|B^k f\| \leq c \alpha^k m_k \quad \forall k \in \mathbb{N}_0\}.$$

Следуя [5, 6], для вектора $x \in C_{\{m_n\}}(B)$ положим

$$\sigma(x, m_n, B) = \inf \{\alpha : x \in C_\alpha \langle m_n \rangle(B)\} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\|B^n x\|}{m_n} \right)^{1/n}.$$

В конкретных ситуациях, когда $m_n = n!$ и $m_n \equiv 1$, приходим к известным пространствам $C_{\{n!\}}(B)$, $C_{(n!)}(B)$ и $C_{\{1\}}(B)$ аналитических [7], целых [8] и целых экспоненциального типа [9] векторов оператора B . В частности, если

$\mathfrak{H} = L_2(a, b)$, $-\infty < a < b < \infty$, $B = d/dx$ и $\mathcal{D}(B)$ — пространство Соболева $W_2^1(a, b)$, то $C^{(\infty)}(B)$ совпадает с множеством бесконечно дифференцируемых на $[a, b]$ функций, $C_{\{n!\}}(B)$ и $C_{(n!)}(B)$ — пространства аналитических на $[a, b]$ и соответственно целых функций и $C_{\{1\}}(B)$ совпадает с пространством целых функций экспоненциального типа. При $m_n = n^{n\beta}$ ($\beta > 1$) получаем классы $\mathfrak{G}_{\{\beta\}}(B) = C_{\{n^{n\beta}\}}(B)$ и $\mathfrak{G}_{(\beta)}(B) = C_{(n^{n\beta})}(B)$ бесконечно дифференцируемых функций Жевре типа Румье и Берлинга (см., например, [10]). В дальнейшем будем предполагать, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{m_n} = \infty \quad (3)$$

и

$$\forall h > 1 \quad \exists c = c(h) > 0 \quad m_{n+1} \leq ch^n m_n. \quad (4)$$

Так, например, при $\beta > 0$ последовательности $m_n = n^{n\beta}$ и $m_n = (n!)^\beta$ удовлетворяют условиям (3) и (4).

Введем также функции

$$\rho_1(\lambda) = \sup_{n \in \mathbb{N}_0} \frac{\lambda^n}{m_n}, \quad \rho_2(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{m_n}, \quad \rho_3(\lambda) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2n}}{m_n^2} \right)^{1/2}. \quad (5)$$

При условии (3) все $\rho_i(\lambda)$ ($i = 1, 2, 3$) положительны и монотонно стремятся к бесконечности при $\lambda \rightarrow \infty$; при этом $\rho_2(\lambda)$ допускает продолжение до целой функции. Если $\{m_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ удовлетворяет еще и (4), то

$$\forall \alpha < 1 \quad \exists c = c(\alpha) \quad \rho_i(\lambda) \geq c_i \lambda \rho_i(\alpha \lambda).$$

ТЕОРЕМА 5. Пусть выполнены условия (i)–(iii) и последовательность $\{m_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ удовлетворяет условиям (3) и (4). Тогда

$$\begin{aligned} u \in C_{\{m_n\}}(B), \quad \sigma(u, m_n, B) = \sigma &\iff \\ \forall \varepsilon > 0 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \rho\left(\frac{\lambda_{n+1}}{\sigma + \varepsilon}\right) R_n = 0, \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \rho\left(\frac{\lambda_{n+1}}{\sigma - \varepsilon}\right) R_n = \infty; \\ u \in C_{(m_n)}(B) &\iff \forall \varepsilon > 0 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \rho\left(\frac{\lambda_{n+1}}{\varepsilon}\right) R_n = 0, \end{aligned}$$

где $\rho(\lambda)$ — любая из функций $\rho_i(\lambda)$.

Заметим, что в теореме 5 R_n можно заменить на r_n .

ЗАМЕЧАНИЕ. Если в качестве приближенного решения уравнения (1) взять вектор u_n , на котором функция $F(u) = \|Au - f\|^2$ достигает своего минимума на подпространстве $\mathfrak{H}_n = \mathfrak{H}_{\lambda_1} \oplus \mathfrak{H}_{\lambda_2} \oplus \dots \oplus \mathfrak{H}_{\lambda_n}$ ($\mathfrak{H}_{\lambda_k}$ — собственное подпространство оператора B , соответствующее собственному числу λ_k), то в формулировках всех теорем можно опустить предположение (ii) о простоте спектра оператора B .

3. Положим

$$\mathfrak{H} = L_2(0, \pi), \quad A = (-1)^m \frac{d^{2m}}{dt^{2m}} + \sum_{k=0}^{2m-1} p_k(t) \frac{d^k}{dt^k},$$

$$\mathcal{D}(A) = \{v(\cdot) \in W_2^{2m}[0, \pi] \mid v^{(2k)}(0) = v^{(2k)}(\pi) = 0, k = 0, \dots, m-1\},$$

где $p_k(\cdot) \in C[0, \pi]$. Предположим также, что уравнение $Au = 0$ имеет только тривиальное решение.

Оператор B определим формулой

$$B = (-1)^m \frac{d^{2m}}{dt^{2m}}, \quad \mathcal{D}(B) = \mathcal{D}(A).$$

Этот оператор является самосопряженным и положительно определен, его спектр $\{\lambda_k = k^{2m}\}_{k \in \mathbb{N}}$ дискретный и простой, а функции $\sqrt{2/\pi} \sin kt$ образуют собственный ортонормированный базис оператора B в $L_2(0, \pi)$.

Нетрудно показать, что при дополнительных условиях на $p_k(t)$, а именно

$$p_k \in C^{2mj}[0, \pi] \quad (6)$$

и

$$p_k^{(2r-1)}(0) = p_k^{(2r-1)}(\pi) = 0 \quad \text{при четном } k \quad (1 \leq r \leq mj), \quad (7)$$

$$p_k^{(2r)}(0) = p_k^{(2r)}(\pi) = 0 \quad \text{при нечетном } k \quad (0 \leq r \leq (m-1)j), \quad (8)$$

справедливо равенство

$$\mathcal{D}(A^{j+1}) = \mathcal{D}(B^{j+1}).$$

На основании теоремы 2 приходим к следующему выводу.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Если коэффициенты $p_k(t)$ удовлетворяют условиям (6)–(8), а

$$f(\cdot) \in C^{2mj}[0, \pi] \quad \text{и} \quad f^{(2k)}(0) = f^{(2k)}(\pi) = 0 \quad (k = 0, 1, \dots, mj-1), \quad (9)$$

то

$$(n+1)^{2mj} \|Au_n - f\|_{L_2(0, \pi)} \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty,$$

или, что эквивалентно

$$(n+1)^{2mj} \|u_n - u\|_{W_2^{2m}[0, \pi]} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty). \quad (10)$$

Заметим, что в случае, когда $m = 1$, $j = 1$, соотношение (10) было установлено в [2].

Из следствия 1 и теоремы 5 непосредственно вытекает

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Предположим, что $p_k(\cdot)$ принадлежат $C^\infty[0, \pi]$ и удовлетворяют условиям (6), (7) при любом $r \in \mathbb{N}_0$. Тогда включение $f(\cdot) \in C^\infty[0, \pi]$ и выполнение условия (9) при $k \in \mathbb{N}_0$ эквивалентны утверждению

$$\forall \alpha > 0 \quad n^\alpha \|u_n - u\|_{W_2^{2m}[0, \pi]} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

Если вдобавок функции $p_k(t)$ аналитичны на $[0, \pi]$, то утверждение

$$\exists \alpha > 0 \quad e^{\alpha n} \|u_n - u\|_{W_2^{2m}[0, \pi]} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

эквивалентно аналитичности функции $f(t)$ на $[0, \pi]$ и условию (9) для любого $k \in \mathbb{N}_0$. Если же $p_k(t)$ — целые функции, то, для того чтобы было справедливо утверждение

$$\forall \alpha > 0 \quad e^{\alpha n} \|u_n - u\|_{W_2^{2m}[0, \pi]} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty),$$

необходимо и достаточно, чтобы функция $f(t)$ была целой и удовлетворяла условию (9) для произвольного $k \in \mathbb{N}_0$.

Заметим, что в предложении 2 величина $\|u_n - u\|_{W_2^{2m}[0, \pi]}$ может быть заменена на $\|Au_n - f\|_{L_2^{2m}[0, \pi]}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Михлин С. Г.* Вариационные методы в математической физике. Наука, М., 1970.
2. *Крылов Н. М.* Избранные труды, в 3-х т. Изд-во АН УССР, Киев, т. 3, 1961.
3. *Лучка А. Ю., Лучка Т. Ф.* Возникновение и развитие прямых методов математической физики. Наукова думка, Киев, 1985.
4. *Дэвисшариани А. В.* Ж. вычисл. матем. и матем. физ., **8**, №5, 1110–1116 (1968).
5. *Горбачук М. Л., Горбачук В. И.* УМН, **48**, вып. 4, 180 (1993).
6. *Горбачук М. Л.* Функц. анализ и его прил., **37**, вып. 1, 75–78 (2002).
7. *Nelson E.* Ann. Math., **70**, No. 3, 572–615 (1959).
8. *Goodman R.* Trans. Amer. Math. Soc., **143**, 55–76 (1969).
9. *Радыно Я. В.* Докл. АН БССР, **27**, №9, 791–793 (1983).
10. *Lions J. L., Magenes E.* Problèmes aux limites non homogènes et applications, Vol. 3, Dunod, Paris, 1970.

Институт математики НАН Украины
e-mail: imath@horbach.kiev.ua

Поступило в редакцию
16 мая 2003 г.

УДК 512.7+517.55

Новые примеры поверхностей в $\mathbb{CP}^3$, гиперболических по Кобаяши*

© 2005. М. ЗАЙДЕНБЕРГ, Б. ШИФФМАН

Клеменс [2] показал, что очень общая¹⁾ поверхность X_d степени $d \geq 5$ в $\mathbb{CP}^3$ не содержит рациональных кривых. Ксю [10] доказал, что на X_d также нет эллиптических кривых (и, стало быть, на X_d нет кривых рода < 2), т. е. X_d алгебраически гиперболична. Согласно гипотезе Кобаяши, поверхность X_d должна быть гиперболичной по Кобаяши и, следовательно, не должна содержать непостоянных целых кривых $\mathbb{C} \rightarrow X_d$. Известно [11], что это свойство открыто в хаусдорфовой топологии на проективном пространстве всех поверхностей данной степени d и, более того, оно выполняется для очень общей поверхности степени ≥ 21 в $\mathbb{CP}^3$ [3, 6].

Примеры гиперболических поверхностей в $\mathbb{CP}^3$ строились неоднократно; см. ссылки в наших предыдущих работах [8, 9], где также даны такие примеры. На сегодня минимальная степень в известных примерах равна 8; первое семейство примеров степени 8 в $\mathbb{CP}^3$ было обнаружено Фуджимото [5] и независимо Дювалем [4]. В [9] мы воспользовались методом деформаций для построения нового примера гиперболической октики в $\mathbb{CP}^3$. Здесь мы предлагаем упрощенный вариант нашего метода для построения гиперболической октики в $\mathbb{CP}^3$, которая является деформацией объединения двух общих конусов в $\mathbb{CP}^3$ степени 4. В действительности так строятся примеры любой степени, начиная с 8.

В силу наблюдения Мамфорда и Богомолова, доказанного в [7], любая КЗ-поверхность содержит рациональные и эллиптические кривые. В частности, такие кривые имеются на любой гладкой поверхности в $\mathbb{CP}^3$ степени ≤ 4 . Рациональную кривую на общей квартике в $\mathbb{CP}^3$ дает ее сечение трикасательной плоско-

*Исследования первого автора частично поддержаны NSF, грант DMS-0100474.

¹⁾То есть принадлежащая в пространстве параметров дополнению к счетному объединению собственных алгебраических подмножеств.