Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. М. Гусейн-Заде, Ф. Дельгадо, А. Кампильо, О
монодромии особенности плоской кривой и ряде
Пуанкаре ее кольца функций, *Функц. анализ и его
прил.*, 1999, том 33, выпуск 1, 66–68

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa340>

Использование Общероссийского математического портала Math-
Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользователь-
ским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.59.107

26 апреля 2023 г., 02:32:30

УДК 512.772.1

О монодромии особенности плоской кривой и ряде Пуанкаре ее кольца функций^{*}

© 1999. С. М. Гусейн-Заде, Ф. Дельгадо, А. Кампильо

Целью настоящей заметки является следующее утверждение: дзета-функция преобразования классической монодромии неприводимой особенности плоской кривой совпадает с рядом Пуанкаре кольца функций на ней.

Пусть $(C, 0) \subset (\mathbb{C}^2, 0)$ — неприводимая особенность плоской кривой, задаваемой уравнением $f = 0$, $f: (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ — росток голоморфной функции с изолированной критической точкой в начале координат. Пусть $h_f: V_f \rightarrow V_f$ — преобразование классической монодромии особенности f , действующее на ее слое Милнора V_f (см. [2]). Дзета-функция преобразования $h: X \rightarrow X$ топологического пространства X (для корректности — имеющего конечномерные гомологии) — это рациональная функция

$$\zeta_h(t) = \prod_{q \geq 0} [\det(\text{id} - t \cdot h_* |_{H_q(X; \mathbb{R})})]^{(-1)^{q+1}}.$$

Пусть $\zeta_f(t)$ — дзета-функция преобразования классической монодромии $h_f: V_f \rightarrow V_f$ особенности f .

ЗАМЕЧАНИЕ. Это — определение дзета-функции из [1]. Дзета-функция, определенная в [2], является обратной к ней.

Пусть $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2, 0}$ — кольцо ростков голоморфных функций в начале координат на комплексной плоскости $\mathbb{C}^2$, и пусть $\mathcal{O}_C = \mathcal{O}_{\mathbb{C}^2, 0}/f\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2, 0}$ — кольцо ростков функций на кривой C . Пусть $p: (\mathbb{C}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$ — униформизация (параметризация) кривой C , т.е. росток аналитического отображения, образ которого совпадает с C и которое является изоморфизмом между $\mathbb{C}$ и C вне начала координат. Для ростка $\varphi \in \mathcal{O}_C$ обозначим через $v(\varphi)$ порядок функции $\varphi \circ p: (\mathbb{C}, 0) \rightarrow \mathbb{C}$ в нуле, т.е. степень главного члена в ее степенном разложении $\varphi \circ p(\tau) = a \cdot \tau^{v(\varphi)} + \text{члены более высокой степени}$, $a \neq 0$; $v(0)$ полагается равным бесконечности. Функция $v(\cdot)$ определяет фильтрацию кольца $\mathcal{O}_C$: $F_i = \{\varphi \in \mathcal{O}_C : v(\varphi) \geq i\}$. Пусть $L(t)$ — ряд Пуанкаре этой фильтрации: $L(t) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i t^i$, где $c_i = \dim_{\mathbb{C}}(F_i/F_{i+1})$. Легко показать (см. ниже) что ряд $L(t)$ сходится в окрестности начала координат и определяет рациональную функцию переменной t (также обозначаемую здесь через $L(t)$).

ТЕОРЕМА. $\zeta_f(t) = L(t)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\pi: (X, D) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$ — минимальное разрешение кривой C с помощью последовательности σ -процессов в особых точках

^{*} Работа первого автора выполнена при частичной поддержке грантов Iberdrola, РФФИ-98-01-00612 и INTAS-97-1644; работа последних двух авторов (F. Delgado, A. Campillo) выполнена при частичной поддержке гранта DGICYT PB94-1111-C02-01 и гранта Кастильи и Леона VA51/97.

([2]; под этим понимается разрешение кривой как вложенной в комплексную плоскость, которому в англоязычной литературе соответствует термин «embedded resolution».) Двойственный граф этого разрешения показан на рис. 1. Вершины α этого графа соответствуют неприводимым компонентам E_α исключительного дивизора D разрешения (эти компоненты изоморфны комплексным проективным прямым). Две вершины графа соединены ребром, если соответствующие компоненты пересекаются. Стрелка соответствует собственному прообразу кривой C . Здесь g — количество пар Пюизо (m_j, n_j) кривой C [2]. Пусть v^α — кратность поднятия $f \circ \pi$ функции f (уравнения кривой C) на пространство X разрешения вдоль компоненты E_α исключительного дивизора, соответствующей вершине α двойственного графа разрешения. Пусть $\bar{\beta}_j = v^{a_j}$, $\gamma_j = v^{b_j}$ для вершин a_j и b_j , указанных на рис. 1.

Рис. 1. Двойственный граф разрешения кривой C

В соответствии с формулой Н. А'Кампо [1] дзета-функция $\zeta_f(t)$ особенности f равна $\prod_\alpha (1 - t^{v_\alpha})^{-\chi(E_\alpha^0)}$, где E_α^0 — компонента E_α без точек пересечения с другими компонентами полного прообраза кривой C (т.е. с компонентами исключительного дивизора D и с собственным прообразом кривой C), а $\chi(\cdot)$ — эйлерова характеристика. Эйлерова характеристика $\chi(E_\alpha^0)$ равна нулю, если вершина α не совпадает ни с одной из вершин a_j , b_j , $\chi(E_{a_j}^0) = 1$, $\chi(E_{b_j}^0) = -1$. Таким образом, получаем

$$\zeta_f(t) = \frac{\prod_{j=1}^g (1 - t^{\gamma_j})}{\prod_{j=0}^g (1 - t^{\bar{\beta}_j})}.$$

Полугруппа S кривой C — это множество целых чисел $i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, для которых существует росток $\varphi \in \mathcal{O}_C$ с $v(\varphi) = i$. Известно (см. [3, 4]), что:

- (1) $c_i = \dim_{\mathbb{C}}(F_i/F_{i+1})$ отлично от нуля тогда и только тогда, когда i — элемент полугруппы S кривой C ; в этом случае $c_i = 1$;
- (2) множество $\{\beta_j : j = 0, 1, \dots, g\}$ является минимальным семейством образующих полугруппы S ;
- (3) целое число γ_j кратно $\bar{\beta}_j$ ($j = 1, \dots, g$), т.е. $\gamma_j = m_j \bar{\beta}_j$ (в действительности m_j — члены пар Пюизо кривой C);
- (4) любой элемент i полугруппы S единственным образом представим в виде $i = k_0 \bar{\beta}_0 + \sum_{j=1}^g k_j \bar{\beta}_j$ с $k_0 \geq 0$, $0 \leq k_j < m_j$ при $1 \leq j \leq g$.

Поэтому имеем

$$\begin{aligned} L(t) &= \sum_{i=0}^{\infty} c_i t^i = \sum_{i \in S} t^i = \left(\sum_{k_0=0}^{\infty} t^{k_0 \bar{\beta}_0} \right) \cdot \prod_{j=1}^g \left(\sum_{k_j=0}^{m_j-1} t^{k_j \bar{\beta}_j} \right) \\ &= \frac{1}{1-t^{\bar{\beta}_0}} \cdot \prod_{j=1}^g \frac{1-t^{m_j \bar{\beta}_j}}{1-t^{\bar{\beta}_j}} = \frac{\prod_{j=1}^g (1-t^{\gamma_j})}{\prod_{j=0}^g (1-t^{\bar{\beta}_j})} = \zeta_f(t), \end{aligned}$$

что и требовалось доказать. $\square$

Примечание при корректуре. Авторами получен аналог утверждения теоремы для плоской алгебраической кривой с одной ветвью на бесконечности.

ЛИТЕРАТУРА

1. *A'Campo N.* Comment. Math. Helv., **50**, 233–248 (1975).
2. *Арнольд В. И., Варченко А. Н., Гусейн-Заде С. М.* Особенности дифференцируемых отображений. Т. II. Наука, М., 1984.
3. *Campillo A.* Algebroid curves in positive characteristic. Lecture Notes in Math., vol. 813, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1980.
4. *Teissier B.* В кн.: *Zariski O.* Le problème des modules pour les branches planes. Hermann, Paris, 1986, Appendice.

Московский государственный университет
e-mail: sabir@mccme.ru

University of Valladolid (Spain)
e-mail: campillo@cpd.uva.es,
fdelgado@cpd.uva.es

Поступило в редакцию
3 марта 1998 г.

УДК 517.55

О размерности группы, транзитивно действующей на гиперповерхности в $\mathbb{C}^3$ *

© 1999. А. В. ЛОБОДА

В работе [1] Э. Картан описал все вещественные гиперповерхности двумерных комплексных пространств, на которых транзитивно действуют группы Ли голоморфных преобразований. Ниже обсуждаются размерности аналогичных групп Ли в пространствах трех комплексных измерений.

Для однородной гиперповерхности M , обладающей такой группой $\text{Aut}(M)$, размерность $\dim \text{Aut}(M)$ складывается из $\dim M = 5$ и размерности группы $\text{Aut}_{\xi}(M)$ голоморфных автоморфизмов гиперповерхности M с неподвижной точкой $\xi \in M$. Все рассуждения ниже связаны с последней группой. При этом используется техника многомерного комплексного анализа и, в первую очередь, аппарат локальных нормальных форм. В связи с этим будем считать, что все поверхности вложены в пространство $\mathbb{C}^3$, а элементы

* Настоящая работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 96-01-01002).