Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Лобода, О размерности группы, транзитивно действующей на гиперповерхности в $\mathbb{C}^3$, *Функци. анализ и его прил.*, 1999, том 33, выпуск 1, 68–71

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa341>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.205.19.152

26 апреля 2023 г., 17:03:54

Поэтому имеем

$$\begin{aligned} L(t) &= \sum_{i=0}^{\infty} c_i t^i = \sum_{i \in S} t^i = \left(\sum_{k_0=0}^{\infty} t^{k_0 \bar{\beta}_0} \right) \cdot \prod_{j=1}^g \left(\sum_{k_j=0}^{m_j-1} t^{k_j \bar{\beta}_j} \right) \\ &= \frac{1}{1-t^{\bar{\beta}_0}} \cdot \prod_{j=1}^g \frac{1-t^{m_j \bar{\beta}_j}}{1-t^{\bar{\beta}_j}} = \frac{\prod_{j=1}^g (1-t^{\gamma_j})}{\prod_{j=0}^g (1-t^{\bar{\beta}_j})} = \zeta_f(t), \end{aligned}$$

что и требовалось доказать. $\square$

Примечание при корректуре. Авторами получен аналог утверждения теоремы для плоской алгебраической кривой с одной ветвью на бесконечности.

ЛИТЕРАТУРА

1. *A'Campo N.* Comment. Math. Helv., **50**, 233–248 (1975).
2. *Арнольд В. И., Варченко А. Н., Гусейн-Заде С. М.* Особенности дифференцируемых отображений. Т. II. Наука, М., 1984.
3. *Campillo A.* Algebroid curves in positive characteristic. Lecture Notes in Math., vol. 813, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1980.
4. *Teissier B.* В кн.: *Zariski O.* Le problème des modules pour les branches planes. Hermann, Paris, 1986, Appendice.

Московский государственный университет
e-mail: sabir@mccme.ru

University of Valladolid (Spain)
e-mail: campillo@cpd.uva.es,
fdelgado@cpd.uva.es

Поступило в редакцию
3 марта 1998 г.

УДК 517.55

О размерности группы, транзитивно действующей на гиперповерхности в $\mathbb{C}^3$ *

© 1999. А. В. ЛОБОДА

В работе [1] Э. Картан описал все вещественные гиперповерхности двумерных комплексных пространств, на которых транзитивно действуют группы Ли голоморфных преобразований. Ниже обсуждаются размерности аналогичных групп Ли в пространствах трех комплексных измерений.

Для однородной гиперповерхности M , обладающей такой группой $\text{Aut}(M)$, размерность $\dim \text{Aut}(M)$ складывается из $\dim M = 5$ и размерности группы $\text{Aut}_{\xi}(M)$ голоморфных автоморфизмов гиперповерхности M с неподвижной точкой $\xi \in M$. Все рассуждения ниже связаны с последней группой. При этом используется техника многомерного комплексного анализа и, в первую очередь, аппарат локальных нормальных форм. В связи с этим будем считать, что все поверхности вложены в пространство $\mathbb{C}^3$, а элементы

* Настоящая работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 96-01-01002).

групп $\text{Aut}_\xi(M)$ являются голоморфными отображениями, заданными лишь локально, вблизи точки $\xi = 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Можно считать далее, что и группа $\text{Aut}(M)$ является лишь локальной группой Ли и состоит из преобразований пространства $\mathbb{C}^3$, заданных вблизи начала координат. Ее транзитивность естественно обсуждать также лишь вблизи выделенной точки.

Пусть M — вещественно-аналитическая гиперповерхность пространства $\mathbb{C}^3$, содержащая начало координат и невырожденная по Леви в этой точке. Обозначая координаты в $\mathbb{C}^3$ через z_1, z_2, w , сгруппируем две первые из них в $z = (z_1, z_2)$ и положим $u = \text{Re } w, v = \text{Im } w$.

Уравнение гиперповерхности M запишем в нормальной форме Мозера [2]:

$$v = (|z_1|^2 + \varepsilon |z_2|^2) + \sum_{s \geq 4} F_s(z, \bar{z}, u). \quad (1)$$

Здесь $(|z_1|^2 + \varepsilon |z_2|^2)$ — форма Леви поверхности, в которой $\varepsilon = \pm 1$,

$$F_s(z, \bar{z}, u) = \sum_{k+l+2m=s, \min(k,l) \geq 2} F_{(k,\bar{l},m)}(z, \bar{z}) u^m,$$

а $F_{(k,\bar{l},m)}(z, \bar{z})$ — однородный многочлен бистепени $(k, \bar{l})$ по z и $\bar{z}$.

При этом некоторые из многочленов F_s , в частности, важный для нас многочлен $F_4 = F_{(2,\bar{2},0)}(z, \bar{z})$, удовлетворяют так называемым trace-условиям. Не поясняя этих условий подробно, укажем лишь, что они позволяют записать F_4 в виде

$$\begin{aligned} F_{(2,\bar{2},0)} = & \alpha(|z_1|^4 - 4\varepsilon |z_1|^2 |z_2|^2 + |z_2|^2) + 2(\beta_1 + i\beta_2)(z_1^2 \bar{z}_1 \bar{z}_2 - \varepsilon z_1 z_2 \bar{z}_2^2) \\ & + 2(\beta_1 - i\beta_2)(z_1 z_2 \bar{z}_1^2 - \varepsilon z_2^2 \bar{z}_1 \bar{z}_2) + (\gamma_1 + i\gamma_2) z_1^2 \bar{z}_2^2 + (\gamma_1 - i\gamma_2) z_2^2 \bar{z}_1^2, \end{aligned}$$

где $\alpha, \beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{R}$.

Как известно, обе квадрики $v = \langle z, z \rangle = |z_1|^2 + \varepsilon |z_2|^2$ имеют транзитивные группы $\text{Aut}(M)$ одинаковой размерности, равной 15. Для гиперповерхностей, локально голоморфно эквивалентных какой-либо из этих квадрик, или сферических, справедливы такие же равенства. Все другие гиперповерхности называются несферическими.

ТЕОРЕМА 1. Если вещественно-аналитическая гиперповерхность $M \subset \mathbb{C}^3$ невырожденна по Леви, несферична и имеет транзитивную группу $\text{Aut}(M)$ голоморфных преобразований, то размерность этой группы удовлетворяет неравенствам $5 \leq \dim \text{Aut}(M) \leq 8$.

ТЕОРЕМА 2. Равенство $\dim \text{Aut}(M) = 8$ выполняется лишь для однородной поверхности

$$v = (z_1 \bar{z}_2 + z_2 \bar{z}_1) + |z_1|^4 \quad (2)$$

и ее голоморфных образов. Для других несферических однородных гиперповерхностей в $\mathbb{C}^3$ выполняется неравенство $\dim \text{Aut}(M) \leq 7$.

СЛЕДСТВИЕ. Для строго псевдовыпуклой ($\varepsilon=1$) несферической однородной гиперповерхности M в $\mathbb{C}^3$ выполняются неравенства $5 \leq \dim \text{Aut}(M) \leq 7$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Поверхность (2) разделяет пространство $\mathbb{C}^3$ на две однородные области. Восьмимерная группа $\text{Aut}(M)$ этой поверхности транзитивно действует как на ней самой, так и на каждой из этих областей и является, как показано в [6], разрешимой.

Для доказательства теорем 1 и 2 учтем, что в уравнении (1) несферической однородной поверхности обязательно отличен от нуля многочлен F_4 и, возможно, некоторые другие F_s .

Согласно [3–5], каждый элемент группы $\text{Aut}_0(M)$ имеет вид

$$z^* = Cz, \quad w^* = \rho w, \quad (3)$$

где $C \in GL(2, \mathbb{C})$, $\rho \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. При этом каждое из слагаемых F_s , как и форма $\langle z, z \rangle$, сохраняется линейным преобразованием C с точностью до множителя ρ .

Пятимерная группа Ли G матриц C , сохраняющих с точностью до множителя ρ эрмитову форму $\langle z, z \rangle = |z_1|^2 + \varepsilon |z_2|^2$, и соответствующая ей алгебра Ли состоят из элементов

$$C = \lambda e^{i\theta} \begin{pmatrix} \xi & \zeta \\ -\varepsilon \bar{\zeta} & \bar{\xi} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} A + i(B + D) & E + iK \\ \varepsilon(E - iK) & A + i(B - D) \end{pmatrix},$$

где $\lambda, \theta, A, B, D, E, K \in \mathbb{R}$, $\xi, \zeta \in \mathbb{C}$ и при этом $|\xi|^2 + \varepsilon |\zeta|^2 = 1$.

Подмножество $G_1 \subset G$ матриц, сохраняющих еще и многочлен $F_{(2,2)}$, является подгруппой Ли в G . Для каждой такой матрицы $C = \|C_{pq}\|$ и любых $m, n, r, s \in \{1, 2\}$ справедливы равенства

$$\sum_{k,l,p,q} F_{kl\bar{p}\bar{q}} C_{km} C_{ln} \overline{C_{pr} C_{qs}} = \rho F_{mn\bar{r}\bar{s}}. \quad (4)$$

Для перехода к алгебре Ли g_1 этой группы необходимо продифференцировать равенства (4). Коэффициентам $F_{11\bar{1}\bar{1}}, F_{11\bar{1}\bar{2}}, F_{11\bar{2}\bar{2}}$ соответствует при этом однородная система пяти линейных уравнений относительно A, B, D, E, K с матрицей

$$\Omega = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 & -2\varepsilon\beta_1 & 2\varepsilon\beta_2 \\ 2\beta_1 & 0 & -2\beta_2 & 3\alpha - \varepsilon\gamma_1 & \varepsilon\gamma_2 \\ 2\beta_2 & 0 & 2\beta_1 & -\varepsilon\gamma_2 & -3\alpha - \varepsilon\gamma_1 \\ \gamma_1 & 0 & -2\gamma_2 & 2\beta_1 & 2\beta_2 \\ \gamma_2 & 0 & 2\gamma_1 & 2\beta_2 & -2\beta_1 \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Интересующая нас размерность группы Ли G_1 или алгебры Ли g_1 , очевидно, дополняет до 5 ранг $r(\Omega)$ матрицы (5).

ЛЕММА. Ранг $r(\Omega)$ матрицы (5) удовлетворяет при $(\alpha, \beta, \gamma) \neq 0$ неравенствам $2 \leq r(\Omega) \leq 4$. Если при этом $r(\Omega) = 2$, то $\varepsilon = -1$, а $\beta = \alpha e^{i\theta}$, $\gamma = \alpha e^{2i\theta}$ для некоторого $\theta \in \mathbb{R}$.

Уравнение $v = \langle z, z \rangle + F_{2\bar{2}}(z, \bar{z})$, в котором коэффициенты удовлетворяют условиям леммы, легко преобразуется к виду $v = (|z_1|^2 - |z_2|^2) + |z_1 + z_2|^4$ или к (2). Группа $\text{Aut}_0(M)$ последней поверхности трехмерна и состоит из преобразований вида (3) с матрицами $C = e^{i\theta} \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ i\mu & \lambda^3 \end{pmatrix}$, где $\lambda, \mu, \theta \in \mathbb{R}$.

Если в уравнении (1) имеются другие ненулевые слагаемые помимо F_4 , то требование сохранения их линейным преобразованием (3) уменьшает, как легко понять, размерность соответствующей группы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Cartan E. Ann. Math. Pura Appl. (4), **11**, 17–90 (1931). 2. Chern S. S., Moser J. K. Acta Math., **133**, No. 3, 219–271 (1974). 3. Burns D., Shneider S., Wells R. O. Invent. Math., **46**, No. 3, 237–253 (1978). 4. Webster S. M. Math. Ann., **233**, 97–102 (1978). 5. Ежов В. В. УМН, **41**, вып. 3, 181–182 (1986). 6. Winkelmann J. The classification of 3-dimensional homogeneous complex manifolds. Lect. Notes in Math., vol. 1602, Springer-Verlag, 1995.

Воронежская государственная
архитектурно-строительная академия

Поступило в редакцию
26 марта 1997 г.

УДК 517.95

Многоэлектронный оператор Шрёдингера и колебательно-вращательный потенциал многоатомных молекул

© 1999. А. А. Локшин

Заметка посвящена выяснению условий, обеспечивающих в основном электронном состоянии (в приближении Борна–Оппенгеймера) неположительность локальных минимумов колебательно-вращательного потенциала многоатомных молекул.

1. Рассмотрим сначала записанное в атомных единицах стационарное уравнение Шрёдингера, описывающее движение системы из N электронов в поле K неподвижных ядер, расположенных в точках с координатами $R_\alpha \in \mathbb{R}^3$ ($\alpha = 1, \dots, K$),

$$H(R_1, \dots, R_K)\varphi \equiv \left[-\frac{1}{2}\Delta_x - \sum_{i=1}^N \sum_{\alpha=1}^K \frac{Z_\alpha}{|x_i - R_\alpha|} + \sum_{i < j}^N \frac{1}{|x_i - x_j|} \right] \varphi = E\varphi. \quad (1)$$

Здесь электронные координаты $x_1, \dots, x_N \in \mathbb{R}^3$ образуют прямоугольную систему координат в $\mathbb{R}^{3N}$, Δ_x — оператор Лапласа по всем $3N$ пространственным электронным координатам, $\varphi = \varphi(x_1, \dots, x_N; R_1, \dots, R_K)$, а $Z_1, \dots, Z_K$ — заряды ядер. Мы считаем, что оператор $H(R_1, \dots, R_K)$ действует в гильбертовом пространстве $L_2(\mathbb{R}_x^{3N})$ и что его область определения — это

$$D(H(R_1, \dots, R_K)) = W_2^2(L_2(\mathbb{R}_x^{3N})), \quad (2)$$

где $W_2^2(\mathbb{R}_x^{3N})$ — пространство Соболева функций, квадратично интегрируемых вместе со своими обобщенными производными до второго порядка включительно. Как известно [1], определенный таким образом оператор $H(R_1, \dots, R_K)$ самосопряжен и полуограничен снизу.