Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. М. Маламуд, О теоремах типа Борга для систем первого порядка на конечном интервале, *Функци. анализ и его прил.*, 1999, том 33, выпуск 1, 75–80

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa343>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.209.158.208

26 апреля 2023 г., 08:36:11

УДК 517.9

О теоремах типа Борга для систем первого порядка на конечном интервале*

© 1999. М. М. МАЛАМУД

1. Введение. Рассмотрим систему линейных обыкновенных дифференциальных уравнений

$$Ly := -iBy' + Q(x)y = \lambda y, \quad y = \text{col}(y_1, \dots, y_n), \quad (1)$$

с невырожденной диагональной $n \times n$ -матрицей $B = \text{diag}(\lambda_1 I_{n_1}, \dots, \lambda_r I_{n_r})$ ($n = n_1 + \dots + n_r$) и ограниченной на $[0, 1]$ потенциальной $n \times n$ -матрицей $Q(x)$. Здесь $\text{col}(y_1, \dots, y_n)$ означает соответствующий вектор-столбец.

Предположим, кроме того, что Q имеет в блочном (относительно разложения $\mathbb{C}^n = \mathbb{C}^{n_1} \oplus \dots \oplus \mathbb{C}^{n_r}$) представлении нулевую диагональ:

$$Q(x) = (Q_{ij}(x))_{i,j=1}^r \in L_\infty[0, 1] \otimes \mathbb{C}^{n \times n}, \quad Q_{ii}(x) = 0, \quad i \in \{1, \dots, r\}. \quad (2)$$

При $r = 2$ и $\lambda_1 = -\lambda_2 = 1$ система (1) с условием (2) эквивалентна системе Дирака.

В настоящей заметке получены различные теоремы об однозначном определении уравнения (1) по (минимально возможной) системе спектров, обобщающие известные результаты об однозначном определении уравнения Штурма–Лиувилля как по двум спектрам (теорема Борга [1]; см. также [2, 3]), так и по одному спектру и известной «половине» потенциала (теорема Хохштадта–Либермана [4]). Эти результаты выводятся из теорем об однозначном определении системы (1) по части ее матрицы монодромии. Последние же доказываются единым методом, впервые примененным в [5] (и, далее, в [6, 7]) для доказательства однозначного определения уравнения n -го порядка по n спектрам. А именно, упомянутые теоремы единственности выводятся из теорем о единственности решения некоторых задач типа Гурса для системы уравнений (8) (см. ниже), одним из решений которой являются компоненты $n \times n$ -матричного ядра оператора преобразования. Ключ к реализации этой схемы дают операторы преобразования, существование которых является следствием разрешимости задачи (8)–(10) для гиперболической (при $B = B^*$) и негиперболической (при $B \neq B^*$) системы (8).

2. Операторы преобразования в случае $B = B^*$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $B = B^* = \text{diag}(\lambda_1 I_{n_1}, \dots, \lambda_r I_{n_r})$ — невырожденная диагональная $n \times n$ -матрица, $n_1 = \min\{n_j : 1 \leq j \leq r\}$ и $Q(x)$ удовлетворяет условию (2). Пусть, далее, $Y(x, \lambda) = \text{col}(Y_1(x, \lambda), \dots, Y_r(x, \lambda))$ есть $n \times n_1$ -матричное решение задачи Коши

$$LY = -iBY'(x, \lambda) + Q(x)Y(x, \lambda) = \lambda Y(x, \lambda), \quad (3)$$

$$Y_j(0, \lambda) = A_j \quad (\text{rank } A_j = n_1, \quad 1 \leq j \leq r), \quad (4)$$

* Работа поддержана грантом INTAS 93-0249-EXT.

состоящее из $n_j \times n_1$ -блоков $Y_j(x, \lambda)$ ($1 \leq j \leq r$). Тогда $Y(x, \lambda)$ допускает представление

$$Y(x, \lambda) = e(x, \lambda) + \int_0^x K(x, t) e(t, \lambda) dt, \quad e(x, \lambda) = \text{col}(A_1 e^{i\mu_1 \lambda x}, \dots, A_r e^{i\mu_r \lambda x}), \quad (5)$$

в котором $K(x, t) \in L_\infty(\Omega) \otimes \mathbb{C}^{n \times n}$, $\Omega = \{0 \leq t \leq x \leq 1\}$ и $\mu_j = \lambda_j^{-1}$ ($1 \leq j \leq r$).

При $r = 2$ и $\lambda_1 = -\lambda_2 = 1$ представление (5) для решений системы Дирака хорошо известно [2, 3].

3. Об определении системы обыкновенных дифференциальных уравнений по части матрицы монодромии. Всюду в этом и следующем пунктах $B = \text{diag}(\lambda_1 I_{n_1}, \dots, \lambda_r I_{n_r})$ — диагональная $n \times n$ -матрица, имеющая нулевую сигнатуру: $\sigma(B) := \sum n_j \text{sign } \lambda_j = 0$.

Пусть $W_T(x, \lambda)$ — фундаментальное $n \times n$ -матричное решение системы (1), выделяемое условием $W(0, \lambda) = T$, где $\det T \neq 0$. Матрицу-функцию $W_T(\lambda) := W_T(1, \lambda)$ будем называть T -матрицей монодромии системы (1) на отрезке $[0, 1]$. В следующей теореме указывается минимальное число столбцов T -матрицы монодромии $W_T(\lambda)$ (при специальной T), достаточное для однозначного определения системы (1).

Для этого рассмотрим наряду с (1) другую систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$-iB\tilde{y}'(x, \lambda) + \tilde{Q}(x)\tilde{y}(x, \lambda) = \lambda\tilde{y}(x, \lambda) \quad (6)$$

с потенциальной матрицей $\tilde{Q}$, удовлетворяющей условиям (2).

ТЕОРЕМА 2. Пусть $n = 2m$ и $Y(x, \lambda)$ и $\tilde{Y}(x, \lambda)$ суть $2m \times m$ -матричные решения систем (1) и (6), удовлетворяющие условиям (4). Если $\sigma(B) = 0$ и $Y(1, \lambda) = C\tilde{Y}(1, \lambda)$, где $C \in \mathbb{C}^{n \times n}$, то

1) $C = I_n$;

2) $Q(x) = \tilde{Q}(x)$ для п. в. $x \in [0, 1]$.

НАБРОСОК ДОКАЗАТЕЛЬСТВА. Ограничимся для простоты случаем $r = 2$. Тогда $m = n_1$ и из формулы (5) и аналогичной формулы для $\tilde{Y}(x, \lambda)$ вытекает равенство

$$\tilde{Y}(x, \lambda) = (I + P)Y(x, \lambda) = Y(x, \lambda) + \int_0^x P(x, t)Y(t, \lambda) dt, \quad (7)$$

в котором $I + P = (I + \tilde{K})(I + K)^{-1}$. При этом $n \times n$ -матричное ядро $P(x, t) = (P_{ij}(x, t))_{i,j=1}^r$ является (в случае C^1 -гладких Q и $\tilde{Q}$) решением граничной задачи

$$BD_x P(x, t) + D_t P(x, t)B = -i(Q(x)P(x, t) - P(x, t)\tilde{Q}(t)), \quad (8)$$

$$BP(x, x) - P(x, x)B = i(\tilde{Q}(x) - Q(x)), \quad x \in [0, 1], \quad (9)$$

$$\lambda_1 P_{i1}(x, 0)A_1 + \dots + \lambda_r P_{ir}(x, 0)A_r = 0 \quad (1 \leq j \leq r). \quad (10)$$

Пусть для простоты $C = I_n$. На первом шаге устанавливается с учетом формул (5), (7) и условия $\sigma(B) = 0$ эквивалентность равенства $\tilde{Y}(1, \lambda) =$

$Y(1, \lambda)$ равенству

$$P(1, t) = 0 \quad (\iff P_{ij}(1, t) = 0, \quad i, j \in \{1, \dots, r\}), \quad t \in [0, 1]. \quad (11)$$

Таким образом, ядро $P(x, t)$ является решением в $\Omega = \{0 \leq t \leq x \leq 1\}$ задачи (8)–(11).

На втором шаге, отбросив условие (9), показываем, что задача Гурса (8), (10), (11) для гиперболической ($B = B^*$) системы (8) имеет в Ω лишь тривиальное решение $P(x, t) = 0$. Теперь равенство $Q(x) = \tilde{Q}(x)$ вытекает из условия (9).

Отметим попутно, что доказательство теоремы 1, т. е. равенства (5), сводится (в случае $Q \in C^1[0, 1] \otimes \mathbb{C}^{n \times n}$) к доказательству разрешимости задачи (8)–(10) при $\tilde{Q}(t) = 0$.

4. Аналог теоремы Борга.

ТЕОРЕМА 3. Пусть в условиях теоремы 2 $n = 2n_1$ (т. е. $r = 2$) и $Y := \text{col}(Y_1, Y_2)$, $\tilde{Y} := \text{col}(\tilde{Y}_1, \tilde{Y}_2)$. Если для любого $\lambda \in G$, где $G \subset \mathbb{C}$ — некоторая область, $\det(Y_2(1, \lambda)\tilde{Y}_2(1, \lambda) \neq 0$ и $Y_1(1, \lambda)Y_2^{-1}(1, \lambda) = \tilde{Y}_1(1, \lambda)\tilde{Y}_2^{-1}(1, \lambda)$, то $Q(x) = \tilde{Q}(x)$ для п. в. $x \in [0, 1]$.

Теорема 3 выводится из теоремы 2 при помощи формул (5), (7) и некоторых результатов об индикаторных диаграммах целых функций. Из нее, в свою очередь, выводится аналог известной теоремы Борга (см. [1–3]) об однозначном определении уравнения Штурма–Лиувилля по двум спектрам.

Для формулировки упомянутого результата присоединим к уравнению (1) граничные условия

$$y_2(0, \lambda) - Hy_1(0, \lambda) = 0, \quad U_j y_2(1, \lambda) - V_j y_1(1, \lambda) = 0 \quad (12)$$

и обозначим через $S\{Q; H, U_j, V_j\}$ спектр задачи (1), (12). Здесь $H, U_j, V_j \in \mathbb{C}^{n \times n_1}$, а y_1 и y_2 обозначают соответственно n_1 первых и n_1 последних компонент $2n_1 \times 1$ -решения $y(x, \lambda) = \text{col}(y_1, y_2)$ уравнения (1).

ТЕОРЕМА 4. Пусть $n = 2n_1$ (т. е. $\sigma(B) = 0$ и $r = 2$), $Q, \tilde{Q} \in L_\infty[0, 1] \otimes \mathbb{C}^{n \times n}$ и для систем (1) и (6) совпадают $n_1^2 + 1$ спектров:

$$S\{Q; H, U_j, V_j\} = S\{\tilde{Q}; H, U_j, V_j\}, \quad 1 \leq j \leq n_1^2 + 1.$$

Если $U_j = I_{n_1}$ для любого $j \in \{1, \dots, n_1^2\}$, $U_{n_1^2+1} = 0$, $V_{n_1^2+1} = I_{n_1}$ и матрицы V_j ($1 \leq j \leq n_1^2$) линейно независимы, то $Q(x) = \tilde{Q}(x)$ для п. в. $x \in [0, 1]$.

В частности, при $n = 2$ система (1) однозначно определяется двумя спектрами. Для системы Дирака ($\lambda_1 = -\lambda_2 = 1$) этот факт по существу эквивалентен теореме Борга.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. а) Для системы Дирака теорема 2 содержится в [6]. В [8] (см. также [6]) обсуждается связь результатов такого типа с теоремой единственности для канонических систем из более ранних работ М. С. Бродского, М. Г. Крейна, М. С. Лившица, В. П. Потапова, Л. А. Сахновича и Л. Де Бранжа на эту тему.

б) Известно, что система (1) с условием (2) всегда однозначно определяется матрицей монодромии. В [9] этот результат доказан методом Борга

для случая систем с матрицей B , имеющей простой спектр. Общий случай может быть доказан тем же методом (см. [7]). Теорема 2, существенно дополняя упомянутый результат, является, вообще говоря, точной при $n = 2n_1$. А именно, при $n = 2n_1$ $Q(x)$ не определяется, вообще говоря, меньшим, чем n_1 , числом столбцов T -матрицы монодромии. Поэтому также минимальным, вообще говоря, является число $p = n_1^2 + 1$ спектров в теореме 4 — аналоге теоремы Борга. Для прямой суммы n_1 экземпляров 2×2 -операторов Дирака этот факт вытекает из аналогичного (и хорошо известного при $n_1 = 1$) утверждения для 2×2 -систем Дирака.

5. Задачи с частичной информацией о потенциале. Приведем лишь один результат, ограничиваясь случаем $r = 2$.

ТЕОРЕМА 5. Пусть $B = \text{diag}(\lambda_1 I_{n_1}, \lambda_2 I_{n_2})$, где $\lambda_1 \lambda_2 < 0$, а $Q, \tilde{Q}$ принадлежат $L_\infty(\Omega) \otimes \mathbb{C}^{n \times n}$ и удовлетворяют условию (2). Пусть, далее, $Y = \text{col}(Y_1, Y_2)$ и $\tilde{Y} = \text{col}(\tilde{Y}_1, \tilde{Y}_2)$ суть $n \times n_1$ -матричные решения задач Коши (3), (4) и (6), (4) (при $r = 2$) соответственно. Если

1) $Y_1(1, \lambda) - HY_2(1, \lambda) = \tilde{Y}_1(1, \lambda) - H\tilde{Y}_2(1, \lambda)$ для любого $\lambda \in \mathbb{R}$ ($H \in \mathbb{C}^{n_1 \times n_2}$, $\text{rank } H = n_1$),

2) $Q(x) = \tilde{Q}(x)$ для п. в. $x \in [x_0, 1]$, где $x_0 = \min\{|\lambda_i|(|\lambda_1| + |\lambda_2|)^{-1} : i = 1, 2\}$,

то $Q(x) = \tilde{Q}(x)$ для п. в. $x \in [0, 1]$.

Теорема 5 доказывается тем же методом, что и теорема 2. Теперь, однако, вместо условия (11) приходим к условиям

$$P_{12}(x, x) = P_{21}(x, x) = 0, \quad x \in [x_0, 1], \quad P_{1i}(1, t) - HP_{2i}(1, t) = 0 \quad (i = 1, 2). \quad (13)$$

Далее, показывается, что задача Гурса (8), (10), (13) имеет в Ω единственное решение $P(x, t) = 0$. И снова ссылка на равенство (9) завершает доказательство.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. а) При $n_1 = n_2 = 1$ условие 1) теоремы 5 эквивалентно условию $S\{Q; h, H\} = S\{\tilde{Q}; h, H\}$. В частности, 2×2 -система Дирака ($\lambda_1 = -\lambda_2 = 1$) однозначно определяется одним спектром при условии, что $Q(x) = \tilde{Q}(x)$ для любого $x \in [1/2, 1]$. Последний факт аналогичен результату из [4] об однозначном определении уравнения Штурма–Лиувилля по одному спектру и «половине» потенциала. Отметим, что тем же методом сведения к задаче Гурса доказываются как результат из [4], так и его обобщение на матричные операторы Штурма–Лиувилля.

б) В последнее время Ф. Гесзтези и Б. Саймон [10–12] нашли интересный подход к обратным задачам (для уравнения Штурма–Лиувилля) с частичной информацией о потенциале. В рамках этого подхода они получили как новое доказательство результата из [4], так и новые теоремы единственности. Однако их методы, по-видимому, не распространяются на векторный случай.

6. Операторы преобразования и теоремы единственности в случае $B \neq B^*$.

ТЕОРЕМА 6. Пусть $B = \text{diag}(\lambda_1 I_{n_1}, \dots, \lambda_r I_{n_r})$, $\lambda_j \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $n_1 = \min\{n_j : 1 \leq j \leq r\}$ и

$$\Lambda = \max\{|\lambda_j(\lambda_j - \lambda_i)^{-1}|, |\lambda_i^{-1}(\lambda_j - \lambda_i)^{-1}| : 1 \leq i \neq j \leq r\}.$$

Если потенциальная $n \times n$ -матрица-функция $Q(x)$ удовлетворяет условию (2) и допускает аналитическое продолжение в круг $\mathbb{D}_{R_0} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < R_0\}$ при $R_0 > \Lambda$, то для уравнения (1) существует оператор преобразования, т. е. $n \times n_1$ -матричное решение $Y(x, \lambda)$ задачи Коши (3), (4) представляется в виде (5). При этом ядро $K(x, t)$ допускает аналитическое по x и t продолжение в бикруг $\mathbb{D}_1 \times \mathbb{D}_1$.

ТЕОРЕМА 7. Пусть в дополнение к условиям теоремы 6 $\arg \lambda_i \neq \arg \lambda_j$ при $1 \leq i \neq j \leq r$, $n_1 = \dots = n_r$ и потенциальные матрицы-функции Q и $\tilde{Q}$ удовлетворяют условию (2) и допускают аналитические продолжения в круг $\mathbb{D}_{R_0}$ при $R_0 > \Lambda$. Пусть, далее, $Y(x, \lambda)$ и $\tilde{Y}(x, \lambda)$ суть $n \times n_1$ -матричные решения задач Коши (3), (4) и (6), (4) соответственно и $C \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Тогда верна импликация

$$\tilde{Y}(1, \lambda) = CY(1, \lambda), \quad \lambda \in \mathbb{R} \implies \tilde{Q}(x) = Q(x), \quad x \in [0, 1], \quad C = I_n.$$

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть в условиях теоремы 7 спектр матрицы B простой, т. е. $r = n$, и $T = (t_{ij}) \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Тогда $Q(x)$ однозначно определяется j -м столбцом T -матрицы монодромии, если только $t_{1j} \cdots t_{nj} \neq 0$.

Из следствия 1 вытекает теорема об однозначном определении системы (1) по n спектрам. Для ее формулировки присоединим к (1) граничные условия

$$U_i y = \sum_{1 \leq j \leq n} h_{ij} y_j(0, \lambda) = 0, \quad V_k y = \sum_{1 \leq j \leq n} H_{kj} y_j(1, \lambda) = 0, \quad H_{k1} = 1 \quad (14)$$

и обозначим через $S\{Q; \{U_i\}_1^{n-1}, V_k\}$ спектр задачи (1), (14), считая формы $\{U_i\}_1^{n-1}$ линейно независимыми. Пусть, далее, Δ_j — минор $(n-1) \times n$ -матрицы $\|h_{i1} \dots h_{in}\|_{i=1}^{n-1}$, полученный вычеркиванием ее j -го столбца.

ТЕОРЕМА 8. Пусть $B = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ — невырожденная диагональная матрица с простым спектром, $\arg \lambda_i \neq \arg \lambda_j$ при $i \neq j$, а потенциальные матрицы Q и $\tilde{Q}$ удовлетворяют условиям теоремы 6. Пусть, кроме того, для уравнений (1) и (6) совпадают n спектров:

$$S\{Q; \{U_i\}_1^{n-1}, V_k\} = S\{\tilde{Q}; \{U_i\}_1^{n-1}, \tilde{V}_k\}, \quad k \in \{1, \dots, n\},$$

и $\Delta_j = \tilde{\Delta}_j \neq 0$ для любого $j \in \{1, \dots, n\}$. Если формы $\{V_k\}_1^n$ и $\{\tilde{V}_k\}_1^n$ линейно независимы и $H_{kj} \tilde{H}_{kj} \neq 0$ для любых $k, j \in \{1, \dots, n\}$, то

- а) $Q(x) = \tilde{Q}(x)$ для любого $x \in [0, 1]$;
- б) $H_{kj} = \tilde{H}_{kj}$ для любых $k, j \in \{1, \dots, n\}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Можно показать, что уравнение n -го порядка $y^{(n)} + q_2(x)y^{(n-2)} + \dots + q_n(x)y = \lambda^n y$ с аналитическими коэффициентами эквивалентно системе (1) со специальной матрицей $B = \text{diag}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$, где $\varepsilon_j = \exp(2\pi i j/n)$. В этом случае из теоремы 8 вытекает известный (см. [5, 13]) результат об однозначном определении уравнения n -го порядка по n спектрам.

ЛИТЕРАТУРА

1. Borg G. Acta Math., **78**, No. 1–2, 1–96 (1946).
2. Левитан Б. М., Сорг-сян И. С. Операторы Штурма–Лиувилля и Дирака. Наука, М., 1988.
3. Мар-

ченко В. А. Операторы Штурма–Лиувилля и их приложения. Наукова думка, Киев, 1977. 4. Hochstadt H., Lieberman B. SIAM J. Appl. Math., **34**, 675–680 (1978). 5. Маламуд М. М. Труды ММО, **55**, 57–122 (1994). 6. Маламуд М. М. Докл. РАН, **344**, № 5, 601–604 (1995). 7. Маламуд М. М. УМН, **51**, вып. 5, 143 (1996). 8. Гохберг И. Ц., Крейн М. Г. Теория вольтерровых операторов в гильбертовом пространстве. Наука, М., 1967. 9. Лейбензон З. Л. ДАН СССР, **145**, № 3, 519–522 (1962). 10. Gesztesy F., Simon B. Part I. Helv. Phys. Acta, **70**, 66–71 (1997); Part II (to appear). 11. Gesztesy F., Simon B. Trans Amer. Math. Soc., **348**, No. 1, 349–373 (1996). 12. Del Rio R., Gesztesy F., Simon B. Internat. Math. Res. Notices, **15**, 751–758 (1997). 13. Юрко В. А. Матем. сб., **182**, № 3, 431–456 (1991).

Донецкий государственный университет

Поступило в редакцию
21 января 1998 г.

УДК 517.957+517.988

Экспоненциальная устойчивость приближенной основной моды нелинейного волнового уравнения*

© 1999. Н. Н. НЕХОРОШЕВ

0. Введение. В заметке рассматривается первая краевая задача для нелинейного волнового уравнения

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} + \varepsilon \psi(u) = 0, \quad u(t, 0) = u(t, \pi) = 0, \quad (1)$$

где $\varepsilon \ll 1$ — малый параметр, а ψ — аналитическая функция, удовлетворяющая условию $\psi'(0) \neq 0$. Сформулировано утверждение Д. Бамбузи и автора об экспоненциально большой по сравнению с $1/\varepsilon$ оценке снизу времени устойчивости каждой кривой некоторого семейства замкнутых кривых $\gamma_{E\varepsilon}$, и даны комментарии к этому утверждению. Полное доказательство утверждения будет приведено в [2]. Лежащие в фазовом пространстве задачи (1) кривые этого однопараметрического при фиксированном ε семейства $\gamma_{E\varepsilon}$ близки к кривым γ_E основной линейной моды, т. е. к траекториям периодических решений невозмущенного уравнения (1) при $\varepsilon = 0$, которые имеют вид одной первой гармоники разложения решения в стандартный ряд Фурье и обладают энергией E , так что $\gamma_{E\varepsilon} \rightarrow \gamma_E$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ и $E \rightarrow 0$. Кривые $\gamma_{E\varepsilon}$ являются траекториями решений некоторого «упрощенного» по отношению к исходному возмущенному уравнению (1) уравнения, и поэтому все это семейство решений назовем приближенной основной модой исходного нелинейного уравнения (1). Можно сказать, что устойчивость решений уравнения (1) доказана именно вблизи траекторий этой приближенной основной моды.

Эти вопросы тесно связаны с проблемой отыскания точных периодических решений уравнения (1), причем с более общей нелинейностью $\psi(x, u)$ вместо $\varepsilon \psi(u)$. Этой проблеме посвящено большое число публикаций. Отметим важные работы Рабиновича [5], Куксина [4], а также Крэйка и Вейна [3], прове-

* Статья написана при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 97-01-00228.