Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. П. Орлов, О модели Олдройда вязкоупругой жидкости, *Функц. анализ и его прил.*, 1999, том 33, выпуск 1, 83–87

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa345>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 44.207.124.84

26 апреля 2023 г., 16:16:18

Отметим, что трудности с доказательством существования, единственности и непрерывной зависимости от параметра точных периодических решений задачи (1) связаны с невыполнением условия невырожденности Пуанкаре, состоящего в отсутствии в окрестности точки $1 \in \mathbb{C}$ мультипликаторов, т.е. точек спектра оператора монодромии, отвечающего периодическому решению $\zeta_{E\varepsilon}(t)$ упрощенного уравнения. (Монодромия рассматривается на поверхности уровня функции Гамильтона $\tilde{H}$.) По-видимому, это не просто технические трудности, и все эти патологии, т.е. несуществование, неединственность и отсутствие непрерывной зависимости, при невыполнении условия Пуанкаре могут реализовываться. В нашем случае причиной вырождения по Пуанкаре является неограниченность частот линейной задачи $(1)_{\varepsilon=0}$, в результате чего при всех значениях параметров единица оказывается предельной точкой для множества мультипликаторов, отвечающих решениям $\zeta_{E\varepsilon}(t)$. Таким образом, эти патологии — целиком эффект бесконечномерности рассматриваемой динамической системы, определяемой уравнением (1), точнее, они не типичны в конечномерном случае, и их можно назвать «размыванием» точных периодических решений линейных мод при нелинейном возмущении.

Заметка написана на основе докладов, прочитанных автором весной 1996 года на проходивших в МГУ заседаниях «Чебышёвских чтений» и конференции имени И. Г. Петровского.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Bambusi D., Giorgilli A.* J. Statist. Phys., **71**, 569–606 (1993). 2. *Bambusi D., Nekhoroshev N. N.* Phys. D, **122**, 73–104 (1998). 3. *Craig W., Wayne C. E.* Comm. Pure Appl. Math., **46**, 1409–1501 (1993). 4. *Kuksin S. B.* Lect. Notes Math., vol. 1556, Springer-Verlag, 1994. 5. *Rabinowitz P. H.* Comm. Pure Appl. Math., **31**, 31–68 (1978).

Московский государственный университет,
механико-математический факультет

Поступило в редакцию
29 декабря 1997 г.

УДК 517.98.63, 517.984.5

О модели Олдройда вязкоупругой жидкости*

© 1999. В. П. Орлов

1. Рассматривается модель вязкоупругой жидкости Олдройда [1]

$$\begin{aligned} v_t(t, x) + D(v) - \gamma_1 \Delta v(t, x) \\ - \gamma_2 \Delta \int_0^t \exp(\alpha(s-t)) v(s, x) ds + \nabla p(t, x) = f(t, x), \\ \operatorname{div} v(t, x) = 0, \quad (t, x) \in Q, \quad \int_{\Omega} p(t, x) dx = 0, \quad t \geq 0, \\ v(0, x) = v_0(x), \quad x \in \Omega, \quad v(t, x) = 0, \quad t \geq 0, \quad x \in \partial\Omega. \end{aligned} \quad (1)$$

* Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ, грант 96-01-01639, и ISF, грант RJ3300.

Здесь $\gamma_1 > 0$, $\gamma_2, \alpha \in \mathbb{R}$, $D(v) = \sum_{k=1}^n v_k \partial v / \partial x_k$, $Q = [0, \infty) \times \Omega$, Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, с границей $\partial\Omega$ класса C^2 . В [1] установлена разрешимость задачи (1) в $L_2(\Omega)$ при необходимых условиях на данные, локальная (по t) при $n = 3$ и нелокальная при $n = 2$. Поведение решений на бесконечности при различных ограничениях на данные, бóльших, чем необходимые, изучалось в [2–7], причем в [7] установлена устойчивость стационарных решений относительно возмущений правых частей из некоторых гёльдеровых (по времени) пространств. Ниже мы устанавливаем разрешимость задачи (1) в классах Соболева при необходимых условиях для малых данных. Полученные оценки решений означают устойчивость нулевого решения в сильных нормах.

Введем необходимые обозначения. Обозначим через S_q замыкание в метрике пространства $L_q(\Omega)$ множества определенных на Ω финитных соленоидальных вектор-функций. Тогда оператор $\mathcal{P}$ ортогонального проектирования в $L_2(\Omega)$ на S_2 является ограниченным и в $L_q(\Omega)$ при $1 < q < \infty$ (см. [8]). Рассмотрим в S_q оператор $\tilde{\Delta} = -\mathcal{P}\Delta$, заданный на области определения $D(\tilde{\Delta}) = W_q^2(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}_q^1(\Omega) \cap S_q$. Здесь и далее через $W_q^k(\Omega)$ обозначаются пространства Соболева функций, определенных на Ω , а через $W_q^{k,m}(Q)$ — пространства Соболева определенных на Q функций, имеющих производные по t до порядка k и производные по x до порядка m , суммируемые со степенью q . Нормы в $W_q^k(\Omega)$, $W_q^{k,m}(Q)$, $L_q(\Omega)$ и в $L_q(Q)$ обозначаются через $|\cdot|_k$, $\|\cdot\|_{k,m}$, $|\cdot|_0$ и $\|\cdot\|_0$ соответственно. Обозначим через $L_{q,\kappa}(Q)$ пространство функций, для которых конечна норма $\|\phi\|_{0;\kappa} = \|\exp(\kappa t)\phi(t, x)\|_0$, а через $W_{q,\kappa}^{k,m}(Q)$ пространство функций, для которых конечна норма $\|\phi\|_{k,m;\kappa} = \|\exp(\kappa t)\phi(t, x)\|_{k,m}$, и пусть $W = S_q \cap W_q^{2-2/q}(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}_q^1(\Omega)$. Пусть $0 < \sigma_1 < \sigma_2 < \dots < \sigma_n < \dots$ — спектр оператора $\tilde{\Delta}$ (см. [8]), а функции $\lambda_k(\sigma)$ и $\beta_k(\sigma)$, $k = 1, 2$, переменной σ определяются формулами

$$\lambda_k(\sigma) = -\frac{1}{2}((\gamma_1\sigma - \alpha) - (-1)^k((\gamma_1\sigma - \alpha)^2 - 4\gamma_2\sigma)^{1/2}), \quad \beta_k(\sigma) = \lambda_k(\sigma) - \alpha.$$

Сформулируем основной результат.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $q \in ((n+2)/3, +\infty)$. Пусть выполняются условия

$$\gamma_1\sigma_1 + \alpha > 0, \quad \gamma_1\alpha + \gamma_2 > 0, \quad \kappa < \kappa_0 = \min(\gamma_2/\gamma_1 + \alpha, -\operatorname{Re} \beta_2(\sigma_1)) \quad (2)$$

и $\kappa \geq 0$. Тогда найдется такое $\delta > 0$, что при всех $f \in L_{q,\kappa}(Q)$, $v_0 \in W$, таких, что $\|f\|_{0;\kappa} \leq \delta$, $|v_0|_{2-2/q} \leq \delta$, задача (1) имеет единственное решение $(v(t, x), p(t, x))$, где $v(t, x) \in W_{q,\kappa}^{1,2}(Q)$, $p(t, x) \in W_{q,\kappa}^{0,1}(Q)$, причем

$$\begin{aligned} \|v\| + \|p\|_{0,1;\kappa} &\equiv \left(\|v\|_{1,2;\kappa} + \left\| \int_0^t \exp(\alpha(s-t))v(s, x) ds \right\|_{0,2;\kappa} \right. \\ &\quad \left. + \sup_{t \geq 0} |\exp(\kappa t)v(t, x)|_{2-2/q} \right) + \|p\|_{0,1;\kappa} \\ &\leq M_1(\|f\|_{0;\kappa} + |v_0|_{2-2/q}). \end{aligned} \quad (3)$$

Доказательство теоремы 1 проводится сведением задачи (1) к некоторому

нелинейному операторному уравнению путем обращения его линейной части, которая рассматривается как абстрактная задача Коши.

2. Рассмотрим сначала в произвольном банаховом пространстве E линейную задачу Коши

$$v'(t) + \gamma_1 A v(t) + \gamma_2 A \int_0^t \exp(\alpha(s-t)) v(s) ds = f(t), \quad t \geq 0, \quad v(0) = v_0. \quad (4)$$

Пусть A сильно позитивен в E (см. [9]), а его спектр Σ равен $\Sigma_1 \cup \Sigma_2$, причем Σ_1 состоит из собственных значений $0 < \sigma_1 < \sigma_2 < \dots < \sigma_N$, которым соответствуют конечномерные подпространства, а Σ_2 лежит в пересечении полуплоскости $\operatorname{Re} \lambda > \tilde{\sigma}_N$ и сектора $|\operatorname{Arg} \lambda| \leq \psi_0$, где $\tilde{\sigma}_N > \sigma_N$, а $\psi_0 \in (0, \pi/2)$. Изучим разрешимость задачи (4) в банаховом пространстве $L_{q,\kappa}(0, +\infty; E)$ функций, для которых конечна норма $\|\phi\|_{L_{q,\kappa}} = \|\phi(t) \exp(\kappa t)\|_{L_{q,0,\infty}(0, +\infty; E)}$. Нам понадобится

УСЛОВИЕ 1. Интегральный оператор $R_\mu(f) = A \int_0^t T_0(\mu(t-s)) f(s) ds$ ограничен в $L_{q_0}(0, +\infty; E)$ при некотором $1 < q_0 < +\infty$, и $\mu = 1$.

Здесь $T_0(t) = \exp(-tA)$ — аналитическая полугруппа, порожденная оператором A (см. [9]). Условие 1 эквивалентно коэрцитивной разрешимости задачи

$$v'(t) + A v(t) = f(t), \quad v(0) = 0 \quad (Z)$$

(см. [10]).

Определим $E_{1-1/q}$ как совокупность элементов из E , для которых конечна норма $]v[_{1-1/q} = (\int_0^{+\infty} \|T_0(t)v\|^q dt)^{1/q}$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\tilde{\sigma}_N$ достаточно велико. Пусть выполняются условия 1 и неравенства (2). Тогда для любых $f \in L_{q,\kappa}(0, +\infty; E)$ и $v_0 \in E_{1-1/q}$ задача (4) однозначно разрешима и справедливо неравенство

$$\begin{aligned} \|v'(t)\|_{L_{q,\kappa}} + \left\| \int_0^t \exp(\alpha(s-t)) v(s, x) ds \right\|_{L_{q,\kappa}} \\ + \sup_{t \geq 0} [\exp(\kappa t) v(t)]_{1-1/q} + \|A v\|_{L_{q,\kappa}} \leq M_2 (\|f\|_{L_{q,\kappa}} +]v_0[_{1-1/q}). \end{aligned} \quad (5)$$

Для доказательства задача (4) разбивается на задачи $\mathcal{L}_i$, $i = 1, 2$,

$$v'_i(t) + \gamma_1 A_i v_i(t) + \gamma_2 A_i \int_0^t \exp(\alpha(s-t)) v_i(s) ds = f_i(t), \quad t \geq 0, \quad v_i(0) = v_{0i},$$

в пространствах $L_{q,\kappa}(0, +\infty; E_i)$. Здесь $A_i = P_i A$, $v_i = P_i v$, $E_i = P_i E$, $v_{0i} = P_i v_0$, $f_i = P_i f$, а P_i являются проекторами Рисса на подпространства E_i в E , порожденные разбиением спектра Σ на Σ_1 и Σ_2 . Отметим, что задача $\mathcal{L}_1$ является задачей Коши для распадающейся системы N обыкновенных интегро-дифференциальных уравнений, а задача $\mathcal{L}_2$ остается задачей с неограниченными операторными коэффициентами.

Вначале результат теоремы 2 устанавливается для задачи $\mathcal{L}_2$. Для этого ее решение выписывается в виде

$$v_2(t) = \mathcal{A}_1(\mathcal{A}_1 - \mathcal{A}_2)^{-1} \int_0^t T_1(t-s) f_2(s) ds + \mathcal{A}_2(\mathcal{A}_2 - \mathcal{A}_1)^{-1} \int_0^t T_2(t-s) f_2(s) ds \\ + (\mathcal{A}_1 T_1(t) - \mathcal{A}_2 T_2(t))(\mathcal{A}_1 - \mathcal{A}_2)^{-1} v_{02}. \quad (6)$$

Здесь $\mathcal{A}_i$, $i = 1, 2$, суть корни характеристического уравнения

$$\lambda^2 + (\gamma_1 A_2 - \alpha I) \lambda + \gamma_2 A_2 = 0, \quad (\chi)$$

а $T_i(t) = \exp(t(\mathcal{A}_i - \alpha I))$. Используя результаты работ [11–13], можно показать, что при достаточно большом $\tilde{\sigma}_N$ оператор $\mathcal{A}_2$ неограничен, оператор $\mathcal{A}_1$ ограничен, а аналитическая полугруппа $T_2(t)$ и группа $T_1(t)$ таковы, что $\|T_i(t)\| \leq M \exp(-t\rho(\tilde{\sigma}_N))$, где $t \geq 0$ и $\rho(t) \rightarrow +\infty$ при $t \rightarrow +\infty$. Так как

$$\mathcal{A}_2 = -\frac{1}{2}(I + (I - 4\gamma_2 A_2(\gamma_1 A_2 - \alpha I)^{-2})^{1/2})(\gamma_1 A_2 - \alpha I) \equiv -\frac{1}{2}B(\gamma_1 A_2 - \alpha I),$$

то с помощью теоремы об отображении спектра и выбора $\tilde{\sigma}_N$ достаточно большим получаем, что спектр ограниченного оператора B лежит строго в правой полуплоскости. В силу формул Коши–Рисса

$$T_2(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} P_2 T_0 \left(\frac{1}{2} \gamma_1 \mu t \right) \exp \left(\left(\frac{1}{2} \mu - 1 \right) \alpha t \right) (\mu I - B)^{-1} d\mu.$$

Здесь контур Γ лежит внутри сектора аналитичности полугруппы $T_0(t)$ и охватывает спектр оператора B . Отсюда с помощью обобщенного неравенства Минковского получаем, что доказательство оценки (5) сводится к вытекающей из условия 1 равномерной по μ оценке интегрального оператора R_μ в весовом пространстве $L_{q,\kappa}(0, \infty; E_2)$ (см. [13]).

Решение задачи $\mathcal{L}_1$ выписывается в виде N -мерного вектора $v_1(t)$ с компонентами $v_{1k}(t)$ вида (6) при $\mathcal{A}_k = \beta_k(\sigma_k)$ в случае, если корни λ_k характеристического уравнения (χ) для $A_2 = \sigma_k$ простые, и с естественными изменениями в (6) в случае кратных корней. Число κ_0 при этом дает оценку показателя экспоненциального убывания на $+\infty$ для $T_1(t)$. Оценка (5) для $\mathcal{L}_2$ очевидна.

3. Рассмотрим теперь линейную задачу

$$v_t(t, x) + \gamma_1 \tilde{\Delta} v(t, x) + \gamma_2 \tilde{\Delta} \int_0^t \exp(\alpha(s-t)) v(s, x) ds = \varphi(t, x), \quad (7) \\ (t, x) \in Q, \quad v(0, x) = v_0(x), \quad x \in \Omega, \quad v(t, x) = 0, \quad t \geq 0, \quad x \in \partial\Omega.$$

ТЕОРЕМА 3. Если неравенства (2) выполняются для любых $\varphi \in L_{q,\kappa}(Q)$ и $v_0 \in W$, то задача (7) имеет единственное решение и справедлива оценка

$$\|v\| \leq M_3(\|\varphi\|_0; \kappa + |v_0|_{2-2/q}). \quad (8)$$

Для доказательства теоремы 3 задача (7) сводится к задаче (4) при $E = S_q$ и $A = \tilde{\Delta}$ с использованием результатов из [8, 12].

4. Перейдем к доказательству теоремы 1. Записывая решение задачи (7) как $v = \mathcal{N}(v_0, \varphi)$ и полагая $\varphi = \mathcal{P}f - \mathcal{P}D(v)$, сведем задачу (1) к операторному уравнению

$$v = \Phi(v) \equiv \mathcal{N}(v_0, \mathcal{P}f) + \mathcal{N}(0, \mathcal{P}D(v)). \quad (*)$$

Используя оценку (8), квадратичный характер нелинейности $D(v)$ и подходящие теоремы вложения для анизотропных соболевских пространств, получаем, что при достаточно «малых» v_0 и f оператор Φ переводит в себя шар $B(R_0) = \{v : \|v\|_{1,2;\kappa} \leq R_0\}$ при некотором малом R_0 и является сжимающим. Оценка (3) для части v решения задачи (1) вытекает из оценки (8) и уравнения (*). Так же, как и в [8], по соленоидальной функции v находится функция давления p , а ее оценка следует из оценки v и уравнения (1).

ЗАМЕЧАНИЕ. Можно показать, что невыполнение условий (2) вызывает некоторого типа (см. [8]) неустойчивость нулевого решения задачи (1), так как тогда либо оператор $\mathcal{A}_1$ оказывается неограниченным, либо в спектре оператора $\mathcal{A}_2 - \alpha I$ появляются точки с положительной вещественной частью. Заметим также, что, в отличие от [7], коэффициенты γ_2 и α могут быть отрицательными, а $q < 2$. При этом $\operatorname{Re} \beta_2(\sigma_1)$ может быть отрицательным числом, лишь если $\alpha < 0$, а $\sigma_1 < -\alpha/\gamma_1$. Из определения решения (1), оценки (3) и L_q -теории для задачи (Z) при $A = \tilde{\Delta}$ (см. [8]) следует необходимость выбора классов правых частей и начальных данных для (1) в соответствии с теоремой 1.

ЛИТЕРАТУРА

1. Агранович Ю. Я., Соболевский П. Е. ДАН УССР, сер. А., № 10, 3–6 (1989).
2. Котсиолис А. А., Осколков А. П. Записки научн. сем. ЛОМИ, **150**, № 6, 48–52 (1986).
3. Каразеева Н. А. Записки научн. сем. ЛОМИ, **156**, № 16, 69–72 (1986).
4. Осколков А. П. Труды МИАН, **179**, № 13, 126–164 (1988).
5. Осколков А. П. Функциональные методы в теории нестационарных течений линейных вязкоупругих жидкостей. Препринт ЛОМИ р-2-83.
6. Каразеева Н. А., Котсиолис А. А., Осколков А. П. Труды МИАН, **188**, № 14, 59–87 (1990).
7. Sobolevskii P. E. Differential Integral Equations, **7**, No. 6, 1597–1612 (1994).
8. Юдович В. И. Метод линеаризации в гидродинамической теории устойчивости. Изд-во Ростовского ун-та, Ростов, 1984.
9. Красносельский М. А., Забрейко П. П., Пустыльник Е. И., Соболевский П. Е. Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций. Наука, М., 1966.
10. Соболевский П. Е. ДАН СССР, **157**, № 1, 51–55 (1964).
11. Orlov V. P. Differential Integral Equations, **4**, No. 1, 89–101 (1991).
12. Orlov V. P. Nonlinear Anal., **26**, No. 12, 1937–1950 (1996).
13. Орлов В. П. Дифференц. уравн., № 2, 272–280 (1976).

Воронежский государственный университет
e-mail: orlov@kfa.vsu.ru

Поступило в редакцию
22 марта 1997 г.

УДК 517.9

Об уравнениях с непрерывными отображениями в банаховых пространствах

© 1999. К. Н. СОЛТАНОВ

Работа посвящена изучению некоторых свойств непрерывных отображений, действующих в банаховых пространствах, и уравнений (включений) с такими отображениями. В ней используются соображения, приведенные в [1].