Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

К. Н. Солтанов, Об уравнениях с непрерывными отображениями в банаховых пространствах, *Функц. анализ и его прил.*, 1999, том 33, выпуск 1, 87–92

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa346>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.45.116

26 апреля 2023 г., 04:27:08

Используя оценку (8), квадратичный характер нелинейности $D(v)$ и подходящие теоремы вложения для анизотропных соболевских пространств, получаем, что при достаточно «малых» v_0 и f оператор Φ переводит в себя шар $B(R_0) = \{v : \|v\|_{1,2;\kappa} \leq R_0\}$ при некотором малом R_0 и является сжимающим. Оценка (3) для части v решения задачи (1) вытекает из оценки (8) и уравнения (*). Так же, как и в [8], по соленоидальной функции v находится функция давления p , а ее оценка следует из оценки v и уравнения (1).

ЗАМЕЧАНИЕ. Можно показать, что невыполнение условий (2) вызывает некоторого типа (см. [8]) неустойчивость нулевого решения задачи (1), так как тогда либо оператор $\mathcal{A}_1$ оказывается неограниченным, либо в спектре оператора $\mathcal{A}_2 - \alpha I$ появляются точки с положительной вещественной частью. Заметим также, что, в отличие от [7], коэффициенты γ_2 и α могут быть отрицательными, а $q < 2$. При этом $\operatorname{Re} \beta_2(\sigma_1)$ может быть отрицательным числом, лишь если $\alpha < 0$, а $\sigma_1 < -\alpha/\gamma_1$. Из определения решения (1), оценки (3) и L_q -теории для задачи (Z) при $A = \tilde{\Delta}$ (см. [8]) следует необходимость выбора классов правых частей и начальных данных для (1) в соответствии с теоремой 1.

ЛИТЕРАТУРА

1. Агранович Ю. Я., Соболевский П. Е. ДАН УССР, сер. А., № 10, 3–6 (1989).
2. Котсиолис А. А., Осколков А. П. Записки научн. сем. ЛОМИ, **150**, № 6, 48–52 (1986).
3. Каразеева Н. А. Записки научн. сем. ЛОМИ, **156**, № 16, 69–72 (1986).
4. Осколков А. П. Труды МИАН, **179**, № 13, 126–164 (1988).
5. Осколков А. П. Функциональные методы в теории нестационарных течений линейных вязкоупругих жидкостей. Препринт ЛОМИ р-2-83.
6. Каразеева Н. А., Котсиолис А. А., Осколков А. П. Труды МИАН, **188**, № 14, 59–87 (1990).
7. Sobolevskii P. E. Differential Integral Equations, **7**, No. 6, 1597–1612 (1994).
8. Юдович В. И. Метод линеаризации в гидродинамической теории устойчивости. Изд-во Ростовского ун-та, Ростов, 1984.
9. Красносельский М. А., Забрейко П. П., Пустыльник Е. И., Соболевский П. Е. Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций. Наука, М., 1966.
10. Соболевский П. Е. ДАН СССР, **157**, № 1, 51–55 (1964).
11. Orlov V. P. Differential Integral Equations, **4**, No. 1, 89–101 (1991).
12. Orlov V. P. Nonlinear Anal., **26**, No. 12, 1937–1950 (1996).
13. Орлов В. П. Дифференц. уравн., № 2, 272–280 (1976).

Воронежский государственный университет
e-mail: orlov@kfa.vsu.ru

Поступило в редакцию
22 марта 1997 г.

УДК 517.9

Об уравнениях с непрерывными отображениями в банаховых пространствах

© 1999. К. Н. СОЛТАНОВ

Работа посвящена изучению некоторых свойств непрерывных отображений, действующих в банаховых пространствах, и уравнений (включений) с такими отображениями. В ней используются соображения, приведенные в [1].

1. Основные результаты. Пусть X — банахово пространство, Y — рефлексивное банахово пространство, причем Y и его сопряженное пространство Y^* — пространства со строго выпуклой нормой [2], и $f: D(f) \subseteq X \rightarrow Y$ — некоторое, вообще говоря, нелинейное отображение. Обозначим через $B_{r_0}^X(x_0)$ замкнутый шар из X с центром в точке x_0 радиуса $r_0 > 0$, $B_{r_0}^X(x_0) \equiv \{x \in X: \|x - x_0\|_X \leq r_0\}$, а через $S_{r_0}^X(x_0)$ — сферу с теми же данными; аналогичным образом определяются шары и сферы в других пространствах. Через $\langle \cdot, \cdot \rangle$ обозначим двойственную форму для пары пространств (например, для пары (Y, Y^*) ; о какой паре идет речь, будет понятно из контекста).

ОСНОВНАЯ ЛЕММА. Пусть $f: D(f) \subseteq X \rightarrow Y$, $B_{r_0}^X(x_0) \subseteq D(f)$ и на замкнутом шаре $B_{r_0}^X(x_0) \subseteq D(f) \subseteq X$ выполняются условия

(α) отображение f полунепрерывно снизу (т. е. $f \in C_{sl}^0$) и для любого $x \in B_{r_0}^X(x_0)$ образ $f(x)$ — выпуклое замкнутое множество (если f — однозначное отображение, то $f \in C^0$);

(β) существуют функции $\mu: \mathbb{R}_+^1 \rightarrow \mathbb{R}_+^1$, $\nu: \mathbb{R}_+^1 \rightarrow \mathbb{R}^1$, $\nu(\tau), \mu(\tau) \in C^0(\mathbb{R}_+^1 = \{\tau \in \mathbb{R}^1: \tau \geq 0\})$, такие, что для любого $y^* \in S_1^{Y^*}(0) \subset Y^*$ найдется $x \in B_{r_0}^X(x_0)$, для которого имеют место неравенства¹

$$\|f(x) - f(x_0)\|_Y \leq \mu(\|x - x_0\|_X), \quad (1)$$

$$\langle f(x) - f(x_0), y^* \rangle \geq \nu(\|x - x_0\|_X), \quad (2)$$

причем для любого $y^* \in S_1^{Y^*}(0) \equiv S^{Y^*}(0)$ найдется $x \in S_{r_0}^X(x_0)$, такой, что $\nu(\|x - x_0\|_X) \geq \delta_0 > 0$ для некоторого числа $\delta_0 > 0$.

Тогда образ $f(B_{r_0}^X(x_0))$ шара $B_{r_0}^X(x_0)$ содержит подмножество, плотное в множестве

$$M^Y \equiv \{y \in Y: \forall y^* \in S^{Y^*}(0) \exists x \in S_{r_0}^X(x_0), \langle y, y^* \rangle \leq \langle f(x), y^* \rangle\}. \quad (3)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Предположение о том, что $B_{r_0}^X(x_0) \subseteq D(f)$, несущественно. Это утверждение остается справедливым, если $B_{r_0}^X(x_0)$ заменить на замкнутую поглощающую окрестность $G \subseteq X$ некоторой точки $x_0 \in D(f)$, такую, что $G \subseteq D(f)$.

Из этой леммы в случае, когда $Y \equiv X^*$ и $x_0 = 0$, вытекает

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть $B_r^X(0) \subseteq D(f) \subseteq X$ и $f: B_r^X(0) \rightarrow X^*$ является непрерывным отображением, $f(0) = 0$. Предположим, что существуют такие же функции $\mu(\tau)$, $\nu(\tau)$, как в условии (β) основной леммы, и что справедливы неравенства

$$\|f(x)\|_{X^*} \leq \mu(\|x\|_X), \quad \langle f(x), x \rangle \geq \nu(\|x\|_X) \|x\|_X, \quad (4)$$

а $\nu(r) \geq \delta_0 > 0$, т. е. на сфере $S_r^X(0)$ справедливо неравенство $\nu(\|x\|_X) \geq \delta_0$.

Тогда образ $f(B_r^X(0))$ шара $B_r^X(0) \subset X$ содержит подмножество, плотное в множестве $M_r^* \equiv \{x^* \in X^*: \langle x^*, x \rangle \leq \langle f(x), x \rangle \text{ для любого } x \in S_r^X(0)\}$ (в частности, шар $B_{\delta_0}^{X^*}(0) \subset X^*$ содержится в множестве M_r^*).

¹В случае когда f — многозначное отображение, $f(x) - f(x_0)$ понимается в следующем смысле: $f(x) - f(x_0) = \{y - y_0: x \in B_r^X(x_0) \text{ для любых } y \in f(x), y_0 \in f(x_0)\}$.

Из основной леммы непосредственно вытекает

ТЕОРЕМА 1. Пусть отображение $f: D(f) \subseteq X \rightarrow Y$ удовлетворяет условиям основной леммы и образ $f(B_r^X(x_0))$ шара $B_r^X(x_0) \subset X$ является замкнутым множеством. Тогда уравнение $f(x) = y$ (или включение $f(x) \ni y$) разрешимо в шаре $B_r^X(x_0)$ для любого $y \in M_r$, т. е. M_r содержится в образе $f(B_r^X(x_0))$.

В силу известных результатов (см., например, [3]), из основной леммы, следствия 1 и теоремы 1 вытекает справедливость таких утверждений:

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть выполняются условия следствия 1 и, кроме того, f — локально собственное отображение. Тогда множество M_r^* содержится в образе $f(B_r^X(0))$.

ТЕОРЕМА 2 (теорема разрешимости). Пусть условия основной леммы выполняются на шарах $B_r^X(0)$ для любого $r \geq r_0 > 0$ ($r_0 > 0$ — некоторое число).

(i) Тогда уравнение (или включение)

$$f(x) = y \quad (f(x) \ni y) \quad (5)$$

разрешимо для любого y из некоторого плотного подмножества множества

$$M^Y \equiv \{y \in Y : \exists r \equiv r(y) \geq r_0 > 0, \forall y^* \in S^Y(0) \exists x \in S_r^X(0), \langle y, y^* \rangle \leq \langle f(x), y^* \rangle\}, \quad (6)$$

а если, кроме того, выполняются условия теоремы 1, то (5) разрешимо для любого $y \in M^Y$.

(ii) Если функция ν из условия основной леммы такова, что $\nu(\tau) \rightarrow +\infty$ при $\tau \rightarrow +\infty$, то (5) разрешимо для любого y из некоторого подмножества, плотного в Y , а если, кроме того, выполняются условия теоремы 1, то (5) разрешимо для любого $y \in Y$.

Из следствия 1 и теоремы 1 вытекает справедливость следующего утверждения (точнее, теоремы о неподвижной точке).

СЛЕДСТВИЕ 3. Пусть $f: D(f) \subseteq X \rightarrow X$, на $B_1^X(x_0) \equiv B^X(x_0) \subseteq D(f)$ выполняются условия $f \in C^0$, $f(B^X(x_0)) \subseteq B^X(x_0)$ и $\|f(x) - f(x_0)\|_X \leq \mu(\|x - x_0\|_X)$, где $\mu \in C^0$, и $\nu_0(\tau) \equiv \tau - \mu(\tau)$ удовлетворяет условию на $\nu(\tau)$ из следствия 1. Тогда если $f_1(B^X(x_0))$, где $f_1 \equiv \text{id} - f$, id — единичный оператор, замкнуто в X , то f обладает неподвижной точкой в шаре $B^X(x_0)$.

Доказательства этих результатов основаны на утверждениях, которые приведены в следующем пункте.

2. Некоторые результаты, связанные с геометрией. Пусть пространства и отображение такие же, как и выше.

ЛЕММА 1. Пусть $f: D(f) \subseteq X \rightarrow X^*$ и на сфере $S_1^X(0) \subseteq D(f)$ выполняется неравенство $\langle f(x), x \rangle > 0$. Тогда выпуклая оболочка над $f(S_1^X(0))$ содержит подмножество, плотное в выпуклом теле из пространства X^* .

Эта лемма в более общем виде имеется в работе [1].

ЛЕММА 2. В условиях основной леммы для каждого r , $0 < r \leq r_0$, такого, что $\nu(r) > 0$, образ $f(S_r^X(0))$ сферы $S_r^X(0) \subset B_{r_0}^X(0)$ содержит подмножество, плотное в граничном множестве ∂M^* некоторой замкнутой поглощающей окрестности нуля M^* в X^* ($\partial M^* = M^* \setminus \text{int } M^*$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО (схема). Поскольку при $\dim X \leq 2$ доказательство очевидно, рассмотрим случай $\dim X \geq 3$. Предположим обратное, т.е. $\text{cl}(f(S_r^X(0)) \cap \partial M^*) \subset \partial M^*$ для любой поглощающей окрестности нуля M^* из X^* , такой, что $f(S_r^X(0)) \cap \partial M^* \neq \emptyset$, и покажем, что это предположение противоречит условиям леммы. Для краткости предположим, что имеет место такой случай: $f(S_r^X(0))$ содержится в границе ∂M^* замкнутой звездной окрестности нуля M^* и неплотно в ней, т.е. $\text{cl } f(S_r^X(0)) \subset \partial M^*$. Тогда существует точка $y \in \partial M^*$, такая, что для некоторой окрестности $U_\varepsilon(y)$ имеет место $f(S_r^X(0)) \cap U_\varepsilon = \emptyset$. Из условий леммы вытекает, что ∂M^* и $f(S_r^X(0))$ содержатся в «шаровом кольце» $B_{R_1}^{X^*}(0) \setminus B_{r_1}^{X^*}(0)$, где $R_1 = \mu(r)$, а $r_1 = \nu(r)$.

Далее, в силу второго неравенства из (4) в следствии 1 существует часть сферы $S_r^X(0)$, образ которой не может пересекаться с $U_\varepsilon(y) \cap \partial M^*$, так как эти множества содержатся в разных полупространствах. Тогда, выбирая два гомотопически эквивалентных пути из этой части сферы и гомотопию, соединяющую эти пути по другой части сферы, получаем, что в силу непрерывности отображения f построенная гомотопическая эквивалентность отображается на гомотопическую эквивалентность на ∂M^* . А это при сделанном предположении противоречит условию леммы о геометрическом расположении образа точки относительно самой точки, которое задано в виде второго неравенства из (4). Полученное противоречие и показывает невозможность сделанного предположения. Тем самым лемма доказана.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Множество M^Y (M^*), определенное в основной лемме, является выпуклым телом в пространстве Y (X^* соответственно).

Заметим, что доказательство основной леммы проводится с использованием следствия 1 и известных результатов из [4, 5].

3. Некоторые замечания о возмущенных уравнениях и включениях. Пусть Y — рефлексивное банахово пространство, причем Y и Y^* — пространства со строго выпуклой нормой, а X — некоторое банахово пространство.

ТЕОРЕМА 3. Предположим, что Y^* сепарабельно. Пусть отображение $f: D(f) \subseteq X \rightarrow Y$ представимо в виде $f \equiv f_0 + f_1$, где $f_i: D(f) \subseteq X \rightarrow Y$ ($i = 0, 1$) — некоторые отображения, $B_1^X(0) \equiv B^X(0) \subseteq D(f)$ и на $B^X(0)$ выполняются следующие условия:

- (a) $f_0 \in C^0$ — внутреннее отображение [4] и $f_0(0) = 0$;
- (b) $f_1 \in C_{sl}^0$, т.е. f_1 — полунепрерывное снизу отображение, и для любого $x \in B^X(0)$ образ $f_1(x)$ — выпуклое замкнутое множество; кроме того, для любого $x \in B^X(0)$ справедливо неравенство

$$\|f(x)\|_Y \leq \mu(\|x\|_X), \quad (7)$$

а также

$$\forall y^* \in S_1^{Y^*}(0) \exists x \in B^X(0), \langle f(x), y^* \rangle \geq K \langle f_0(x), y^* \rangle \geq \nu(\|x\|_X), \quad (8)$$

$K > 0$ — постоянная,

где $\mu, \nu \in C^0$ — такие же функции, как в основной лемме, $f(0) \ni 0$;

(с) каждый элемент $x_0 \in \text{int } B^X(0)$ обладает окрестностью $U_\varepsilon(x_0)$, $\varepsilon \geq \varepsilon_0 > 0$, такой, что для любых $x_1, x_2 \in U_\varepsilon(x_0) \cap B^X(0)$ выполняется неравенство

$$\|f(x_1) - f(x_2)\|_Y \geq K_0 \|f_0(x_1) - f_0(x_2)\|_Y, \quad K_0 > 0 \text{ — постоянная.}$$

Тогда образ $f(B^X(0))$ шара $B^X(0)$ является телом в Y ; более того, $M \subseteq f(B^X(0))$, т. е. уравнение $f(x) = y$ (или включение $f(x) \ni y$) разрешимо для любого $y \in M^Y$.

Доказательство в силу результатов работы [5] и условий $f_0 \in C^0$, $f_1 \in C_{sl}^0$ вытекает из основной леммы и теоремы 2. А в случае, когда $f_1 \in C^0$, оно непосредственно вытекает из следствий 1 и 2, так как из условия (с) следует замкнутость образа $f(B^X(0))$ в Y .

4. Один пример. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, — ограниченная область с достаточно гладкой границей $\partial\Omega$. В Ω рассматривается задача

$$\Delta u + g(x, u, \nabla u) = h(x), \quad x \in \Omega, \quad u|_{\partial\Omega} = 0; \quad (9)$$

здесь $h(x) \in W_2^{-1}(\Omega)$, $g(x, \xi, \eta)$ — некоторые функции, а Δ — лапласиан и $\nabla u \equiv (D_1 u, \dots, D_n u)$, $D_i \equiv \partial/\partial x_i$, $i = 1, \dots, n$.

Пусть выполняется условие

(Р) функция $g(x, \xi, \eta)$ удовлетворяет условию Каратеодори на $\Omega \times \mathbb{R}^{n+1}$ [7]; отображение $g: \overset{\circ}{W}_2^1(\Omega) \rightarrow W_2^{-1}(\Omega)$ принадлежит классу C^0 , причем существуют постоянные $k_0, k_1 \geq 0$, p , $1 \leq p \leq p^*$, где $p^* = 2n/(n-2)$ — предельный показатель из теоремы вложения для пространств Соболева [6], и функция $\phi: \mathbb{R}_+^1 \rightarrow \mathbb{R}_+^1$, такие, что для любого $u(x) \in \overset{\circ}{W}_2^1(\Omega)$ выполняются неравенства

$$\|g(x, u, \nabla u)\|_{W_2^{-1}} \leq \phi(\|u\|), \quad \|u\|^2 \equiv \|u\|_{\overset{\circ}{W}_2^1}^2 \equiv \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n |D_i u|^2 dx,$$

$$\langle g(x, u, \nabla u), u \rangle \geq -k_0 \|u\|_{L_p(\Omega)}^2 - k_1 \|u\|^2.$$

Через $k^* > 0$ обозначим постоянную из неравенства $\|u\|_{L_{p^*}} \leq k^* \|u\|_{\overset{\circ}{W}_2^1}$.

ТЕОРЕМА 4. Пусть выполняется условие (Р). Тогда если $k_0(k^*)^2 < 1 - k_1$, то задача (9) для любого $h \in M \subseteq W_2^{-1}(\Omega)$ разрешима в $\overset{\circ}{W}_2^1(\Omega)$, где M — такое множество, что $\overline{M} \equiv W_2^{-1}(\Omega)$.

Вопрос о единственности будет освещен в другой статье.

ЛИТЕРАТУРА

1. Солтанов К. Н. Докл. АН СССР, **289**, № 6, 1318–1323 (1986).
2. Дистель Дж. Геометрия банаховых пространств. Избранные главы. «Вища школа», Киев, 1980.
3. Petryshyn W. V. J. Funct. Anal., **5**, No. 1, 137–159 (1970).
4. Куратовский К. Топология, Т. 1. Мир, М., 1966; Т. 2, 1969.
5. Michael E. A. Continuous selections-1. Ann. Math., **63**, No. 2, 361–381 (1956).
6. Соболев С. Л. Некоторые применения

функционального анализа в математической физике. Новосибирск, СО АН СССР, 1962. 7. Сансоне Дж. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Т. 1, ИЛ, М. 1953.

Институт математики
и механики АН Азербайджана

Поступило в редакцию
13 мая 1994

В переработанном виде
21 июля 1997 г.

УДК 517.988+517.968.4

Об интегральном уравнении, описывающем фазовые переходы в системе магнитных стержней^{*}

© 1999. Л. Д. Эскин

1. В 1949 г. Л. Онзагер [1] показал, что в системе тонких неполярных цилиндрических стержней ($\delta = d/l \ll 1$, d — диаметр, l — длина стержня) с парным взаимодействием типа стерического отталкивания, изотропной при низких концентрациях, с увеличением концентрации происходит фазовый переход первого рода (со скачком концентрации) в анизотропную (ориентационно упорядоченную) нематическую фазу. Термодинамические свойства анизотропной фазы (нематика) полностью описываются отличной от единицы плотностью распределения ориентаций стержней $f(\mathbf{n})$ ($\mathbf{n}$ — орт оси стержня), для которой Онзагер получил нелинейное интегральное уравнение $\nu + \ln f(\mathbf{n}') + \sigma T f = 0$, где $\sigma = 2cdl^2$ (c — плотность системы), T — линейный интегральный оператор, $Tf = \int B_1(\mathbf{n}, \mathbf{n}') f(\mathbf{n}) d\mathbf{n}$, с ядром $B_1 = (1 - (\mathbf{nn}')^2)^{1/2}$, $\mathbf{nn}'$ — скалярное произведение ортов $\mathbf{n}$ и $\mathbf{n}'$, а неизвестная константа ν определяется условием нормировки $\int f(\mathbf{n}) d\mathbf{n} = 1$, $d\mathbf{n} = (4\pi)^{-1} \sin \theta d\theta d\varphi$ (φ, θ — сферические координаты орта $\mathbf{n}$). Для изотропной фазы $f(\mathbf{n}) = 1$. Нематик обладает аксиальной и зеркальной симметрией. Направление оси симметрии совпадает с единственным направлением преимущественной ориентации осей частиц. Отсюда следует [2, 3], что в сферической системе координат с полярной осью, совпадающей с осью симметрии нематика, плотность $f(\mathbf{n})$ анизотропной фазы должна удовлетворять следующим дополнительным условиям: (а) $f(\mathbf{n})$ не зависит от угла φ ($f(\mathbf{n}) = f(\theta)$); (б) $f(\theta) = f(\pi - \theta)$; следовательно, $f(\mathbf{n})$ разлагается в ряд Фурье по полиномам Лежандра P_{2s} с четным индексом; (с) $f(0) = f(\pi) = \max$ и других максимумов f не имеет. Решение уравнения Онзагера, удовлетворяющее условию нормировки и условиям (а)–(с), изучалось во многих физических работах (соответствующие ссылки можно найти в монографии [2]). Большой интерес представляет изучение системы магнитных стержней (с магнитным моментом $\mathbf{m}$ на единицу длины стержня), в которой помимо стерического отталкивания необходимо учитывать и диполь-дипольное взаимодействие

^{*} Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 95-01-00270а).