Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. М. Бухштабер, Д. В. Лейкин, В. З. Энольский,
Рациональные аналоги абелевых функций, *Функци.
анализ и его прил.*, 1999, том 33, выпуск 2, 1–15

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa348>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.82.47.9

26 апреля 2023 г., 17:51:32

Рациональные аналоги абелевых функций*

© 1999. В. М. Бухштабер, Д. В. Лейкин, В. З. Энольский

Введение

В теории абелевых функций на якобианах ключевую роль играют *целые функции*, удовлетворяющие теореме Римана об обращении в нуль (см., например, [9]). В настоящей работе мы вводим *полиномы*, удовлетворяющие аналогу этой теоремы, и показываем, что такие полиномы полностью характеризуются этим свойством. Рациональными аналогами абелевых функций мы называем логарифмические производные порядка ≥ 2 этих полиномов.

Мы назвали полученные полиномы *полиномами Шура–Вейерштрасса*, так как они построены по классическим полиномам Шура, которые, однако, соответствуют специальным разбиениям, отвечающим последовательностям Вейерштрасса. В последнее время в связи с задачей построения рациональных решений интегрируемых нелинейных уравнений [1, 7] полиномы Шура оказались в центре внимания [5, 6]. Поскольку полином Шура, соответствующий произвольному разбиению, приводит к рациональному решению иерархии Кадомцева–Петвиашвили, возник вопрос о связи этих решений с решениями в терминах абелевых функций на якобианах. Наши результаты открывают путь к решению этой проблемы на основе теоремы Римана об обращении в нуль.

Наш подход мы демонстрируем на примере последовательностей Вейерштрасса, задаваемых парой взаимно простых чисел n и s . Каждая такая последовательность порождает класс плоских кривых рода $g = (n-1)(s-1)/2$, задаваемых уравнениями вида

$$Y^n - X^s - \sum_{\alpha, \beta} \lambda_{\alpha n + \beta s} X^\alpha Y^\beta = 0,$$

где $0 \leq \alpha < s-1$, $0 \leq \beta < n-1$ и $\alpha n + \beta s < ns$. Размерность пространства модулей такого класса равна $d_{n,s} = (n+1)(s+1)/2 - [s/n] - 3$. На универсальном пространстве якобианов таких кривых мы построили [3] целые функции $\sigma(\mathbf{u}; \boldsymbol{\lambda})$, где $\mathbf{u} \in \mathbb{C}^g$ и $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{C}^{d_{n,s}}$. Подобно эллиптической σ -функции Вейерштрасса, функция $\sigma(\mathbf{u}; \boldsymbol{\lambda})$ обладает в окрестности точки $\mathbf{0} \in \mathbb{C}^g$ разложением в ряд по $u_1, \dots, u_g$ с коэффициентами, представляющими собой полиномы по $\boldsymbol{\lambda}$ с рациональными коэффициентами. Предел $\lim_{\boldsymbol{\lambda} \rightarrow \mathbf{0}} \sigma(\mathbf{u}; \boldsymbol{\lambda})$ определен и приводит к полиному, удовлетворяющему аналогу теоремы Римана об обращении в нуль. В качестве приложения нашего результата мы получили, что $\sigma(\mathbf{u}; \mathbf{0})$ с точностью до постоянного множителя совпадает с соответствующим полиномом Шура–Вейерштрасса.

*Эта работа была частично поддержана грантами INTAS 96-770 и CRDF UM1-325.

Работа организована следующим образом. В §1 приведены сведения о последовательностях Вейерштрасса. В §2 вводится понятие разбиений Вейерштрасса и описываются их свойства. В §3 содержатся необходимые определения и факты из теории симметрических функций. В §4 мы определяем полиномы Шура–Вейерштрасса и изучаем их свойства. Пятый параграф посвящен рациональному аналогу отображения Абеля и решению задачи его обращения. В §6 вводится аналог теоремы Римана об обращении в нуль для полиномов и доказываются описанные выше основные результаты этой работы.

Благодарности. Авторы выражают благодарность Е. Белоколосу, А. П. Веселову, К. Илбеку, И. М. Кричеверу и Э. Рису за стимулирующие обсуждения.

§1. Последовательности Вейерштрасса

Пусть n и s — пара взаимно простых целых чисел, таких, что $s > n \geq 2$. Рассмотрим множество всех неотрицательных целых чисел вида

$$an + bs, \quad \text{где } a, b \text{ — неотрицательные целые числа.} \quad (1.1)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. Натуральные числа, не представимые в виде (1.1), образуют *последовательность Вейерштрасса*. Количество таких чисел называется длиной этой последовательности.

Упорядоченную по возрастанию последовательность Вейерштрасса мы будем обозначать через $W_{n,s}$. Для доказательства основных свойств последовательностей Вейерштрасса важным является следующее элементарное замечание.

ЛЕММА 1.2. *Элементы w последовательности Вейерштрасса $W_{n,s}$ представимы в виде*

$$w = -\alpha n + \beta s, \quad (1.2)$$

где α и β — целые числа, такие, что $\alpha > 0$ и $n > \beta > 0$, причем числа α и β в представлении (1.2) определены однозначно.

В приведенной ниже лемме перечислены свойства последовательностей Вейерштрасса, которые понадобятся нам в дальнейшем.

ЛЕММА 1.3. *Последовательность Вейерштрасса $W_{n,s} = \{w_1, w_2, \dots\}$ обладает следующими свойствами:*

- (1) ее длина g равна $(n-1)(s-1)/2$;
- (2) ее максимальный элемент w_g равен $2g-1$;
- (3) если $w \in W_{n,s}$, то $w_g - w \notin W_{n,s}$;
- (4) если $w > \tilde{w}$, где $w \in W_{n,s}$ и $\tilde{w} \notin W_{n,s}$, то $w - \tilde{w} \in W_{n,s}$;
- (5) $i \leq w_i \leq 2i-1$ для всех $i = 1, \dots, g$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1) Подсчитаем количество положительных целых чисел вида (1.2). При фиксированном значении $\beta = \ell \in \{1, \dots, n-1\}$ множитель α пробегает все значения $\{1, \dots, \lfloor \ell s/n \rfloor\}$; таким образом (см. [10, viii. 17, viii. 18]),

$$g = \sum_{\ell=1}^{n-1} \left\lfloor \frac{\ell s}{n} \right\rfloor = \frac{(n-1)(s-1)}{2}.$$

(2) Заметим, что $2g-1 = -n+s(n-1)$. Пусть существует число w вида (1.2), большее чем $2g-1$. Тогда, поскольку n и s взаимно просты, в представлении (1.2) числа w либо $\alpha \leq 1$, либо $\beta > n$. Полученное противоречие доказывает утверждение (2) леммы.

(3) Для произвольного числа $w \in \mathbf{W}_{n,s}$, рассмотрим разность $w_g - w$. Согласно лемме 1.2, имеем

$$w_g - w = -n + s(n-1) - (-\alpha n + \beta s) = (\alpha - 1)n + (n - 1 - \beta)s,$$

а последнее число имеет вид (1.1).

(4) Пусть $\tilde{w} \notin \mathbf{W}_{n,s}$ и $w \in \mathbf{W}_{n,s}$. Тогда имеют место представления

$$\tilde{w} = an + bs \quad \text{и} \quad w = -\alpha n + \beta s,$$

откуда по предположению

$$w - \tilde{w} = -\alpha n + \beta s - (an + bs) = -(\alpha + a)n + (\beta - b)s > 0;$$

следовательно, согласно лемме 1.2, $w - \tilde{w} \in \mathbf{W}_{n,s}$.

(5) Рассмотрим множество $\widetilde{\mathbf{W}}_{n,s} = \{2g-1-w_{g+1-i}\}_{i=1,\dots,g}$. Согласно пп. (2) и (3), $\widetilde{\mathbf{W}}_{n,s} \cap \mathbf{W}_{n,s} = \{\emptyset\}$; следовательно, $\widetilde{\mathbf{W}}_{n,s} \cup \mathbf{W}_{n,s}$ состоит из $2g$ неотрицательных целых чисел, меньших $2g-1$, т. е. является перестановкой множества $\{0, 1, 2, \dots, 2g-1\}$.

Пусть теперь $N(L)$ — количество чисел вида (1.1), меньших L . Тогда, поскольку $\{\tilde{w}_1, \dots, \tilde{w}_{N(w_i)}\} \subset \widetilde{\mathbf{W}}_{n,s}$ и $\{w_1, \dots, w_i\} \subset \mathbf{W}_{n,s}$ пересечение $\{\tilde{w}_1, \dots, \tilde{w}_{N(w_i)}\} \cap \{w_1, \dots, w_i\}$ пусто, а объединение $\{\tilde{w}_1, \dots, \tilde{w}_{N(w_i)}\} \cup \{w_1, \dots, w_i\}$ представляет собой перестановку множества $\{0, 1, 2, \dots, w_i\}$ для любого $w_i \in \mathbf{W}_{n,s}$, откуда следует равенство $w_i = i + N(w_i) - 1$.

Заметим, что $\tilde{w}_0 = 0 < w_i$, т. е. $N(w_i) \geq 1$, а значит, для всех $w_i \in \mathbf{W}_{n,s}$ имеют место неравенства $w_i \geq i$.

С другой стороны, согласно п. (4), имеет место включение $\{w_i - \tilde{w}_1, \dots, w_i - \tilde{w}_{N(w_i)}\} \subset \{w_1, \dots, w_i\}$, откуда выводим, что справедливо неравенство $N(w_i) \leq i$. Таким образом, $w_i = i + N(w_i) - 1 \leq 2i - 1$. $\square$

Множество всех последовательностей Вейерштрасса $\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_m)$ длины m обозначим через $\mathbf{WS}_m$.

§2. Разбиения Вейерштрасса

В дальнейшем мы будем придерживаться соглашений и обозначений, принятых в [8].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. *Разбиением π длины m называется любой невозрастающий набор из m положительных целых чисел π_i . Множество всех разбиений длины m обозначим через Par_m .*

На множестве разбиений определена операция сопряжения:

$$\pi' = \{\pi_1, \dots, \pi_m\}' = \{\pi'_1, \dots, \pi'_{m'}\}, \quad \text{где } \pi'_i = \text{Card}\{j : \pi_j \geq i\};$$

в частности, длина m' сопряженного разбиения π' равна π_1 . Очевидно, что $\pi'' = \pi$.

ЛЕММА 2.2. *Формула*

$$\varkappa(\mathbf{w}) = \boldsymbol{\pi}, \quad \text{где } \pi_k = w_{g-k+1} + k - g, \quad (2.1)$$

задает вложение $\varkappa: \text{WS}_g \rightarrow \text{Par}_g$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нужно показать, что $\varkappa(\mathbf{W}_{n,s})$ является разбиением. Покажем сначала, что $\pi_j = w_{g-j+1} + j - g > 0$ для всех $j = 1, \dots, g$. Согласно п. (5) леммы 1.3, имеем $w_i - i \geq 0$, откуда при $i = g + 1 - j$ следует требуемое неравенство.

Остается показать, что $\pi_k - \pi_{k+1} \geq 0$ при $\pi_k = w_{g-k+1} + k - g$ и $\pi_{k+1} = w_{g-k} + k - g + 1$. Действительно, разность

$$\pi_k - \pi_{k+1} = w_{g-k+1} - w_{g-k} - 1$$

неотрицательна, поскольку по определению $\mathbf{W}_{n,s}$ — строго возрастающая последовательность. $\square$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.3. Разбиение $\boldsymbol{\pi}$, которое является образом при отображении $\varkappa$ какой-либо последовательности Вейерштрасса, назовем *разбиением Вейерштрасса*. Для разбиений Вейерштрасса введем обозначение

$$\boldsymbol{\pi}_{n,s} = \varkappa(\mathbf{W}_{n,s}).$$

ЛЕММА 2.4. *Разбиения Вейерштрасса обладают следующими свойствами:*

- (1) $\boldsymbol{\pi}_{n,s} = \boldsymbol{\pi}'_{n,s}$;
- (2) $\boldsymbol{\pi}_{n,s} \subset \{g, g-1, \dots, 1\}$, где $g = (n-1)(s-1)/2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Известно [8, с. 13–14], что для любого разбиения $\boldsymbol{\mu} \in \text{Par}_n$, такого, что $\mu_1 = m$, множество, состоящее из $m+n$ чисел

$$\mu_i + n - i \quad (1 \leq i \leq n), \quad n - 1 + j - \mu'_j \quad (1 \leq j \leq m),$$

образует перестановку множества $\{0, 1, 2, \dots, m+n-1\}$.

Применим этот результат к разбиению Вейерштрасса $\boldsymbol{\pi}_{n,s}$. Его длина равна g ; элемент π_1 равен $w_g + 1 - g = g$. Таким образом, множество, состоящее из $2g$ чисел

$$\begin{aligned} \pi_i + g - i &= w_{g+1-i} & (i = 1, \dots, g), \\ g - 1 + j - \pi'_j &= 2g - 1 - (\pi'_j + g - j) & (j = 1, \dots, g) \end{aligned}$$

образует перестановку множества $\{0, 1, 2, \dots, 2g-1\}$. То есть множество $\{2g-1 - (\pi'_j + g - j)\}_{j=1, \dots, g}$ является дополнением последовательности $\mathbf{W}_{n,s}$ в множестве $\{0, 1, 2, \dots, 2g-1\}$. Поскольку дополнение последовательности $\mathbf{W}_{n,s}$ в множестве $\{0, 1, 2, \dots, 2g-1\}$ имеет вид $\{2g-1 - w_{g+1-j}\}_{j=1, \dots, g}$ и $\{\pi'_1, \dots, \pi'_g\}$ — разбиение, получаем

$$\pi'_j = w_{g+1-j} + j - g = \pi_j \quad (1 \leq j \leq g).$$

Условие $\boldsymbol{\pi}_{n,s} \subset \{g, g-1, \dots, 1\}$ означает, что для элементов последовательности $\mathbf{W}_{n,s}$ выполняются неравенства $w_i \leq 2i-1$ для всех i , $1 \leq i \leq g$, согласно п. (5) леммы 1.3. $\square$

§3. Необходимые сведения о симметрических функциях

Приведем обозначения и результаты, придерживаясь, как и выше, книги [8]. Пусть $\Lambda_m = \bigoplus_{k \geq 0} \Lambda_m^k$ — градуированное кольцо симметрических полиномов с целыми коэффициентами от переменных $x_1, \dots, x_m$, где Λ_m^k состоит из однородных симметрических полиномов степени k . Здесь число m , как всегда, предполагается достаточно большим, и поэтому далее кольцо Λ_m будем обозначать через Λ .

Введем элементарные симметрические функции e_r с помощью производящей функции $E(t) = \sum_{r \geq 0} e_r t^r = \prod_{i \geq 0} (1 + x_i t)$. Как известно, $\Lambda = \mathbb{Z}[e_1, e_2, \dots]$. Введем элементарные полиномы Ньютона p_r с помощью производящей функции $P(t) = \sum_{r \geq 1} p_r t^{r-1} = \sum_{i \geq 1} x_i / (1 - x_i t)$. Между производящими функциями $P(t)$ и $E(t)$ имеет место соотношение $P(-t)E(t) = E'(t)$. Функция e_k выражается через $\{p_1, \dots, p_k\}$ в виде определителя:

$$e_k = \frac{1}{k!} \begin{vmatrix} p_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ p_2 & p_1 & 2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{k-1} & p_{k-2} & p_{k-3} & \dots & k-1 \\ p_k & p_{k-1} & p_{k-2} & \dots & p_1 \end{vmatrix}. \quad (3.1)$$

Функции p_r алгебраически независимы над полем рациональных чисел $\mathbb{Q}$ и $\Lambda_{\mathbb{Q}} = \Lambda \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} = \mathbb{Q}[p_1, p_2, \dots]$. Положим $p_{\pi} = p_{\pi_1} p_{\pi_2} p_{\pi_3} \dots$ для всех разбиений $\pi = \{\pi_1, \pi_2, \dots\}$. Таким образом, элементы p_{π} образуют аддитивный базис в $\Lambda_{\mathbb{Q}}$. Используя этот факт, введем в кольце Λ скалярное произведение при помощи формулы

$$\langle p_{\pi}, p_{\rho} \rangle = \delta_{\pi, \rho} z_{\rho}, \quad (3.2)$$

где $z_{\rho} = \prod_{k \geq 1} k^{m_k} m_k!$ и $m_k = m_k(\rho)$ — кратность числа k в разбиении ρ (см. [8, с. 30, 49]).

Оператору умножения на произвольный симметрический полином f отвечает двойственный относительно скалярного произведения (3.2) линейный оператор $\mathcal{D}(f)$, который вполне определяется формулой $\langle \mathcal{D}(f)u, v \rangle = \langle u, fv \rangle$ для всех $u, v \in \Lambda$. Например, имеет место формула

$$\mathcal{D}(p_k) = (-1)^{k-1} \sum_{r \geq 0} e_r \frac{\partial}{\partial e_{r+k}}, \quad (3.3)$$

в предположении, что симметрические полиномы записаны как функции от e_r . Записав функцию $f \in \Lambda$ в базисе p_{μ} в виде полинома $\phi(p_1, p_2, \dots)$ с рациональными коэффициентами, получаем (см. [8, с. 58–59]):

$$\mathcal{D}(f) = \phi \left(\frac{\partial}{\partial p_1}, \dots, n \frac{\partial}{\partial p_n}, \dots \right). \quad (3.4)$$

§4. Полиномы Шура–Вейерштрасса и их свойства

Классический полином Шура s_{π} , соответствующий произвольному разбиению π , обладает представлением в виде определителя (см. [8, с. 38]):

$$s_{\pi} = \det(e_{\pi'_i - i + j})_{1 \leq i, j \leq m}, \quad \text{где } m \text{ — длина разбиения } \pi. \quad (4.1)$$

Полиномы Шура (4.1), соответствующие разбиениям Вейерштрасса $\pi_{n,s}$, будем обозначать через $S_{n,s}$. Согласно формуле (4.1), имеем

$$S_{n,s} = S_{n,s}(e_1, \dots, e_{2g-1}), \quad \text{где } g = (n-1)(s-1)/2.$$

ТЕОРЕМА 4.1. *Каждый полином $S_{n,s}$ в представлении через элементарные полиномы Ньютона является полиномом только от g переменных $\{p_{w_1}, \dots, p_{w_g}\}$, где $\{w_1, \dots, w_g\} = \mathbf{W}_{n,s}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что для любой симметрической функции u из невырожденности скалярного произведения (3.2) вытекает, что если $\langle u, p_k f \rangle \equiv 0$ для всех $f \in \Lambda$, то u не зависит от p_k . Последнее условие в силу (3.3) эквивалентно соотношению $\mathcal{D}(p_k)u = (-1)^{k-1} \sum_{r \geq 0} e_r \partial u / \partial e_{r+k} \equiv 0$, где функция u рассматривается как полином от e_r .

Рассмотрим действие линейного оператора $\mathcal{D}(p_q)$ на полином $S_{n,s}$, соответствующий разбиению Вейерштрасса $\pi_{n,s} = \{\pi_1, \dots, \pi_g\}$, при некотором значении $q \in \{1, 2, \dots, 2g-1\}$. Дифференцируя определитель, заданный формулой (4.1), имеем

$$\mathcal{D}(p_q)S_{n,s}(e_1, e_2, \dots, e_{2g-1}) = (-1)^{q-1} \sum_{i=1}^g \sum_{j=1}^g e_{\pi_i - i - q + j} M_{i,j}, \quad (4.2)$$

где мы выполнили замену индекса суммирования по формуле $r = \pi_i - i - q + j$ и обозначили через $M_{i,j}$ алгебраическое дополнение элемента (i, j) в матрице $(e_{\pi_i - i + j})_{1 \leq i, j \leq g}$.

Нам понадобится вспомогательное утверждение.

ЛЕММА 4.2. *Если для данного $q \in \mathbb{N}$ и всех $\ell \in \{1, \dots, g\}$, таких, что $\pi_\ell - \ell - q + g > 0$, уравнение*

$$\pi_\ell - \ell - q = \pi_{\ell'} - \ell' \quad (4.3)$$

разрешимо относительно ℓ' , то $S_{n,s}$ не зависит от p_q .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что при выполнении условий леммы сумма вида $\sum_{j=1}^g e_{\pi_\ell - \ell - q + j} M_{\ell,j}$ равна $S_{n,s} \delta_{\ell, \ell'}$. Тогда двойная сумма (4.2) равна $S_{n,s} \sum_{i=1}^g \delta_{i, i'}$ и при ненулевом q обращается в 0, что и доказывает независимость $S_{n,s}$ от p_q . $\square$

Возвратимся к доказательству теоремы.

Перепишем уравнение (4.3) в терминах последовательности Вейерштрасса $\mathbf{W}_{n,s}$. Получаем $w_{j'} = w_j - q$, где $j = g + 1 - \ell$ и $j' = g + 1 - \ell'$. Согласно п. (3) леммы 1.3, имеем $w_g - w_i \notin \mathbf{W}_{n,s}$, и, следовательно, ни для какого $q = w_i \in \mathbf{W}_{n,s}$ условия леммы 4.2 не выполняются. С другой стороны, согласно п. (4) леммы 1.3, для всех $q \notin \mathbf{W}_{n,s}$ условия леммы 4.2 выполнены, и, таким образом, для p_q с такими индексами q имеем $\mathcal{D}(p_q)S_{n,s} \equiv 0$. $\square$

Пусть, как и выше, $\mathbf{W}_{n,s} = \{w_1, \dots, w_g\}$ — некоторая последовательность Вейерштрасса.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.3. Полином $\sigma_{n,s}(z_1, \dots, z_g)$ от g переменных, существующий в силу теоремы 4.1 и задаваемый тождеством

$$\sigma_{n,s}(p_{w_1}, \dots, p_{w_g}) \equiv S_{n,s}, \quad (4.4)$$

назовем *полиномом Шура–Вейерштрасса*.

Полином Шура–Вейерштрасса является однородным в естественной градуировке кольца Λ , в которой $\deg_{\Lambda}(e_r) = \deg_{\Lambda}(p_r) = r$ при $r > 0$ и $\deg_{\Lambda}(e_r) = \deg_{\Lambda}(p_r) = 0$ при $r \leq 0$. В этой градуировке $\deg_{\Lambda}(z_{\ell}) = w_{\ell}$, и вес полинома $\sigma_{n,s}(z_1, \dots, z_g)$, как следует из формулы (4.1) равен сумме элементов разбиения $\pi_{n,s}$. Имеем

$$\begin{aligned} \deg_{\Lambda}(\sigma_{n,s}) &= \sum_{\ell=1}^g \pi_{\ell} = \sum_{k=1}^g (w_k - k + 1) \\ &= -\frac{g(g-1)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{[is/n]} (is - jn) = \frac{(n^2 - 1)(s^2 - 1)}{24}. \end{aligned}$$

ЛЕММА 4.4. *Вес полинома Шура–Вейерштрасса $\sigma_{n,s}(z_1, \dots, z_g)$ равен его степени по переменной z_1 : $\deg_{\Lambda}(\sigma_{n,s}) = \deg_{z_1}(\sigma_{n,s})$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из соотношения (3.1) следует, что $e_r = p_1^r/r! + \dots$. Далее, в силу формулы (4.1) имеем $S_{n,s} = p_1^{\gamma} \det(\chi(w_i - j + 1))_{1 \leq i, j \leq g} + \dots$, где $\gamma = \sum_{i=1}^g \pi_i = \deg_{\Lambda}(\sigma_{n,s})$, а $\chi(n) = 1/n!$ при $n \geq 0$ и $\chi(n) = 0$, когда $n < 0$.

Остается доказать, что определитель $\det(\chi(w_i - j + 1))_{1 \leq i, j \leq g}$ не равен 0. Рассмотрим определитель Вронского $\mathcal{W}_t(t^{w_1}, t^{w_2}, \dots, t^{w_g})$ системы мономов $\{t^{w_1}, t^{w_2}, \dots, t^{w_g}\}$, который, очевидно, невырожден. Прямое вычисление дает

$$t^{(n^2-1)(s^2-1)/24} \det(\chi(w_i - j + 1))_{1 \leq i, j \leq g} = \frac{\mathcal{W}_t(t^{w_1}, \dots, t^{w_g})}{\prod_{i=1}^g w_i!}.$$

Лемма доказана. $\square$

ПРИМЕР 4.5. Приведем явные выражения полиномов Шура–Вейерштрасса для $g = 1, 2, 3, 4$:

для $g = 1$ и 2 имеем соответственно $\sigma_{2,3} = z_1$ и $\sigma_{2,5} = \frac{1}{3}(z_1^3 - z_2)$;

для $g = 3$ имеем $\sigma_{2,7} = \frac{1}{45}(z_1^6 - 5z_1^3 z_2 + 9z_1 z_3 - 5z_2^2)$ и $\sigma_{3,4} = \frac{1}{20}(z_1^5 - 5z_1 z_2^2 + 4z_3)$;

для $g = 4$ имеем $\sigma_{2,9} = \frac{1}{4725}(z_1^{10} - 15z_1^7 z_2 + 63z_1^5 z_3 - 225z_1^3 z_4 + 315z_1^2 z_2 z_3 - 175z_1 z_2^3 + 9(-21z_3^2 + 25z_2 z_4))$ и $\sigma_{3,5} = \frac{1}{448}(z_1^8 - 14z_1^4 z_2^2 + 56z_1^2 z_2 z_3 - 64z_1 z_4 - 7(z_2^2 - 2z_3)(z_2^2 + 2z_3))$.

ТЕОРЕМА 4.6. *Пусть $\iota: \mathbb{C}^g \rightarrow \mathbb{C}^g$, $\xi \mapsto -\xi$, — каноническая инволюция; тогда*

$$\iota(\sigma_{n,s}(\xi)) = \sigma_{n,s}(-\xi) = (-1)^{(n^2-1)(s^2-1)/24} \sigma_{n,s}(\xi).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим инволюции ω и $\hat{\omega}$ на кольце $\Lambda_{\mathbb{Q}}$, которые на мультипликативных образующих задаются формулами

$$\omega(p_r) = (-1)^{r-1} p_r \quad \text{и} \quad \hat{\omega}(p_r) = (-1)^r p_r.$$

Известно, что $\omega(s_{\rho}) = s_{\rho'}$ для любой функции Шура (см. [8, с. 39]). Поскольку $\hat{\omega}(e_r) = (-1)^r e_r$, то, согласно (4.1), имеем $\hat{\omega}(s_{\rho}) = (-1)^{\sum \rho'_i} s_{\rho'}$. Требуемое утверждение следует из того, что инволюция ι представляет собой композицию $\hat{\omega} \cdot \omega$. $\square$

Для произвольной последовательности Вейерштрасса $W_{n,s} = \{w_1, \dots, w_g\}$ и соответствующего полинома Шура–Вейерштрасса $\sigma_{n,s}(z_1, \dots, z_g)$ при некотором фиксированном значении вектора $z = (z_1, \dots, z_g) \in \mathbb{C}^g$ введем следующий полином от $x \in \mathbb{C}$:

$$R_{n,s}(x; z) = \sigma_{n,s}(z_1 + x^{w_1}, \dots, z_g + x^{w_g}).$$

ТЕОРЕМА 4.7. *При заданном $\xi \in \mathbb{C}^g$ полином $R_{n,s}(x; \xi)$ либо не зависит от x , либо имеет не более g корней $\{x_1, \dots, x_q\}$, $q \leq g$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим $\sigma_{n,s}(\xi_1, \dots, \xi_g)$ как функцию в кольце симметрических функций Λ от формальных переменных $x_1, \dots, x_N$ для некоторого достаточно большого числа N (достаточно большим является, например, число $2g - 1$, так как тогда для любого $\xi \in \mathbb{C}^g$ система уравнений $\xi_\ell = \sum_{i=1}^{2g-1} x_i^{w_\ell}$ относительно $x_1, \dots, x_{2g-1}$ разрешима). Обозначим заданную таким образом функцию в базисе e_r через $\mathcal{S}(e_1, e_2, \dots) = \sigma_{n,s}(\xi)$, причем для функции $\mathcal{S}$ имеется выражение (4.1). В таком представлении полином $R_{n,s}(x; \xi)$ — это та же самая функция, вычисленная, однако, на расширенном наборе переменных $x, x_1, \dots, x_N$. Воспользуемся свойством элементарных симметрических полиномов $e_i(x, x_1, x_2, \dots) = xe_{i-1}(x_1, x_2, \dots) + e_i(x_1, x_2, \dots)$, чтобы выразить $R_{n,s}$ через $\mathcal{S}$. Имеем

$$R_{n,s}(x; \xi) = \mathcal{S}(x + e_1, xe_1 + e_2, \dots) = \det(xe_{\pi_i - i + j - 1} + e_{\pi_i - i + j})_{1 \leq i, j \leq g}. \quad (4.5)$$

Определитель в (4.5), является полиномом степени не выше g , откуда следует утверждение теоремы. $\square$

Запишем полином $R_{n,s}(x; \xi)$ в виде

$$R_{n,s}(x; \xi) = \sum_{\ell=0}^g R_\ell(\xi) x^\ell.$$

Между полиномами $R_\ell(\xi)$ имеются соотношения

$$R_r(\xi) = \frac{1}{r} \sum_{q=1}^g w_q \frac{\partial}{\partial \xi_q} R_{r-w_q}(\xi), \quad r = 1, \dots, 3g - 1,$$

где мы полагаем $R_i(\xi) = 0$, если $i < 0$ или $i > g$. Первые g из этих соотношений приводят к выражениям для полиномов $R_r(\xi)$ с $r > 0$ через производные полинома $R_0(\xi) = \sigma_{n,s}(\xi)$, а остальные $2g - 1$ приводят к системе линейных дифференциальных уравнений, решением которой является $\sigma_{n,s}(\xi)$.

Введем специальное обозначение $\hat{\sigma}_{n,s}(\xi)$ для коэффициента $R_g(\xi)$ полинома $R_{n,s}(x; \xi)$. Как следует из разложения

$$\det(xe_{\pi_i - i + j - 1} + e_{\pi_i - i + j}) = x^g \cdot \det(e_{\pi_i - i + j - 1}) + \dots,$$

полином $\hat{\sigma}_{n,s}(\xi)$ соответствует полиному Шура $s_{\hat{\pi}_{n,s}}$, где разбиение $\hat{\pi}_{n,s}$ равно $\{\pi_2, \dots, \pi_g\}$ в том же смысле, в котором полином Шура–Вейерштрасса $\sigma_{n,s}(\xi)$ соответствует полиному Шура $s_{\pi_{n,s}}$. По построению полином $\hat{\sigma}_{n,s}(\xi)$ не зависит от ξ_g . В этом легко убедиться с помощью формулы (3.1) — зависимость от p_{w_g} может возникнуть только через функцию e_{w_g} , которая не входит в выражение для $\hat{\sigma}_{n,s}(\xi)$. Вес $\deg_\Lambda(\hat{\sigma}_{n,s})$ равен $\deg_\Lambda(\sigma_{n,s}) - g$.

Отметим также (см. доказательство теоремы 4.6), что инволюция $\widehat{\omega}$ действует как $\widehat{\omega}(\widehat{\sigma}_{n,s}(\xi)) = (-1)^{\deg_{\Lambda}(\widehat{\sigma}_{n,s})}\widehat{\sigma}_{n,s}(\xi)$, а инволюция ω разлагается в композицию $\omega = \widehat{\omega} \cdot \iota$:

$$\omega(\widehat{\sigma}_{n,s}(\xi)) = (-1)^{\deg_{\Lambda}(\widehat{\sigma}_{n,s})}\widehat{\sigma}_{n,s}(-\xi). \quad (4.6)$$

В целом имеем

$$R_{n,s}(x; -\xi) = (-1)^{(n^2-1)(s^2-1)/24}\omega(R_{n,s}(-x; \xi)). \quad (4.7)$$

ПРИМЕР 4.8. Разберем случай $n = 3$, $s = 4$. Имеем

$$\widehat{\sigma}_{3,4}(z) = \frac{1}{2}(z_1^2 - z_2), \quad R_{3,4}(x; z) = \widehat{\sigma}_{3,4}(z)(x^3 + z_1x^2 + \frac{1}{2}(z_1^2 + z_2)x) + \sigma_{3,4}(z).$$

На двумерном подпространстве $(\widehat{\sigma})$ в $\mathbb{C}^3$, заданном параметризацией $z(\eta, \xi) = (\eta, \eta^2, \xi)$, полином $\widehat{\sigma}_{3,4}$ тождественно равен 0, а полином $R_{3,4}$ не зависит от x :

$$R_{3,4}(x; \eta, \eta^2, \xi) = \frac{1}{5}(\xi - \eta^5);$$

и, наконец, на одномерном подпространстве $(\widehat{\sigma})_{\text{sing}} \subset (\widehat{\sigma}) \subset \mathbb{C}^3$, заданном уравнением $z(\eta) = (\eta, \eta^2, \eta^5)$, полином $R_{3,4}(x; z(\eta))$ тождественно равен 0. Таким образом на множестве $\mathbb{C}^3 \setminus (\widehat{\sigma})$ полином $R_{3,4}(x; z(\eta))$ невырожден и имеет три корня.

§ 5. Рациональный аналог отображения Абеля и решение задачи его обращения

Рассмотрим градуированное кольцо полиномов $\mathbb{C}[X, Y]$, где $\deg(X) = n$ и $\deg(Y) = s$. Будем называть полином вида

$$f(X, Y; \lambda_0, \lambda_n, \dots, \lambda_{in+j_s}, \dots) = Y^n - X^s - \sum_{\substack{0 \leq \alpha < s-1 \\ 0 \leq \beta < n-1}} \lambda_{\alpha n + \beta s} X^\alpha Y^\beta \quad (5.1)$$

(n, s) -полиномом, если $\deg(f(X, Y; \lambda)) \leq ns$. В случае когда $0 \leq r < ns$, представление числа r в виде $\alpha n + \beta s$ однозначно. Поэтому (n, s) -полином зависит от набора $\lambda = \{\lambda_{\alpha n + \beta s}\}$, $0 \leq \alpha < s-1$, $0 \leq \beta < n-1$, $\alpha n + \beta s < ns$, состоящего из $d_{n,s} = ns - g - ([s/n] + 1) - 1 = (n+1)(s+1)/2 - [s/n] - 3$ параметров, которые мы будем называть *модулями*. В общем случае можно считать, что эти параметры принадлежат некоторому градуированному кольцу, и если положить $\deg(\lambda_r) = ns - r$, то (n, s) -полином $f(X, Y; \lambda)$ становится однородным полиномом от X , Y и λ веса ns .

В случае когда λ — набор комплексных чисел, (n, s) -полином, такой, что

$$\Delta_X(\Delta_Y(f(X, Y; \lambda))) \neq 0,$$

где Δ_t обозначает дискриминант по переменной t , будем называть *невырожденным*.

Если $f(X, Y; \lambda)$ — невырожденный (n, s) -полином, то алгебраическое многообразие

$$V(X, Y) = \{(X, Y) \in \mathbb{C}^2 : f(X, Y; \lambda) = 0\} \quad (5.2)$$

в $\mathbb{C}^2$ представляет собой неособую аффинную модель плоской алгебраической кривой V рода g без кратных точек, реализующую n -листное накрытие над $\mathbb{C}$.

На r -й симметрической степени римановой поверхности кривой V определено отображение Абеля $\mathcal{A}: (V)^r \rightarrow \text{Jac}(V)$, где через $\text{Jac}(V)$ обозначено многообразие Якоби кривой V . Это отображение задается при помощи голоморфных интегралов

$$u_i = (-\alpha_i n + \beta_i s) \sum_{k=1}^r \int_{(X_k, Y_k)}^{\infty} X^{\alpha_i-1} Y^{n-\beta_i-1} \frac{dX}{f_Y}, \quad i = 1, \dots, g, \quad (5.3)$$

где $f_Y = \partial f(X, Y; \lambda) / \partial Y$ и пара целых чисел α_i и β_i представляет i -й элемент $-\alpha_i n + \beta_i s = w_i$ последовательности Вейерштрасса $\mathbf{W}_{n,s}$.

Введем пространство $\mathcal{L}_{n,s}$ всех невырожденных (n, s) -полиномов. Это пространство является подпространством в $\mathbb{C}^{d_{n,s}}$ и представляет собой дополнение к алгебраическому многообразию, образованному точками $\lambda \in \mathbb{C}^{d_{n,s}}$, такими, что $\Delta_X(\Delta_Y(f(X, Y; \lambda))) = 0$.

На пространстве $\mathcal{L}_{n,s}$ действует группа ненулевых комплексных чисел $\mathbb{C}^*$ преобразованиями (действие определяется градуировкой) $\tau(\lambda) = \{\lambda_k(\tau)\} = \{\tau^{n s - k} \lambda_k\}$, где $\tau \in \mathbb{C}^*$. Используя это действие, определим рациональную кривую

$$V_0 = \lim_{\tau \rightarrow 0} \left\{ (X, Y) \in \mathbb{C}^2 : \lim_{\tau \rightarrow 0} f(X, Y; \tau(\lambda)) = Y^n - X^s = 0 \right\}$$

как канонический предел любой невырожденной кривой, ассоциированной с (n, s) -полиномом $f(X, Y; \lambda)$ с набором параметров $\lambda \in \mathcal{L}_{n,s}$.

В каноническом пределе отображение Абеля (5.3) переходит в предельное отображение $\mathcal{A}_0$. Введем параметризацию $\mathbb{C} \rightarrow V_0$, $t \mapsto (t^{-n}, t^{-s})$. Отображение $\mathcal{A}_0$ в такой параметризации сводится к интегралам вида

$$\begin{aligned} & \int_0^\xi X(t)^{\alpha_i-1} Y(t)^{n-\beta_i-1} X'(t) \frac{dt}{nY(t)^{n-1}} \\ &= - \int_0^\xi t^{-(\alpha_i-1)n-s(n-\beta_i-1)-(n+1)+(n-1)s} dt = - \int_0^\xi t^{w_i-1} dt = - \frac{1}{w_i} \xi^{w_i}. \end{aligned}$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.1. Для последовательности Вейерштрасса $\mathbf{W}_{n,s} = \{w_1, \dots, w_g\}$ определим отображение $A_{n,s}: (\mathbb{C})^r \rightarrow \mathbb{C}^g$, *рациональный аналог отображения Абеля*, по формуле

$$A_{n,s}(x_1, \dots, x_r) = \left(\sum_{j=1}^r x_j^{w_1}, \dots, \sum_{j=1}^r x_j^{w_g} \right).$$

Для отображения $A_{n,s}$ имеет место следующий аналог теоремы Абеля.

ТЕОРЕМА 5.2. Пусть $\{x_1, \dots, x_N\} \in (\mathbb{C})^N$, где $N \geq g$, — такой набор, что $x_i \neq x_j$ для всех $1 \leq i \neq j \leq N$ и $\hat{\sigma}_{n,s}(A_{n,s}(x_1, \dots, x_N)) \neq 0$. Тогда существует такой набор $\{t_1, \dots, t_g\} \in (\mathbb{C})^g$, что

$$A_{n,s}(x_1, \dots, x_N) + A_{n,s}(t_1, \dots, t_g) = 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathbf{Q}_N = \{q_0, \dots, q_N\}$ — дополнение последовательности Вейерштрасса $\mathbf{W}_{n,s} = \{w_1, \dots, w_g\}$ в множестве $\{0, 1, 2, \dots, N+g\}$.

Обозначим через $\mathbf{b}(x)$ вектор-столбец вида $((x^{N+g-q_j})_{j=0,\dots,N})^T$. Рассмотрим полином

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= \det(\mathbf{b}(x), \mathbf{b}(x_1), \mathbf{b}(x_2), \dots, \mathbf{b}(x_N)) \\ &= \varphi_0 x^{N+g} + \varphi_1 x^{N+g-1} + \dots + \varphi_{N+g-1} x + \varphi_{N+g},\end{aligned}\quad (5.4)$$

в котором по построению коэффициенты φ_{w_i} равны 0 для всех $i = 1, \dots, g$.

Покажем сначала, что φ_0 не равно 0. Для $j < 1$ положим $w_j = 0$, а для $j > g$ положим $\pi_j = 0$; тогда $N + g - q_i = N + g - (2g - 1 - w_{g-i}) = N + \pi_{i+1} - i$ для всех $i = 0, \dots, N + g$. Имеем $\varphi_0 = |x_j^{\pi_{i+1} + N - i}|_{i,j=1,\dots,N}$. Отсюда, используя прямое определение полиномов Шура [8, с. 37], получаем

$$\varphi_0 = \widehat{\sigma}_{n,s}(A_{n,s}(x_1, \dots, x_N)) \prod_{1 \leq i < j \leq N} (x_i - x_j),$$

и, следовательно, в условиях теоремы $\varphi_0 \neq 0$.

Таким образом уравнение $\varphi(x) = 0$ имеет $N + g$ корней, из которых N — это набор $\{x_1, \dots, x_N\}$; остальные g корней обозначим через $\{t_1, \dots, t_g\}$.

Полином

$$\widehat{E}(x) = \frac{x^{N+g}}{\varphi_0} \varphi\left(-\frac{1}{x}\right) = 1 + \sum_{i \geq 1} (-x)^i \frac{\varphi_i}{\varphi_0}$$

является производящей функцией элементарных симметрических функций величин $\{x_1, \dots, x_N, t_1, \dots, t_g\}$. Рассмотрим производящую функцию степенных сумм этих величин

$$\widehat{P}(-x) = \frac{\widehat{E}'(x)}{\widehat{E}(x)} = \sum_{i \geq 1} (-x)^{i-1} \psi_i.$$

Покажем, что коэффициенты ψ_{w_i} равны 0 для всех $i = 1, \dots, g$. Действительно, как известно, имеется следующее выражение для ψ_k через $\{\varphi_0, \dots, \varphi_k\}$ (см. [8]):

$$\psi_k = \frac{1}{k\varphi_0^k} \begin{vmatrix} \varphi_1 & \varphi_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 2\varphi_2 & \varphi_1 & \varphi_0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ (k-1)\varphi_{k-1} & \varphi_{k-2} & \dots & \dots & \varphi_0 & \\ k\varphi_k & \varphi_{k-1} & \dots & \dots & \varphi_1 & \end{vmatrix},$$

откуда следует, что ψ_{w_i} представляет собой сумму с рациональными коэффициентами произведений вида

$$\frac{\varphi_{\rho_1}}{\varphi_0} \cdot \frac{\varphi_{\rho_2}}{\varphi_0} \dots \frac{\varphi_{\rho_\ell}}{\varphi_0},$$

таких, что $\rho_1 + \rho_2 + \dots + \rho_\ell = w_i$.

ЛЕММА 5.3. Пусть $w \in \mathbf{W}_{n,s}$; тогда каждое разбиение $\boldsymbol{\rho} = \{\rho_1, \dots, \rho_\ell\}$ числа w содержит хотя бы один элемент последовательности $\mathbf{W}_{n,s}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Этот факт следует из того, что дополнение к последовательности Вейерштрасса в множестве натуральных чисел представляет собой полугруппу. $\square$

Согласно лемме, поскольку $\varphi_{w_1} = \varphi_{w_2} = \dots = \varphi_{w_i} = 0$, получаем $\psi_{w_i} = 0$, т.е.

$$\sum_{j=1}^N x_j^{w_i} + \sum_{k=1}^g t_k^{w_i} = 0, \quad i = 1, \dots, g. \quad \square$$

Покажем, что требование $x_i \neq x_j$ в условии теоремы 5.2 не является ограничительным.

ЛЕММА 5.4. Пусть $\mathcal{K}^N$ — подпространство векторов в $\mathbb{C}^N$, у которых нет совпадающих координат. Рассмотрим композицию $\mathcal{K}^N \xrightarrow{\iota} \mathbb{C}^N \xrightarrow{\mathcal{N}} \mathbb{C}^N \xrightarrow{\gamma_\ell} \mathbb{C}^{N-1}$, где ι — вложение, $\mathcal{N}(x_1, \dots, x_N) = (z_1, \dots, z_N)$, $z_k = \sum_{q=1}^N x_q^k$, и $\gamma_\ell(z_1, \dots, z_N) = (z_1, \dots, z_{\ell-1}, z_{\ell+1}, \dots, z_N)$. Композиция $\gamma_\ell \circ \mathcal{N} \circ \iota$ является отображением «на» тогда и только тогда, когда $N = 0$ или $1 \pmod{\ell}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прообразом точки $\xi \in \mathbb{C}^{N-1}$ при отображении $\gamma_\ell \circ \mathcal{N}$ является множество корней полиномов (см., например, [4])

$$P(t) = \begin{vmatrix} \xi_1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \xi_2 & \xi_1 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ z_\ell & \xi_{\ell-1} & \xi_{\ell-2} & \dots & 0 & 0 \\ \xi_{\ell+1} & z_\ell & \xi_{\ell-1} & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \xi_N & \xi_{N-1} & \xi_{N-2} & \dots & \xi_1 & N \\ t^N & t^{N-1} & t^{N-2} & \dots & t & 1 \end{vmatrix}$$

при всевозможных значениях $z_\ell \in \mathbb{C}$. Если $N \neq 0$ или $1 \pmod{\ell}$, то любая точка из прообраза точки $\mathbf{0} \in \mathbb{C}^{N-1}$ содержит совпадающие координаты. Если же $N = 0$ или $1 \pmod{\ell}$, то дискриминант полинома $P(t)$ является полиномом от z_ℓ степени $N(N-1)/\ell$ для любого значения $\xi \in \mathbb{C}^{N-1}$, т.е. обращается в 0 лишь для $N(N-1)/\ell$ частных значений z_ℓ . $\square$

Рассмотрим якобиан отображения $A_{n,s}: (\mathbb{C})^g \rightarrow \mathbb{C}^g$:

$$\frac{\partial(z_1, \dots, z_g)}{\partial(t_1, \dots, t_g)} = \prod_{k=1}^g w_k \cdot |t_j^{w_i-1}|_{1 \leq i, j \leq g} = \prod_{k=1}^g w_k \cdot |t_j^{(\pi_\ell-1)-\ell+g}|_{1 \leq \ell, j \leq g}.$$

Из непосредственного определения полиномов Шура [8, с. 37] следует, что

$$|t_j^{(\pi_\ell-1)-\ell+g}|_{1 \leq \ell, j \leq g} = \omega(\widehat{\sigma}_{n,s}(A_{n,s}(t_1, \dots, t_g))) \prod_{1 \leq k < \ell \leq g} (t_k - t_\ell),$$

откуда, используя формулу (4.6), получаем для якобиана следующее выражение:

$$\frac{\partial(z_1, \dots, z_g)}{\partial(t_1, \dots, t_g)} = (-1)^{\frac{(n^2-1)(s^2-1)}{24}-g} \prod_{j=1}^g w_j \cdot \widehat{\sigma}_{n,s}(-A_{n,s}(t_1, \dots, t_g)) \prod_{1 \leq k < \ell \leq g} (t_k - t_\ell).$$

Покажем, что полином Шура–Вейерштрасса вида

$$\sigma_{n,s}(A_{n,s}(x) - \xi) = R_{n,s}(x; -\xi)$$

приводит к решению задачи обращения отображения $A_{n,s}$. Положим $(\widehat{\sigma}_{n,s}) = \{\xi \in \mathbb{C}^g : \widehat{\sigma}_{n,s}(-\xi) = 0\}$ и введем отображение $B_{n,s}: \mathbb{C}^g \setminus (\widehat{\sigma}_{n,s}) \rightarrow (\mathbb{C})^g$, сопоставляющее вектору $z \in \mathbb{C}^g \setminus (\widehat{\sigma}_{n,s})$ набор корней $\{x_1, \dots, x_g\}$ полинома $R_{n,s}(x; -z)$.

ТЕОРЕМА 5.5. *Отображение $B_{n,s}$ решает задачу обращения отображения $A_{n,s}$, т. е. $A_{n,s}(B_{n,s}(\xi)) = \xi$ для всех $\xi \in \mathbb{C}^g \setminus (\widehat{\sigma}_{n,s})$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Представление (4.5) полинома $R_{n,s}(x; \xi)$ приводится к следующему виду:

$$R_{n,s}(x; \xi) = \begin{vmatrix} e_{w_1} & e_{w_2} & \dots & e_{w_g} & (-x)^g \\ e_{w_1-1} & e_{w_2-1} & \dots & e_{w_g-1} & (-x)^{g-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ e_{w_1+1-g} & e_{w_2+1-g} & \dots & e_{w_g+1-g} & -x \\ e_{w_1-g} & e_{w_2-g} & \dots & e_{w_g-g} & 1 \end{vmatrix};$$

отсюда, применяя преобразование (4.7), получаем

$$R_{n,s}(x; -\xi) = (-1)^{(n^2-1)(s^2-1)/24} \begin{vmatrix} h_{w_1} & h_{w_2} & \dots & h_{w_g} & x^g \\ h_{w_1-1} & h_{w_2-1} & \dots & h_{w_g-1} & x^{g-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ h_{w_1+1-g} & h_{w_2+1-g} & \dots & h_{w_g+1-g} & x \\ h_{w_1-g} & h_{w_2-g} & \dots & h_{w_g-g} & 1 \end{vmatrix}.$$

Функции h_k — полные симметрические функции [8], являющиеся образами элементарных симметрических функций e_k под действием инволюции ω и удовлетворяющие соотношениям $\sum_{j=0}^k (-1)^j e_j h_{k-j} = 0$ для любого $k > 0$. Заметим, что $2g - 2 = w_g - w_1 \notin W_{n,s}$. Согласно лемме 5.4, в случае $N = 2g - 1$ и $\ell = 2g - 2$ мы можем воспользоваться результатом теоремы 5.2. Отсюда вытекает, что достаточно ограничиться рассмотрением случая $\xi = A_{n,s}(t_1, \dots, t_g)$, т. е. можно считать, что $e_q = 0$ при $q > g$. Таким образом, $\sum_{j=0}^g (-1)^j e_j h_{w_i-j} = 0$, $i = 1, \dots, g$, и, следовательно,

$$R_{n,s}(x; -\xi) = \widehat{\sigma}(-\xi) \sum_{j=0}^g (-1)^j e_j x^j = \widehat{\sigma}(-\xi) \prod_{i=1}^g (x - t_i). \quad (5.5)$$

Теорема доказана. □

Из формулы (5.5) непосредственно вытекает

СЛЕДСТВИЕ 5.6. *Для произвольной точки $\{x_1, \dots, x_g\}$ пространства $(\mathbb{C})^g$ либо $\widehat{\sigma}_{n,s}(-A_{n,s}(x_1, \dots, x_g)) = 0$, либо $B_{n,s}(-A_{n,s}(x_1, \dots, x_g)) = \{x_1, \dots, x_g\}$.*

§6. Аналог теоремы Римана об обращении в нуль для полиномов

Пусть дан полином от g переменных $P(\xi_1, \dots, \xi_g)$. Для каждого $z \in \mathbb{C}^g$ поставим ему в соответствие при помощи некоторой последовательности Вейерштрасса $W_{n,s}$ длины g полином от x вида

$$R_P(x, z) = P(z_1 - x^{w_1}, \dots, z_g - x^{w_g}) = P(z - A_{n,s}(x)).$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6.1. Скажем, что полином $P(\xi_1, \dots, \xi_g)$ удовлетворяет (n, s) -аналогу теоремы Римана об обращении в нуль для полиномов, если полином $R_P(x, z)$ при $z = A_{n,s}(x_1, \dots, x_g)$ имеет в точности g корней $\{t_1, \dots, t_g\} = \{x_1, \dots, x_g\}$ либо тождественно равен 0.

Согласно следствию 5.6, введенный выше полином Шура–Вейерштрасса $\sigma_{n,s}$ удовлетворяет (n, s) -аналогу теоремы Римана об обращении в нуль для полиномов.

ТЕОРЕМА 6.2. Если полином P удовлетворяет (n, s) -аналогу теоремы Римана об обращении в нуль для полиномов, то он с точностью до постоянного множителя равен полиному Шура–Вейерштрасса $\sigma_{n,s}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применяя теорему 5.5, получаем, что для любого $z \in \mathbb{C}^g \setminus (\hat{\sigma}_{n,s})$ полином $R_P(x, z)$ либо имеет в точности g корней, совпадающих с корнями полинома $R_{n,s}(x, -z)$, либо тождественно равен 0. Таким образом, на открытом всюду плотном подмножестве в $\mathbb{C}^g$ имеет место соотношение

$$P(z)R_{n,s}(x, -z) = R_P(x, z)\sigma_{n,s}(-z),$$

и, следовательно, это соотношение выполняется для всех $z \in \mathbb{C}^g$ и $x \in \mathbb{C}$. Пользуясь четностью полинома $\sigma_{n,s}$, перепишем это соотношение в виде

$$P(z)\sigma_{n,s}(z - A_{n,s}(x)) = P(z - A_{n,s}(x))\sigma_{n,s}(z).$$

Из последнего выражения, применяя индукцию по q для $\xi = \sum_{k=1}^q A_{n,s}(x_k)$, получаем соотношение

$$P(z)\sigma_{n,s}(z - \xi) = P(z - \xi)\sigma_{n,s}(z),$$

из которого очевидным образом вытекает утверждение теоремы. $\square$

Утверждение теоремы 6.2 имеет важное приложение в теории абелевых функций на многообразиях Якоби кривых вида (5.2), ассоциированных с невырожденными (n, s) -полиномами.

В последнее время мы развили подход в теории абелевых функций, обобщающий на высшие роды теорию эллиптических функций Вейерштрасса. Общая конструкция σ -функций на якобианах изложена в работе авторов [2]. В нашей работе [3] показано, что функция $\sigma(\mathbf{u}; \boldsymbol{\lambda})$, ассоциированная с невырожденной кривой вида (5.2), является целой функцией, которая в окрестности точки $\mathbf{0} \in \text{Jac}(V)$ обладает разложением

$$\sigma(\mathbf{u}; \boldsymbol{\lambda}) = S(\mathbf{u}) + O(\boldsymbol{\lambda}),$$

где $S(\mathbf{u})$ — некоторый полином от $u_1, \dots, u_g$ веса $(n^2 - 1)(s^2 - 1)/24$ и $O(\boldsymbol{\lambda})$ обозначает остальную часть ряда, в которую постоянные λ_r входят как множители в положительных степенях.

Функция $\sigma(\mathbf{u}; \boldsymbol{\lambda})$ удовлетворяет теореме Римана об обращении в нуль в следующей формулировке. Пусть $(X, Y) \in V$ и z — некоторая точка в $\text{Jac}(V)$; с помощью отображения Абеля (5.3) зададим функцию

$$\mathcal{R}((X, Y); z) = \sigma(\mathcal{A}(X, Y) - z; \boldsymbol{\lambda}).$$

Тогда $\mathcal{R}((X, Y); z)$ либо тождественно равна 0, либо имеет в точности g корней $\{(X_i, Y_i)\}_{i=1, \dots, g} \in (V)^g$, таких, что $\mathcal{A}((X_1, Y_1), \dots, (X_g, Y_g)) = z$.

Для любого набора параметров $\boldsymbol{\lambda} \in \mathcal{L}_{n,s}$ введенный выше канонический предел приводит к функции $\sigma(\mathbf{u}; \mathbf{0}) = S(\mathbf{u})$. Учитывая, что в этом пределе

отображение Абеля $\mathcal{A}$ переходит в рациональное отображение $A_{n,s}$, получаем следующий результат.

ТЕОРЕМА 6.3. *Канонический предел σ -функции Клейна $\sigma(\mathbf{u}; \mathbf{0})$ с точностью до постоянного множителя равен полиному Шура–Вейерштрасса $\sigma_{n,s}(\mathbf{u})$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим полином $\sigma(\mathcal{A}_0(X, Y) - \mathbf{z}; \mathbf{0})$ при некотором значении $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^g$. Имеем $\sigma(\mathcal{A}_0(X, Y) - \mathbf{z}; \mathbf{0}) = S(A_{n,s}(x) - \mathbf{z})$, где мы использовали параметризацию $(X = x^{-n}, Y = x^{-s})$. Последнее выражение показывает, что полином $\sigma(\mathbf{z}; \mathbf{0})$ удовлетворяет (n, s) -аналогу теоремы Римана об обращении в нуль для полиномов. $\square$

Обратим внимание, что в каноническом пределе функция $\mathcal{R}((X, Y); \mathbf{z})$ либо не зависит от параметра x , либо является полином по x , имеющим не более g корней.

ЛИТЕРАТУРА

1. Adler M., Moser J. On a class of polynomials connected with the Korteweg–de Vries equation. *Comm. Math. Phys.*, **61**, 1–30 (1978).
2. Buchstaber V. M., Enolskii V. Z., Leykin D. V. Kleinian functions, hyperelliptic Jacobians and applications. In: *Reviews in Mathematics and Mathematical Physics* (S. P. Novikov, I. M. Krichever, eds.), vol. 10, no. 2, Gordon & Breach, London, 1997, pp. 1–125.
3. Бухстабер В. М., Лейкин Д. В., Энольский В. З. σ -функции (n, s) -кривых. *УМН*, **54**, вып. 3 (1999).
4. Buchstaber V. M., Rees E. G. Multivalued groups, n -Hopf algebras and n -ring homomorphisms. In: *Lie groups and Lie algebras*, Kluwer, 1998, pp. 85–107.
5. Duistermaat J. J., Gruenbaum F. A. Differential equations in spectral parameter. *Commun. Math. Phys.*, **103**, 177–204 (1986).
6. Кац В. Г. Бесконечномерные алгебры Ли. Мир, М., 1993.
7. Кричевер И. М. О рациональных решениях уравнений Захарова–Шабата в вполне интегрируемых системах N частиц на прямой. *Зап. науч. сем. ЛОМИ*, **84**, вып. 1, 117–130 (1979).
8. Макдональд И. Симметрические функции и полиномы Холла. Мир, М., 1985.
9. Мамфорд Д. Лекции о тета-функциях. Мир, М., 1988.
10. Поля Г., Сеге Г. Задачи и теоремы из анализа. Т. 2, Наука, М., 1978.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
e-mail: buchstab@nw.math.msu.su

Институт магнетизма НАНУ, Киев
e-mail: dile@imag.kiev.ua

Институт магнетизма НАНУ, Киев
e-mail: vze@imag.kiev.ua

Поступило в редакцию
28 декабря 1998 г.