Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. М. Гусейн-Заде, И. Луенго, А. Мелье-Эрнандез, Дзета-функции ростков мероморфных функций и диаграмма Ньютона, *Функц. анализ и его прил.*, 1998, том 32, выпуск 2, 26–35

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa349>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.227.88.159

26 апреля 2023 г., 15:42:00

Дзета-функции ростков мероморфных функций и диаграмма Ньютона*

© 1998. С. М. Гусейн-Заде, И. Луенго, А. Мелье-Эрнандес

§1. Ростки мероморфных функций

Многочлен f степени d от $n + 1$ комплексных переменных определяет мероморфную функцию f на проективном пространстве $\mathbb{CP}^{n+1}$. Чтобы понять поведение мероморфной функции f на бесконечности, естественно рассмотреть ее ростки в точках бесконечно удаленной гиперплоскости $\mathbb{CP}_\infty^n \subset \mathbb{CP}^{n+1}$. В локальной аналитической системе координат $z_0, z_1, \dots, z_n$ с началом в точке $p \in \mathbb{CP}_\infty^n$ и такой, что бесконечно удаленная гиперплоскость $\mathbb{CP}_\infty^n$ задается уравнением $\{z_0 = 0\}$, росток функции f имеет вид $f = P(z_0, \dots, z_n)/z_0^d$. Рассмотрим ростки мероморфных функций общего вида.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. *Росток мероморфной функции на $(\mathbb{C}^{n+1}, 0)$ — это дробь $f = P/Q$, где P и Q — ростки голоморфных функций $(\mathbb{C}^{n+1}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$. Два ростка мероморфных функций $f = P/Q$ и $f' = P'/Q'$ равны, если существует такой росток голоморфной функции $U: (\mathbb{C}^{n+1}, 0) \rightarrow \mathbb{C}$, что $U(0) \neq 0$, $P' = U \cdot P$ и $Q' = U \cdot Q$.*

ЗАМЕЧАНИЯ. 1. Для удобства мы не рассматриваем здесь функции вида $1/Q(z)$ или $P(z)/1$.

2. В соответствии с определением $x/y \neq x^2/xy$, но $x/y = x \exp(x)/y \exp(x)$.

Недавно В. И. Арнольдом была дана классификация простых ростков мероморфных функций для некоторых отношений эквивалентности [2].

В дальнейшем мы будем систематически использовать разрешения ростков мероморфных функций.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. *Разрешением ростка f называется модификация пространства $(\mathbb{C}^{n+1}, 0)$ (т. е. собственное аналитическое отображение $\pi: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{U}$ неособого аналитического многообразия $\mathcal{X}$ на окрестность $\mathcal{U}$ начала координат в $\mathbb{C}^{n+1}$, которое является изоморфизмом вне собственного аналитического подпространства в $\mathcal{U}$), такая, что полный прообраз $\pi^{-1}(H)$ гиперповерхности $H = \{P=0\} \cup \{Q=0\}$ является дивизором с нормальными пересечениями в любой точке многообразия $\mathcal{X}$.*

Тот факт, что $\pi^{-1}(H)$ является дивизором с нормальными пересечениями, означает, что в окрестности любой его точки существует такая локаль-

* Работа первого автора частично поддержана грантом РФФИ № 98-01-00612 и грантом INTAS-4373; работа последних двух авторов частично поддержана грантом SAICYT PB94-291.

ная система координат $y_0, y_1, \dots, y_n$, что поднятия $\tilde{P} = P \circ \pi$ и $\tilde{Q} = Q \circ \pi$ функций P и Q на пространство $\mathcal{X}$ разрешения равны $uy_0^{k_0}y_1^{k_1} \cdot \dots \cdot y_n^{k_n}$ и $vy_0^{l_0}y_1^{l_1} \cdot \dots \cdot y_n^{l_n}$ соответственно, где $u(0) \neq 0$ и $v(0) \neq 0$, k_i и l_i неотрицательны.

Пусть B_ε — замкнутый шар радиуса ε с центром в начале координат в $\mathbb{C}^{n+1}$, где ε достаточно мало, так что представители ростков функций P и Q определены в B_ε и для любого положительного $\varepsilon' < \varepsilon$ сфера $S_{\varepsilon'} = \partial B_{\varepsilon'}$ пересекает аналитические пространства $\{P=0\}$, $\{Q=0\}$ и $\{P=Q=0\}$ трансверсально (в стратифицированном смысле). Выберем достаточно маленькое $\delta > 0$ и рассмотрим шар $B_\delta \subset \mathbb{C}^2$ радиуса δ с центром в начале координат.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. 0-слоем Милнора ростка f называется множество

$$\mathcal{M}_f^0 = \{z \in B_\varepsilon : (P(z), Q(z)) \in B_\delta \subset \mathbb{C}^2, f(z) = P(z)/Q(z) = c\}$$

для ненулевого $c \in \mathbb{C}$ с достаточно малым модулем $\|c\|$. Точно так же ∞ -слоем Милнора ростка f называется множество

$$\mathcal{M}_f^\infty = \{z \in B_\varepsilon : (P(z), Q(z)) \in B_\delta \subset \mathbb{C}^2, f(z) = P(z)/Q(z) = c\}$$

для $c \in \mathbb{C}$ с достаточно большим модулем $\|c\|$.

ЛЕММА 1. Понятие 0- (соответственно ∞ -)слоя Милнора корректно определено, т. е. для достаточно малого $\|c\|$, $0 < \|c\| \ll \delta \ll \varepsilon$ (соответственно для достаточно большого $\|c\|$, $\|c\|^{-1} \ll \delta \ll \varepsilon$), дифференцируемый тип многообразия $\mathcal{M}_f^0$ (соответственно многообразия $\mathcal{M}_f^\infty$) не зависит от ε , δ и c .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\pi: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{U}$ — разрешение ростка f , которое является изоморфизмом вне гиперповерхности $H = \{P=0\} \cup \{Q=0\}$, $r: \mathbb{C}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ — функция $r(z) = \|z\|^2$ и $\tilde{r} = r \circ \pi: \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ — поднятие функции r на пространство разрешения $\mathcal{X}$. Для достаточно малого $\varepsilon > 0$ гиперповерхность $\tilde{S}_\varepsilon = \{\tilde{r} = \varepsilon^2\}$ (прообраз сферы $S_\varepsilon \subset \mathbb{C}^{n+1}$) трансверсальна ко всем стратам полного прообраза $\pi^{-1}(H)$ гиперповерхности H . В каждой точке из $\pi^{-1}(H)$ в локальной системе координат имеют место равенства $P \circ \pi = uy_0^{k_0} \cdot \dots \cdot y_n^{k_n}$, $Q \circ \pi = vy_0^{l_0} \cdot \dots \cdot y_n^{l_n}$ с $u(0) \neq 0$, $v(0) \neq 0$. Таким образом, $f \circ \pi = wy_0^{m_0} \cdot \dots \cdot y_n^{m_n}$ с $w(0) \neq 0$. Вещественная гиперповерхность $\tilde{S}_\varepsilon$ трансверсальна ко всем координатным подпространствам (различных размерностей). Нетрудно показать, что отсюда вытекает трансверсальность гиперповерхности $\tilde{S}_\varepsilon$ к (комплексным) гиперповерхностям $\{wy_0^{m_0} \cdot \dots \cdot y_n^{m_n} = c\}$ для достаточно малого $\|c\| \neq 0$ и для достаточно большого $\|c\|$. Теперь доказательство следует из стандартных аргументов.

ЗАМЕЧАНИЯ. 1. Определение означает, что $\mathcal{M}_f^0$ или $\mathcal{M}_f^\infty$ равно

$$\{z \in B_\varepsilon : (P(z), Q(z)) \in B_\delta \subset \mathbb{C}^2, P(z) = cQ(z), P(z) \neq 0\}$$

и поэтому слои Милнора функций P/Q и $RP/(RQ)$ с $R(0) = 0$, вообще говоря, различны.

2. Для $f = P/Q$ пусть $f^{-1} = Q/P$. Нетрудно понять, что $\mathcal{M}_{f^{-1}}^0 = \mathcal{M}_f^\infty$, а

$\mathcal{M}_{f-1}^\infty = \mathcal{M}_f^0$. Точно такими же свойствами обладают преобразования монодромии и их дзета-функции, рассматриваемые ниже.

3. Можно (а иногда и более удобно) определять слои Милнора следующим образом:

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_f^0 &= \{z \in B_\varepsilon : \|Q(z)\| \leq \delta, P(z) = cQ(z) \neq 0\}, & 0 < \|c\| \leq \delta \ll \varepsilon, \\ \mathcal{M}_f^\infty &= \{z \in B_\varepsilon : \|P(z)\| \leq \delta, P(z) = cQ(z) \neq 0\}, & \|c\|^{-1} \leq \delta \ll \varepsilon.\end{aligned}$$

Мероморфная функция f определяет отображение из $B_\varepsilon \setminus \{P=Q=0\}$ в проективную прямую $\mathbb{CP}^1$ ($z \mapsto (P(z) : Q(z))$), которое также будет обозначаться через f . Из леммы 1 вытекает, что это отображение является локально тривиальным расслоением над проколотыми окрестностями точек $0 = (0 : 1)$ и $\infty = (1 : 0)$ проективной прямой $\mathbb{CP}^1$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. *0-преобразованием монодромии h_f^0 (соответственно ∞ -преобразованием монодромии h_f^∞) ростка f называется преобразование монодромии расслоения f над петлей $c \cdot \exp(2\pi it)$, $t \in [0, 1]$, с достаточно малым (соответственно с достаточно большим) $\|c\| \neq 0$.*

0- или ∞ -оператором монодромии называется действие соответствующего преобразования монодромии в группе гомологий слоя Милнора. Мы хотим применить результаты для мероморфных функций к задаче вычисления дзета-функции многочлена на бесконечности. Поэтому мы будем рассматривать дзета-функции $\zeta_f^0(t)$ и $\zeta_f^\infty(t)$ соответствующих преобразований монодромии:

$$\zeta_f^\bullet = \prod_{q \geq 0} \{\det[\text{id} - th_{f*}^\bullet|_{H_q(\mathcal{M}_f^\bullet; \mathbb{C})}]\}^{(-1)^q}$$

($\bullet = 0$ или ∞). Это определение совпадает с используемым в [3, 5] и отличается знаком в показателе степени от используемого в [1].

§2. Разрешение особенностей и формула А'Кампо для ростков мероморфных функций

Пусть $f = P/Q$ — росток мероморфной функции на $(\mathbb{C}^{n+1}, 0)$, и пусть $\pi: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{U}$ — разрешение ростка f . Прообраз $\mathcal{D} = \pi^{-1}(0)$ начала координат в $\mathbb{C}^{n+1}$ является дивизором с нормальными пересечениями. Обозначим через $S_{k,l}$ множество точек дивизора $\mathcal{D}$, в окрестности которых в некоторых локальных координатах поднятия $P \circ \pi$ и $Q \circ \pi$ функций P и Q имеют вид uy_0^k и vy_0^l соответственно ($u(0) \neq 0$, $v(0) \neq 0$). Небольшая модификация рассуждений А'Кампо [1] позволяет получить следующий вариант его формулы для дзета-функций монодромии мероморфной функции.

ТЕОРЕМА 1. *Предположим, что разрешение $\pi: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{U}$ является изоморфизмом вне гиперповерхности $H = \{P=0\} \cup \{Q=0\}$. Тогда*

$$\zeta_f^0(t) = \prod_{k > l} (1 - t^{k-l})^{\chi(S_{k,l})}, \quad \zeta_f^\infty(t) = \prod_{k < l} (1 - t^{l-k})^{\chi(S_{k,l})}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Разрешение π ростка $f' = RP/(RQ)$ является одновременно разрешением ростка $f = P/Q$. При этом кратности любой компоненты C исключительного дивизора в дивизорах нулей поднятий $(RP) \circ \pi$ и $(RQ) \circ \pi$ ростков RP и RQ получаются из кратностей для ростков P и Q прибавлением одного и того же числа — кратности $m = m(C)$ компоненты C в дивизоре нулей поднятия ростка R . Тем не менее, мероморфные функции f и f' могут иметь различные дзета-функции. Причина, из-за которой формулы из предыдущей теоремы дают разные результаты для f и для f' , состоит в том, что если открытая часть компоненты C лежит в $S_{k,l}(f)$, то, вообще говоря, ее часть, которая лежит в $S_{k+m,l+m}(f')$, меньше.

§3. Дзета-функции мероморфных функций в терминах частичных разрешений

Пусть $f = P/Q$ — росток мероморфной функции на $(\mathbb{C}^{n+1}, 0)$, и пусть $\pi: (\mathcal{X}, \mathcal{D}) \rightarrow (\mathbb{C}^{n+1}, 0)$ — произвольная модификация пространства $(\mathbb{C}^{n+1}, 0)$, которая является изоморфизмом вне гиперповерхности $H = \{P=0\} \cup \{Q=0\}$ (т.е. π не обязательно является разрешением). Пусть $\varphi = f \circ \pi$ — поднятие ростка f на пространство $\mathcal{X}$ модификации, т.е. мероморфная функция $P \circ \pi / (Q \circ \pi)$. Для точки $x \in \pi^{-1}(H)$ пусть $\zeta_{\varphi,x}^0(t)$ и $\zeta_{\varphi,x}^\infty(t)$ — дзета-функции 0- и ∞ -монодромий ростка функции φ в точке x . Пусть $\mathcal{S} = \{\Xi\}$ — пре-стратификация пространства $\mathcal{D} = \pi^{-1}(0)$ (т.е. его разбиение на полуаналитические подпространства без каких-либо условий регулярности), такая, что для любого страта Ξ из $\mathcal{S}$ дзета-функции $\zeta_{\varphi,x}^0(t)$ и $\zeta_{\varphi,x}^\infty(t)$ не зависят от x для $x \in \Xi$. Мы обозначим эти дзета-функции через $\zeta_\Xi^0(t)$ и $\zeta_\Xi^\infty(t)$ соответственно. Применение конструкций работы [5] в нашей ситуации дает следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 2. Для $\bullet = 0$ или ∞

$$\check{\zeta}_f^\bullet(t) = \prod_{\Xi \in \mathcal{S}} [\check{\zeta}_\Xi^\bullet(t)]^{\chi(\Xi)}.$$

§4. Дзета-функции в терминах диаграмм Ньютона

Диаграммой Ньютона $\Gamma = \Gamma(R)$ ростка $R(x) = \sum a_k x^k$ голоморфной функции $(\mathbb{C}^{n+1}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ ($k = (k_0, k_1, \dots, k_n)$, $x^k = x_0^{k_0} x_1^{k_1} \dots x_n^{k_n}$) называется объединение компактных граней многогранника $\Gamma_+ = \Gamma_+(R) = \text{выпуклая оболочка множества } \bigcup_{k: a_k \neq 0} (k + \mathbb{R}_+^{n+1}) \subset \mathbb{R}_+^{n+1}$.

Пусть $f = P/Q$ — росток мероморфной функции на $(\mathbb{C}^{n+1}, 0)$, и пусть $\Gamma_1 = \Gamma(P)$ и $\Gamma_2 = \Gamma(Q)$ — диаграммы Ньютона ростков P и Q . Будем называть пару $\Lambda = (\Gamma_1, \Gamma_2)$, состоящую из диаграмм Ньютона Γ_1 и Γ_2 , парой Ньютона ростка f . Будем говорить, что росток мероморфной функции f невырожден по отношению к своей паре Ньютона $\Lambda = (\Gamma_1, \Gamma_2)$, если пара ростков (P, Q) невырожденна по отношению к паре $\Lambda = (\Gamma_1, \Gamma_2)$ в соответствии с определением из работы [8] (которое является адаптацией определения А. Г. Хованского из [6] к случаю ростков полных пересечений).

Определим дзета-функции $\zeta_\Lambda^0(t)$ и $\zeta_\Lambda^\infty(t)$ для пары Ньютона $\Lambda = (\Gamma_1, \Gamma_2)$. Пусть $1 \leq l \leq n+1$, и пусть $\mathcal{J}$ — подмножество множества $\{0, 1, \dots, n\}$ с количеством элементов $\#\mathcal{J}$, равным l . Пусть $L_{\mathcal{J}}$ — координатное подпространство, $L_{\mathcal{J}} = \{k \in \mathbb{R}^{n+1} : k_i = 0 \text{ для } i \notin \mathcal{J}\}$, $\Gamma_{i,\mathcal{J}} = \Gamma_i \cap L_{\mathcal{J}} \subset L_{\mathcal{J}}$. Пусть $L_{\mathcal{J}}^*$ — пространство, двойственное к $L_{\mathcal{J}}$, и пусть $L_{\mathcal{J}+}^*$ — положительный октант в нем (множество ковекторов, имеющих положительные значения на $L_{\mathcal{J} \geq 0} = \{k \in L_{\mathcal{J}} : k_i \geq 0 \text{ для } i \in \mathcal{J}\}$). Для примитивного целочисленного ковектора (т.е. неделимого элемента двойственной целочисленной решетки) $a \in (\mathbb{R}^{n+1})_+^*$ положим $m(a, \Gamma) = \min_{x \in \Gamma} (a, x)$, $\Delta(a, \Gamma) = \{x \in \Gamma : (a, x) = m(a, \Gamma)\}$. Обозначим через $m_{\mathcal{J}}$ и $\Delta_{\mathcal{J}}$ соответствующие объекты для диаграммы $\Gamma_{\mathcal{J}}$ и примитивного целочисленного ковектора $a \in L_{\mathcal{J}+}^*$. Пусть $E_{\mathcal{J}}$ — множество примитивных целочисленных ковекторов $a \in L_{\mathcal{J}+}^*$, для которых $\dim(\Delta(a, \Gamma_1) + \Delta(a, \Gamma_2)) = l-1$ (суммой Минковского $\Delta_1 + \Delta_2$ двух многогранников Δ_1 и Δ_2 называется многогранник $\{x = x_1 + x_2 : x_1 \in \Delta_1, x_2 \in \Delta_2\}$). Количество таких ковекторов конечно. Для $a \in E_{\mathcal{J}}$ положим $\Delta_1 = \Delta(a, \Gamma_1)$, $\Delta_2 = \Delta(a, \Gamma_2)$, и пусть

$$V_a = \sum_{s=0}^{l-1} V_{l-1}(\underbrace{\Delta_1, \dots, \Delta_1}_s, \underbrace{\Delta_2, \dots, \Delta_2}_{l-1-s}).$$

Определение смешанного объема (Минковского) $V(\Delta_1, \dots, \Delta_m)$ см., например, в [4] или в [8]; $(l-1)$ -мерный объем в рациональном $(l-1)$ -мерном аффинном подпространстве пространства $L_{\mathcal{J}}$ должен быть нормализован таким образом, чтобы объем единичного куба, порожденного любым целочисленным базисом соответствующего линейного подпространства, был равен 1. Напомним, что $V_m(\underbrace{\Delta, \dots, \Delta}_m)$ — обычный m -мерный объем много-

гранника Δ . Мы должны предполагать, что $V_0(\text{ничего}) = 1$ (это необходимо для определения V_a при $l = 1$). Положим

$$\zeta_{\mathcal{J}}^0(t) = \prod_{a \in E_{\mathcal{J}} : m(a, \Gamma_1) > m(a, \Gamma_2)} (1 - t^{m(a, \Gamma_1) - m(a, \Gamma_2)})^{(l-1)!V_a},$$

$$\zeta_{\mathcal{J}}^\infty(t) = \prod_{a \in E_{\mathcal{J}} : m(a, \Gamma_1) < m(a, \Gamma_2)} (1 - t^{m(a, \Gamma_2) - m(a, \Gamma_1)})^{(l-1)!V_a},$$

$$\zeta_l^\bullet(t) = \prod_{\mathcal{J} : \#\mathcal{J}=l} \zeta_{\mathcal{J}}^\bullet(t), \quad \zeta_\Lambda^\bullet(t) = \prod_{l=1}^{n+1} (\zeta_l^\bullet(t))^{(-1)^{l-1}},$$

где $\bullet = 0$ или ∞ .

ТЕОРЕМА 3. *Предположим, что росток $f = P/Q$ мероморфной функции на $(\mathbb{C}^{n+1}, 0)$ невырожден по отношению к своей паре Ньютона $\Lambda = (\Gamma_1, \Gamma_2)$. Тогда*

$$\zeta_f^0(t) = \zeta_\Lambda^0(t), \quad \zeta_f^\infty(t) = \zeta_\Lambda^\infty(t).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть Σ — унимодулярное симплицальное разбиение октанта $\mathbb{R}_{\geq 0}^{n+1}$, которое соответствует паре диаграмм Ньютона (Γ_1, Γ_2) в

смысле [8, Sec. 4]. Это разбиение подчинено каждой из диаграмм Ньютона Γ_1 и Γ_2 в смысле работы [9].

Пусть $\pi: (\mathcal{X}, \mathcal{D}) \rightarrow (\mathbb{C}^{n+1}, 0)$ — торическая модификация, соответствующая Σ (см., например, [3]). Поскольку пара (P, Q) невырождена по отношению к паре диаграмм (Γ_1, Γ_2) , π является разрешением ростка $f = P/Q$ (см. [8]). Имеем $S_{k,l} = S_k(P) \cap S_l(Q)$. Описание множеств $S_k(P)$ и $S_l(Q)$ можно найти в [9, Sec. 7]. Каждое из них состоит из открытых частей некоторых комплексных торов различных размерностей.

Торы размерности n соответствуют положительным (т.е. лежащим в $(\mathbb{R}^{n+1})_+^*$) одномерным конусам в Σ . Кратность функции $P \circ \pi$ (соответственно функции $Q \circ \pi$) вдоль такого тора равна $m(a, \Gamma_1)$ (соответственно $m(a, \Gamma_2)$) для примитивного целочисленного ко вектора a , порождающего соответствующий конус.

Торы размерности $l-1$ соответствуют положительным симплицальным $(n+2-l)$ -мерным конусам в Σ , которые содержат в качестве своей грани конус вида

$$\mathfrak{S} = \{a \in (\mathbb{R}^{n+1})_{\geq 0}^* : a_j > 0 \text{ для } j \notin \mathcal{J}, a_j = 0 \text{ для } j \in \mathcal{J}\}$$

с $\#(\mathcal{J}) = l$ (эти грани сами являются элементами разбиения Σ). Эти конусы, в свою очередь, соответствуют одномерным конусам разбиения октанта $L_{\mathcal{J} \geq 0}$, подчиненного диаграмме Ньютона $\Gamma_{i,\mathcal{J}} = \Gamma_i \cap L_{\mathcal{J}} \subset L_{\mathcal{J}}$. Кратности функций $P \circ \pi$ и $Q \circ \pi$ вдоль такого тора равны $m_{\mathcal{J}}(a, \Gamma_{1,\mathcal{J}})$ и $m_{\mathcal{J}}(a, \Gamma_{2,\mathcal{J}})$ соответственно, где a — примитивный целочисленный ко вектор, порождающий соответствующий одномерный конус.

Для того чтобы применить теорему 1, нужно вычислить эйлерову характеристику соответствующей части $(l-1)$ -мерного тора T — дополнения к пересечению с собственным прообразом гиперповерхности $H = \{P=0\} \cup \{Q=0\}$. Пусть A (соответственно B) — пересечение тора T с собственным прообразом гиперповерхности $\{P=0\}$ (соответственно $\{Q=0\}$). Положим $\Delta_i := \Delta(a, \Gamma_{i,\mathcal{J}})$. Из результатов Хованского [7] следует, что эйлерова характеристика гиперповерхности A (соответственно B) равна

$$(-1)^l (l-1)! V_{l-1}(\underbrace{\Delta_1, \dots, \Delta_1}_{l-1}) \quad (\text{соответственно } (-1)^l (l-1)! V_{l-1}(\underbrace{\Delta_2, \dots, \Delta_2}_{l-1})),$$

а эйлерова характеристика гиперповерхности $A \cap B$ равна

$$(-1)^{l-1} (l-1)! [V_{l-1}(\underbrace{\Delta_1, \dots, \Delta_1}_{l-2}, \Delta_2) + V_{l-1}(\underbrace{\Delta_1, \dots, \Delta_1}_{l-3}, \Delta_2, \Delta_2) + \dots + V_{l-1}(\Delta_1, \underbrace{\Delta_2, \dots, \Delta_2}_{l-2})].$$

Таким образом, эйлерова характеристика дополнения к $A \cup B$ в торе T равна

$$\begin{aligned} \chi(T) - \chi(A) - \chi(B) + \chi(A \cap B) \\ = (-1)^{l-1} (l-1)! \left[V_{l-1}(\underbrace{\Delta_1, \dots, \Delta_1}_{l-1}) + V_{l-1}(\underbrace{\Delta_1, \dots, \Delta_1}_{l-2}, \Delta_2) + \dots \right. \\ \left. + V_{l-1}(\underbrace{\Delta_2, \dots, \Delta_2}_{l-1}) \right], \end{aligned}$$

что и доказывает утверждение. $\square$

§5. Формула типа Варченко для $f = P/z_0^d$

Как указывалось в начале статьи, для изучения поведения многочленов на бесконечности представляют интерес ростки мероморфных функций вида $P(z_0, z_1, \dots, z_n)/z_0^d$. В этом случае формулы для дзета-функций $\zeta_\Lambda^0(t)$ и $\zeta_\Lambda^\infty(t)$ существенно упрощаются. Переформулируем определение этих дзета-функций для случая, когда диаграмма Ньютона Γ_2 состоит из одной точки $(d, 0, \dots, 0)$ (в терминах диаграммы Ньютона $\Gamma := \Gamma_1$ ростка P). Получаем следующее описание.

Пусть $1 \leq l \leq n+1$, и пусть $\mathcal{J}$ — подмножество множества $\{1, \dots, n\}$ с количеством элементов $\#\mathcal{J}$, равным $l-1$. Пусть $\gamma_1^\mathcal{J}, \dots, \gamma_{j(\mathcal{J})}^\mathcal{J}$ — все $(l-1)$ -мерные грани диаграммы $\Gamma_{\mathcal{J} \cup \{0\}}$, $a_{\mathcal{J},1}, \dots, a_{\mathcal{J},j(\mathcal{J})}$ — соответствующие примитивные ковекторы (ортогональные к $\gamma_1^\mathcal{J}, \dots, \gamma_{j(\mathcal{J})}^\mathcal{J}$), $a_{\mathcal{J},s}^0$ — нулевая координата ковектора $a_{\mathcal{J},s}$, и пусть $m_s(\mathcal{J}) = (a_{\mathcal{J},s}, k)$ для $k \in \gamma_s^\mathcal{J}$. Тогда

$$\begin{aligned} \zeta_{\mathcal{J} \cup \{0\}}^0(t) &= \prod_{1 \leq s \leq j(\mathcal{J}) : m_s(\mathcal{J}) > d \cdot a_{\mathcal{J},s}^0} (1 - t^{m_s(\mathcal{J}) - d \cdot a_{\mathcal{J},s}^0})^{(l-1)! V_{l-1}(\gamma_s^\mathcal{J})}, \\ \zeta_{\mathcal{J} \cup \{0\}}^\infty(t) &= \prod_{1 \leq s \leq j(\mathcal{J}) : m_s(\mathcal{J}) < d \cdot a_{\mathcal{J},s}^0} (1 - t^{d \cdot a_{\mathcal{J},s}^0 - m_s(\mathcal{J})})^{(l-1)! V_{l-1}(\gamma_s^\mathcal{J})}, \\ \zeta_l^\bullet(t) &= \prod_{\mathcal{J} \subset \{1, \dots, n\} : \#\mathcal{J} = l-1} \zeta_{\mathcal{J} \cup \{0\}}^\bullet(t), \quad \zeta_\Lambda^\bullet(t) = \prod_{l=1}^{n+1} (\zeta_l^\bullet(t))^{(-1)^{l-1}} \end{aligned}$$

($\bullet = 0$ или ∞), где $V_{l-1}(\gamma_s^\mathcal{J})$ — (обычный) $(l-1)$ -мерный объем грани $\gamma_s^\mathcal{J}$ (в гиперплоскости в $L_{\mathcal{J} \cup \{0\}}$, порожденной этой гранью).

§6. Примеры

ПРИМЕР 1. Пусть $f = (x^3 - xy)/y$. Слои Милнора $\mathcal{M}_f^0$ (соответственно $\mathcal{M}_f^\infty$) равен $\{(x, y) : \|(x, y)\| < \varepsilon, (x^3 - xy, y) \in B_\delta, x^3 - xy = cy\} \setminus \{(0, 0)\}$, где $\|c\| \neq 0$ достаточно мало (соответственно достаточно велико). Из уравнения $x^3 - xy = cy$ получаем $y = x^3/(x + c)$, и поэтому слой Милнора $\mathcal{M}_f^0$ диффеоморфен диску $\mathcal{D}$ на x -плоскости без двух точек: $-c$ и нуля. Точно так же слой Милнора $\mathcal{M}_f^\infty$ диффеоморфен проколотому диску $\mathcal{D}^*$. Нетрудно понять, что в обоих случаях действие преобразования монодромии в группах

гомологий тривиально. Таким образом

$$\zeta_f^0(t) = (1-t)^{-1}, \quad \zeta_f^\infty(t) = 1.$$

Вычислим эти дзета-функции через диаграммы Ньютона (рис. 1).

Рис. 1

Поскольку каждая координатная ось пересекается только с одной из диаграмм, $\zeta_1^\bullet(t) = 1$. Имеется только одна линейная функция (а именно, $a = k_x + 2k_y$), для которой $\dim \Delta(a, \Gamma_1) = 1$. Одномерный объем $V_1(\Delta(a, \Gamma_1))$ грани $\Delta(a, \Gamma_1)$ равен 1, $V_1(\Delta(a, \Gamma_2)) = 0$. Имеем $m(a, \Gamma_1) = 3$, $m(a, \Gamma_2) = 2$. Таким образом, $\zeta_2^0(t) = 1-t$, $\zeta_2^\infty(t) = 1$, $\zeta_{(\Gamma_1, \Gamma_2)}^0(t) = (1-t)^{-1}$, $\zeta_{(\Gamma_1, \Gamma_2)}^\infty(t) = 1$, что совпадает с написанными выше формулами.

ПРИМЕР 2. Пусть $P = xyz + x^p + y^q + z^r$ — особенность $T_{p,q,r}$, $1/p + 1/q + 1/r < 1$, и пусть $Q = x^d + y^d + z^d$ — однородный многочлен степени d . Предположим, что $p > q > r > d > 3$ и что p , q и r попарно взаимно просты. Вычислим дзета-функции монодромий ростка $f = P/Q$ с помощью теорем 2 и 3.

(а) Очевидно, что росток f невырожден по отношению к своей паре Ньютона $\Lambda = (\Gamma_1, \Gamma_2)$. Поэтому

$$\zeta_f^\bullet(t) = \zeta_\Lambda^\bullet(t) = \zeta_1^\bullet(\zeta_2^\bullet)^{-1}\zeta_3^\bullet \quad (\bullet = 0 \text{ или } \infty).$$

Имеем $\zeta_1^\infty = \zeta_2^\infty = 1$, и единственный ковектор, необходимый для вычисления ζ_3^∞ , — это $a = (1, 1, 1)$. В этом случае $m(a, \Gamma_1) = 3$, $m(a, \Gamma_2) = d$, $\Delta(a, \Gamma_1) = \{(1, 1, 1)\}$, а $\Delta(a, \Gamma_2)$ — симплекс $\{k_x + k_y + k_z = d, k_x \geq 0, k_y \geq 0, k_z \geq 0\}$, его двумерный объем равен $d^2/2$. Таким образом, $\zeta_f^\infty = (1 - t^{d-3})^{d^2}$.

Имеем

$$\begin{aligned} \zeta_1^0 &= (1 - t^{p-d})(1 - t^{q-d})(1 - t^{r-d}), \\ \zeta_2^0 &= (1 - t^{r(q-d)})(1 - t^{r(p-d)})(1 - t^{q(p-d)})(1 - t^{r-d})^{2d}(1 - t^{q-d})^d. \end{aligned}$$

Чтобы вычислить ζ_3^0 , нужно учитывать как ковекторы $(rq - q - r, r, q)$, $(r, pr - p - r, p)$ и $(q, p, qp - p - q)$, соответствующие двумерным граням диаграммы Γ_1 , так и ковекторы $(1, r - 2, 1)$, $(r - 2, 1, 1)$ и $(q - 2, 1, 1)$, соответствующие парам вида (одномерная грань диаграммы Γ_1 , одномерная грань диаграммы Γ_2). Например, для $a = (1, r - 2, 1)$ грань $\Delta(a, \Gamma_1)$ (соответственно грань $\Delta(a, \Gamma_2)$) — отрезок, соединяющий точки $(0, 0, r)$ и $(1, 1, 1)$

(соответственно соединяющий точки $(d, 0, 0)$ и $(0, 0, d)$). Обратите внимание на «отсутствие симметрии»: последние три коектора не получаются друг из друга перестановкой координат и чисел p , q и r . Таким образом,

$$\zeta_3^0 = (1 - t^{r(q-d)})(1 - t^{r(p-d)})(1 - t^{q(p-d)})(1 - t^{r-d})^{2d}(1 - t^{q-d})^d,$$

$$\zeta_f^0 = (1 - t^{p-d})(1 - t^{q-d})(1 - t^{r-d}).$$

(b) Для вычисления дзета-функций роста f с помощью теоремы 2 в качестве модификации $\pi: (\mathcal{X}, \mathcal{D}) \rightarrow (\mathbb{C}^3, 0)$ возьмем раздутие (σ -процесс) начала координат в $\mathbb{C}^3$, и пусть φ — поднятие $f \circ \pi$ роста f на пространство $\mathcal{X}$. Исключительным дивизором $\mathcal{D}$ модификации является комплексная проективная плоскость $\mathbb{CP}^2$. Пусть H_1 и H_2 — собственные прообразы гиперповерхностей $\{P=0\}$ и $\{Q=0\}$ и $D_i = \mathcal{D} \cap H_i$. Кривая D_1 состоит из трех трансверсальных прямых l_1 , l_2 и l_3 и имеет три особые точки $S_1 = l_2 \cap l_3 = (0, 0, 1)$, $S_2 = l_1 \cap l_3 = (0, 1, 0)$ и $S_3 = l_1 \cap l_2 = (1, 0, 0)$. Кривая D_2 — это неособая кривая степени d . Она пересекает D_1 трансверсально в $3d$ различных неособых точках $\{P_1, \dots, P_{3d}\}$.

Имеется следующая естественная стратификация исключительного дивизора $\mathcal{D}$:

- (i) нульмерные страты Λ_i^0 ($i = 1, 2, 3$), каждый состоящий из одной точки S_i ;
- (ii) нульмерные страты Ξ_i^0 , каждый состоящий из одной точки P_i ($i = 1, \dots, 3d$);
- (iii) одномерные страты $\Xi_i^1 = l_i \setminus \{D_2 \cup l_j \cup l_k\}$ ($i = 1, 2, 3$) и $\Xi_4^1 = D_2 \setminus D_1$;
- (iv) двумерный страт $\Xi^2 = \mathcal{D} \setminus (D_1 \cup D_2)$.

Нетрудно видеть, что $\zeta_{\Xi_2^0}(t) = 1$, $\zeta_{\Xi_2^0}(t) = 1 - t^{d-3}$ и для каждого страта Ξ из Ξ_i^0 ($1 \leq i \leq 3d$) или из Ξ_i^1 ($1 \leq i \leq 4$) имеем $\zeta_{\Xi}^\bullet(t) = 1$ ($\bullet = 0$ или ∞).

Далее предполагается, что исключительный дивизор $\mathcal{D}$ локально задается уравнением $u = 0$. В точке S_1 росток поднятия φ функции f имеет вид $(u^3 x_1 y_1 + u^r + x_1^p u^p + y_1^q u^q)/(u^d x_1^d + u^d y_1^d + u^d)$. Этот росток имеет ту же пару Ньютона, что и росток $(u^3 x_1 y_1 + u^r)/u^d$. Пользуясь теоремой 3, получаем $\zeta_{\Lambda_1^0}^\infty = 1$, $\zeta_{\Lambda_1^0}^\infty = 1 - t^{r-d}$. В точке S_2 росток функции φ имеет вид $(u^3 x_1 z_1 + z_1^r u^r + x_1^p u^p + u^q)/(u^d x_1^d + u^d + z_1^d u^d)$. Он имеет ту же пару Ньютона, что и $(u^3 x_1 z_1 + z_1^r u^r + u^q)/u^d$. Из теоремы 3 следует, что $\zeta_{\Lambda_2^0}^\infty(t) = 1$, $\zeta_{\Lambda_2^0}^0(t) = 1 - t^{q-d}$. Точно так же $\zeta_{\Lambda_3^0}^\infty(t) = 1$, $\zeta_{\Lambda_3^0}^0(t) = 1 - t^{p-d}$. Собирая вместе эти вычисления, получаем тот же результат, что и выше (без использования частичного разложения).

ЛИТЕРАТУРА

1. *A'Campo N.* La fonction zêta d'une monodromie. Comm. Math. Helv., **50**, 233–248 (1975).
2. *Арнольд В. И.* Особенности дробей и поведение многочленов на бесконечности, Труды МИРАН, **221** (1998) (в печати).

3. Арнольд В. И., Варченко А. Н., Гусейн-Заде С. М. Особенности дифференцируемых отображений, т. 2. Наука, М., 1984.
4. Бернштейн Д. Н. Число корней системы уравнений. Функц. анализ и его прил., **9**, вып. 3, 1–4 (1975).
5. Gusein-Zade S. M., Luengo I., Melle-Hernández A. Partial resolutions and the zeta-function of a singularity. Comm. Math. Helv., **72**, 244–256 (1997).
6. Хованский А. Г. Многогранники Ньютона и торические многообразия. Функц. анализ и его прил., **11**, вып. 4, 56–67 (1977).
7. Хованский А. Г. Многогранники Ньютона и род полных пересечений. Функц. анализ и его прил., **12**, вып. 1, 51–61 (1978).
8. Oka M. Principal zeta-function of non-degenerate complete intersection singularity. J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math., **37**, 11–32 (1990).
9. Varchenko A. N. Zeta function of monodromy and Newton's diagram. Invent. Math., **37**, 253–262 (1976).

Московский государственный университет
механико-математический факультет
e-mail: sabir@ium.ips.ras.ru

Поступило в редакцию
3 июля 1997 г.

Facultad de Ciencias Matemáticas,
Universidad Complutense de Madrid.
e-mail: iluengo@eucmos.sim.ucm.es

Facultad de Ciencias Matemáticas,
Universidad Complutense de Madrid.
e-mail: amelle@eucmos.sim.ucm.es