Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Г. Костюченко, А. А. Шкаликов, М. Ю. Юркин, Об устойчивости волчка с полостью, заполненной вязкой жидкостью, *Функц. анализ и его прил.*, 1998, том 32, выпуск 2, 36–55

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa350>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.64.247

26 апреля 2023 г., 15:25:41

Об устойчивости волчка с полостью, заполненной вязкой жидкостью*

© 1998. А. Г. Костюченко, А. А. Шкаликов, М. Ю. Юркин

Введение

В работе изучаются малые колебания вращающегося волчка с полостью, целиком заполненной несжимаемой вязкой жидкостью. Распределение масс в теле и форма полости считаются произвольными. В невозмущенном стационарном состоянии жидкость имеет распределение скоростей твердого тела, вращающегося вместе с волчком вокруг вертикальной оси, являющейся главной осью инерции системы. Оболочка имеет неподвижную точку. Движение происходит в поле силы тяжести. Центр тяжести системы находится на главной оси инерции системы, вокруг которой совершалось невозмущенное движение.

Основная цель работы — получить критерий устойчивости движения такой системы и исследовать спектральные свойства оператора эволюции, соответствующего линеаризованным уравнениям движения. Эта задача имеет давнюю историю. Отметим в первую очередь исследования Соболева [1], Румянцева [2] и Черноусько [3], в которых даются достаточные условия устойчивости и признаки неустойчивости волчка (см. также монографии [4, 5]). Румянцев [2, 4] показал, что волчок устойчив, если положительны оба числа

$$n_1 = a_0 - a_1 - k/\omega^2 \quad \text{и} \quad n_2 = a_0 - a_2 - k/\omega^2. \quad (1)$$

Здесь ω — угловая скорость вращения волчка, а смысл других постоянных будет указан в §1. В частности, если волчок имеет ось симметрии выше второго порядка, то $a_1 = a_2$ и для устойчивости достаточно положительности одного числа. В отсутствие силы тяжести этот достаточный признак устойчивости сводится к тому, чтобы ось невозмущенного вращения волчка была осью наибольшего центрального момента инерции. Румянцев получил этот признак способом, основанным на применении второго метода Ляпунова, а ранее Соболев получил его для идеальной жидкости (т.е. при нулевой вязкости), показав, что оператор эволюции соответствующей линейной задачи самосопряжен в гильбертовом пространстве с индефинитной метрикой, причем метрика дефинитна, если $n_1 = n_2 > 0$. С другой стороны, Черноусько [3]

* Исследования А. Г. Костюченко выполнены при поддержке РФФИ, гранты № 96-15-96091 и № 96-01-00333, А. А. Шкаликова — при поддержке РФФИ, грант № 98-01-01000, и программы Volkswagen Stiftung (RIP program in Oberwolfach), М. Ю. Юркина — при поддержке РФФИ, грант № 96-15-96091, и ISSEP, грант a97-1559.

получил признаки неустойчивости волчка в рассматриваемой задаче. Он нашел асимптотические разложения решений линеаризованных уравнений движения волчка в ряды по степеням числа Рейнольдса и показал, что в отсутствие силы тяжести при большой вязкости волчок будет неустойчив, если момент инерции системы относительно оси невозмущенного вращения является наименьшим или средним. У него были некоторые предположения о симметрии полости, которые затем были сняты Смирновой [22]. Она также показала, что вращение вокруг оси наибольшего момента инерции системы будет единственным устойчивым вращением, если жидкость имеет достаточно малую вязкость, а полость имеет форму тора [6]. Для волчка со сферической полостью этот результат получен Черноусько [7]. В неявной форме признаки неустойчивости волчка получил также Румянцев [4].

В настоящей работе мы показываем, что линеаризованное уравнение рассматриваемой задачи можно записать в такой форме, что соответствующий оператор эволюции является диссипативным в пространстве с индефинитной метрикой (в пространстве Понтрягина). Это дает возможность применить нетривиальные результаты теории таких операторов и полностью решить задачу о необходимых и достаточных условиях устойчивости и, более того, точно указать индекс неустойчивости. Предположения о симметрии волчка, отсутствии силы тяжести, большой или малой вязкости оказываются излишними. Кроме того, в отличие от предыдущих работ мы исследуем устойчивость системы (существенно бесконечномерной) в целом, а не только ее конечномерной «твердотельной» части. Один из основных результатов настоящей работы состоит в том, что индекс неустойчивости задачи не зависит ни от вязкости (если она ненулевая), ни от формы волчка и полости, и равен числу отрицательных собственных значений матрицы $\begin{pmatrix} n_1 & 0 \\ 0 & n_2 \end{pmatrix}$. При нулевой вязкости это не так (см. [1, 8]).

В методологическом отношении наш подход примыкает к работе Соболева [1]. Однако уравнения движения системы, рассмотренные Соболевым, были записаны им в системе координат, равномерно вращающейся в пространстве с угловой скоростью невозмущенного вращения волчка. Они оказываются сложными для анализа; их представление в операторной форме возможно только при нулевой вязкости (см. §5). Следуя [4], мы пользуемся системой координат, жестко связанной с телом. Полученные нами линеаризованные уравнения (ср. [8, 9]) допускают удобную операторную трактовку.

Работа состоит из пяти параграфов. В §1 мы уточняем постановку задачи и выписываем уравнения движения системы. В §2 линеаризованные уравнения задачи представлены в виде операторного уравнения в гильбертовом пространстве. Показано, что оператор $\mathbf{T}$ эволюции системы является максимально диссипативным в пространстве Понтрягина. В §3 находится число собственных значений оператора $\mathbf{T}$ в нижней полуплоскости и доказывается, что это число совпадает с индексом неустойчивости. В §4 исследуются базисные свойства собственных функций оператора $\mathbf{T}$ и дается описание его спектра при больших значениях вязкости. В §5 рассматривается случай симметричного волчка. Приводится семейство инвариантных подпространств оператора эволюции $\mathbf{T}$ и выделены те подпространства, на которых волчок

может быть неустойчив. Здесь же указана связь изучаемого нами оператора T с оператором Соболева.

§1. Уравнения движения волчка с жидкостью

Обозначения. Пространства и операторы гидромеханики. Пусть твердое тело занимает ограниченный объем Ω_1 в пространстве $\mathbb{R}^3$ и содержит внутри полость Ω , целиком заполненную жидкостью, т.е. $\Omega \subset \Omega_1$. Далее считаем, что Ω есть область в $\mathbb{R}^3$. Само тело без жидкости, занимающее объем $\Omega_1 \setminus \Omega$, назовем *оболочкой*. Мы будем оперировать понятием *тела с затвердевшей жидкостью*, подразумевая следующее: весь объем Ω_1 рассматривается как твердое тело, плотность которого в $\Omega_1 \setminus \Omega$ совпадает с прежней, а в области Ω — с плотностью жидкости. Тело движется вокруг неподвижной точки, которую мы примем за начало координат. Пусть e_0, e_1, e_2 — единичные векторы, выходящие из точки O и совпадающие по направлениям с главными осями инерции тела с затвердевшей жидкостью. Рассмотрим ортонормированные реперы $Oe_0e_1e_2$ и $Of_0f_1f_2$, первый из которых жестко связан с телом, а второй фиксирован в пространстве. В невозмущенном состоянии вектор e_0 совпадает с f_0 . Состояние рассматриваемой системы (тело+жидкость) описывается тремя величинами $(z, w, v(x))$, где z — координаты вектора f_0 , w — угловая скорость оболочки, а $v(x)$ — поле скоростей жидкости. Здесь $x = (x_0, x_1, x_2) \in \Omega$ — координаты точки, причем все четыре величины $z, w, v(x)$ и x рассматриваются как векторы в репере $Oe_0e_1e_2$, жестко связанном с телом.

Из предположения о конечности кинетической энергии жидкости следует, что значения v поля скоростей жидкости лежат в подпространстве $J_0(\Omega) \subset L_2^3(\Omega)$. Подпространство $J_0(\Omega)$ получается замыканием в L_2^3 всех бесконечно дифференцируемых и финитных в Ω соленоидальных векторных полей (т.е. вектор-функций, для которых $\operatorname{div} v = 0$). Известно разложение Вейля

$$L_2^3(\Omega) = J_0(\Omega) \oplus G(\Omega).$$

Здесь $G(\Omega)$ — подпространство функций вида $\operatorname{grad} p(x)$, где $p(x)$ — скалярная локально квадратично суммируемая функция, первые обобщенные частные производные которой принадлежат $L_2(\Omega)$.

Определяемые далее операторы хорошо известны в гидромеханике (см. [10] и [5]). Вектор

$$B^*v = \int_{\Omega} [x, v(x)] dx,$$

где $[\cdot, \cdot]$ — векторное произведение в $\mathbb{R}^3$, называется *гиростатическим моментом жидкости*. Очевидно, что $B^*: J_0(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}^3$ есть ограниченный оператор, а сопряженный к нему определяется равенством $Bw = P_0([w, x])$, где P_0 — оператор ортогонального проектирования пространства $L_2^3(\Omega)$ на подпространство $J_0(\Omega)$. Легко проверить, что $\operatorname{rot} Bw \equiv 2w$. Известно [4], что это тождество в случае односвязной области может служить определением оператора B , т.е. оператор $B: \mathbb{R}^3 \rightarrow J_0(\Omega)$, удовлетворяющий этому тождеству, однозначно определен.

Пусть Δ — оператор Лапласа на подпространстве $J_0(\Omega)$, область определения которого составляют бесконечно дифференцируемые финитные в Ω функции $v \in J_0(\Omega)$. Оператор $R = P_0\Delta$, очевидно, неотрицателен, а потому определено его расширение по Фридрихсу, которое будем по-прежнему обозначать через R . Построенный оператор называется *оператором Стокса*. Информацию об области определения оператора R в случае негладкой области получить трудно, но область определения порождаемой им квадратичной формы (или область определения корня $R^{1/2}$) находится легко: она совпадает с линеалом $J_0(\Omega) \cap \mathring{H}_1(\Omega)$, где $\mathring{H}_1(\Omega)$ — пространство, получающееся замыканием множества гладких финитных в Ω функций в метрике пространства Соболева $H_1(\Omega)$. Известно [10], что оператор Стокса равномерно положителен и имеет дискретный спектр.

Вместо вещественного пространства $\mathbb{R}^3$ далее рассматривается его комплексификация $\mathbb{C}^3$. В пространстве $\mathbb{C}^3$ рассмотрим операторы A и A_0 , определяемые квадратичными формами

$$(Aw, w) = \int_{\Omega_1} \|[w, x]\|^2 d\rho(x), \quad (A_0w, w) = \int_{\Omega_1 \setminus \Omega} \|[w, x]\|^2 d\rho(x),$$

где $\rho(x)$ — распределение масс в оболочке $\Omega_1 \setminus \Omega$ и жидкости в Ω . Матрицы, отвечающие этим операторам, определяют тензоры инерции относительно точки O тела с затвердевшей жидкостью и оболочки соответственно. Согласно определению репера $Oe_0e_1e_2$, имеем $A = \text{diag}\{a_0, a_1, a_2\}$, где a_j — моменты инерции тела с затвердевшей жидкостью относительно главных осей инерции Ox_j . Далее предполагается, что $A_0 > 0$. С физической точки зрения это предположение означает, что оболочка не является невесомой.

В пространстве $\mathbb{C}^3$ рассмотрим также оператор H , определяемый равенством

$$iHx = [x, e_0] \quad \text{или} \quad H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Оператор

$$G = -2P_0H,$$

действующий в пространстве $J_0(\Omega)$, называется *гироскопическим*. Очевидно, что G является ограниченным и самосопряженным. Через I обозначается тождественный оператор как в пространстве $\mathbb{C}^3$, так и в пространстве $J_0(\Omega)$.

Далее в уравнениях фигурируют константы ν и k . Через ν обозначается вязкость жидкости (предполагается, что $\nu \neq 0$, если не оговорено противное). Через k обозначается величина опрокидывающего момента силы тяжести, отнесенная к косинусу угла между векторами f_0 и e_0 . Справедливо равенство $k = glm$, где l — расстояние от центра тяжести системы до неподвижной точки, m — масса системы, а g — ускорение силы тяжести. Плотность жидкости без ограничения общности далее предполагается равной единице.

Уравнения движения волчка с жидкостью. Эволюция системы описывается уравнениями (см., например, [4])

$$\begin{aligned}\dot{z} &= [z, w], \\ A\dot{w} + B^*\dot{v} &= [Aw + B^*v, w] + k[z, e_0], \\ \nabla p + \nu\Delta v &= \dot{v} + (v \cdot \nabla)v + 2[w, v] + [w, [w, x]] + [\dot{w}, x], \quad \operatorname{div} v = 0.\end{aligned}\tag{3}$$

Первое из этих уравнений есть кинематическое соотношение, причем вектор z называется *вектором Пуассона*. Второе уравнение выражает закон об изменении кинетического момента системы относительно точки O . В третьей строке записано уравнение Навье–Стокса движения жидкости в подвижной системе координат, связанной с твердым телом. Применив к этому уравнению оператор проектирования P_0 и заметив, что

$$P_0\nabla p = 0, \quad P_0[w, [w, x]] = 0, \quad P_0(u \cdot \nabla)u = P_0([v, \operatorname{rot} v]),$$

получим уравнение вида

$$B\dot{w} + \dot{v} = P_0([v, (2w + \operatorname{rot} v)]) + \nu P_0\Delta v.$$

Линеаризуем первые два уравнения эволюции системы и полученное третье уравнение относительно стационарного решения системы (3) вида

$$z_0 = e_0, \quad w_0 = \omega e_0, \quad v_0 = 0,$$

где ω — постоянная (угловая скорость невозмущенного движения).

Подставим в систему (1) вместо функций z, w, v их сдвиги $z_0 + z, w_0 + w, v_0 + v$ и оставим только линейные члены. После простых выкладок с учетом (2) получим линеаризованные уравнения движения

$$\begin{aligned}\dot{z} &= i\omega(Hz - \omega^{-1}Hw), \\ A\dot{w} + B^*\dot{v} &= i\omega(k\omega^{-1}Hz - H(a_0I - A)w + HB^*v), \\ B\dot{w} + \dot{v} &= i\omega(-2P_0H + i\nu\omega^{-1}P_0\Delta)v.\end{aligned}\tag{4}$$

Эти уравнения удобнее изучать в операторной форме.

§2. Операторное уравнение, соответствующее линеаризованным уравнениям эволюции системы, и его анализ

Линеаризованные уравнения в операторной форме. Рассмотрим гильбертово пространство

$$\mathfrak{H} = \mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}^3 \times J_0(\Omega),$$

элементами которого являются векторы $\mathbf{u} = (z, w, v)^t$. Здесь индекс t означает транспонирование, т. е. элементы пространства $\mathfrak{H}$ суть столбцы, первые две компоненты которых лежат в $\mathbb{C}^3$, а последняя — в $J_0(\Omega)$. Операторы в пространстве $\mathfrak{H}$ естественно записывать в виде (3×3) -матриц, компоненты которых сами являются операторами, действующими в пространствах $\mathbb{C}^3$,

$J_0(\Omega)$ и между ними. Очевидно, систему (4) можно переписать в операторной форме

$$\mathbf{W}\dot{\mathbf{u}} = i\omega\mathbf{M}\mathbf{u}, \quad \mathbf{u} \in \mathfrak{H}, \quad (5)$$

где операторы $\mathbf{W}$ и $\mathbf{M}$ определены оператор-матрицами

$$\mathbf{W} = \begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & A & B^* \\ 0 & B & I \end{pmatrix}, \quad \mathbf{M} = \begin{pmatrix} H & -\omega^{-1}H & 0 \\ k\omega^{-1}H & H(A - a_0I) & HB^* \\ 0 & 0 & D \end{pmatrix}.$$

Здесь оператор D определен в пространстве $J_0(\Omega)$ равенством

$$D = G + i \frac{\nu}{\omega} R,$$

где G — гироскопический оператор, а R — оператор Стокса. Все фигурирующие здесь операторы, кроме одного — оператора Стокса R , — ограничены. В качестве области определения оператора $\mathbf{M}$ берем область

$$\mathcal{D}(\mathbf{M}) = \mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}^3 \times \mathcal{D}(R).$$

Анализ уравнения (5) затруднен тем, что оператор $\mathbf{M}$ не обладает какими-либо специальными свойствами; он не является ни симметрическим, ни диссипативным. Наша идея состоит в том, чтобы «угадать» оператор $\mathbf{S}$, такой, что уравнение (5) после применения к нему оператора $\mathbf{S}$ примет более симметричную форму, а именно, оператор $\mathbf{SM}$ станет диссипативным, а оператор $\mathbf{SW}$ останется самосопряженным. Положим

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} \omega^2(A + N) & -\omega I & 0 \\ -\omega A & I & 0 \\ -\omega B & 0 & I \end{pmatrix}, \quad \text{где } N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & n_1 & 0 \\ 0 & 0 & n_2 \end{pmatrix},$$

а числа n_1 и n_2 определены в (1).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Справедливы представления*

$$\mathbf{J} := \mathbf{SW} = \begin{pmatrix} \omega^2(A + N) & -\omega A & -\omega B^* \\ -\omega A & A & B^* \\ -\omega B & B & I \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{L} := \mathbf{SM} = \begin{pmatrix} (\omega^2 a_0 - 2k)H & -\omega H A + k\omega^{-1}H & -\omega H B^* \\ -\omega A H + k\omega^{-1}H & A H + H A - a_0 H & H B^* \\ -\omega B H & B H & D \end{pmatrix}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В справедливости выписанных равенств убеждаемся непосредственной проверкой с учетом равенства $NH = (a_0I - A - k\omega^{-2}I)H$. $\square$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Оператор $\mathbf{S}$ ограничен и обратим в пространстве $\mathfrak{H}$, если невырождена матрица N .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем

$$\begin{pmatrix} \omega^2(A + N) & -\omega I \\ -\omega A & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & -\omega I \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega^2 N & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ -\omega A & I \end{pmatrix},$$

откуда вытекает обратимость оператора $\mathbf{S}$ при условии, что $n_1 n_2 \neq 0$. $\square$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *Оператор $\mathbf{W}$ равномерно положителен в пространстве $\mathfrak{H}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что оператор $\mathbf{W}$ есть конечномерное возмущение единичного оператора в $\mathfrak{H}$. Поэтому в силу альтернативы Фредгольма достаточно показать, что $\mathbf{W} > 0$. Из определений операторов A , A_0 и B получаем

$$(\mathbf{W}\mathbf{u}, \mathbf{u}) = (z, z) + (A_0 w, w) + \int_{\Omega} ([w, x] + v(x), [w, x] + v(x)) dx.$$

Следовательно, $\mathbf{W} \geq 0$. Если $\mathbf{W}\mathbf{u} = 0$, то $z = 0$ и $w = 0$ (в силу ранее сделанного предположения $A_0 > 0$). Но тогда имеем также $v(x) \equiv 0$. $\square$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. *Оператор $\mathbf{J}$ является самосопряженным, ограниченным и обратимым в пространстве $\mathfrak{H}$, если матрица N невырождена. Его отрицательный спектр состоит из конечного числа собственных значений, причем число отрицательных собственных значений оператора $\mathbf{J}$ и матрицы N совпадают.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В пространстве $\mathfrak{H}$ рассмотрим операторы, определяемые матрицами

$$\mathbf{J}_0 = \begin{pmatrix} \omega^2 N & 0 & 0 \\ 0 & A - B^* B & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix}, \quad \mathbf{S}_0 = \begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ -\omega I & I & 0 \\ -\omega B & B & I \end{pmatrix}.$$

В силу предложения 3 оператор $\mathbf{W}$ равномерно положителен, а потому этим же свойством обладает оператор

$$\begin{pmatrix} A & B^* \\ B & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ B & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A - B^* B & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & B^* \\ 0 & I \end{pmatrix}.$$

Следовательно, $A - B^* B \gg 0$ и $\pi_-(\mathbf{J}_0) = \pi_-(N)$, где через π_- обозначается число отрицательных собственных значений операторов. Далее, простая проверка показывает справедливость равенства $\mathbf{J} = \mathbf{S}_0^* \mathbf{J}_0 \mathbf{S}_0$, откуда вытекает, что $\mathbf{J}$ обратим; кроме того, $\pi_-(\mathbf{J}) = \pi_-(\mathbf{J}_0) = \pi_-(N)$. Предложение доказано. $\square$

Напомним, что оператор $\mathbf{C}$ называется диссипативным, если $\operatorname{Im}(\mathbf{C}\mathbf{x}, \mathbf{x}) \geq 0$ для всех $\mathbf{x} \in \mathscr{D}(\mathbf{C})$, и максимально диссипативным, если нижняя открытая полуплоскость $\mathbb{C}^-$ (или хотя бы одна точка $\mu \in \mathbb{C}^-$) принадлежит резольвентному множеству оператора $\mathbf{C}$. Далее мы будем иметь дело с диссипативными операторами в пространстве Понтрягина. Пусть $\mathbf{J}$ — самосопряженный ограниченный и обратимый оператор, причем $\pi_-(\mathbf{J}) = \kappa < \infty$. Гильбертово пространство $\mathfrak{H}$ с индефинитным скалярным произведением $(\mathbf{J}\mathbf{x}, \mathbf{x})$ называется пространством Понтрягина и обозначается $\Pi_{\kappa} = \{\mathbf{J}, \mathfrak{H}\}$. Оператор $\mathbf{C}$ называется диссипативным в пространстве Π_{κ} , если $\operatorname{Im}(\mathbf{J}\mathbf{C}\mathbf{x}, \mathbf{x}) \geq 0$ для всех $\mathbf{x} \in \mathscr{D}(\mathbf{C})$, и максимально диссипативным, если найдется точка $\mu \in \mathbb{C}^-$ (но не обязательно вся полуплоскость $\mathbb{C}^-$), принадлежащая резольвентному множеству оператора $\mathbf{C}$. Известно (см. [11, гл. 2, теорема 2.10]),

что $\mathbf{C}$ максимально диссипативен в Π_{κ} в том и только том случае, когда $\mathbf{J}\mathbf{C}$ максимально диссипативен в $\mathfrak{H}$.

Основной смысл преобразований, проведенных выше, заключался в подготовке доказательства следующего результата.

ТЕОРЕМА 1. *В случае невырожденности матрицы N уравнение (5) эволюции системы эквивалентно уравнению*

$$\dot{\mathbf{u}} = i\omega \mathbf{T} \mathbf{u}, \quad (6)$$

в котором оператор $\mathbf{T} = \mathbf{J}^{-1}\mathbf{L}$ с областью определения $\mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}^3 \times \mathcal{D}(R)$ является максимально диссипативным в пространстве Понтрягина $\Pi_{\kappa} = \{\mathbf{J}, \mathfrak{H}\}$, где $\kappa = \pi_{-}(N)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем $\text{Im}(\mathbf{J}\mathbf{T}\mathbf{x}, \mathbf{x}) = \text{Im}(\mathbf{L}\mathbf{x}, \mathbf{x}) \geq 0$ для всех $\mathbf{x} \in \mathcal{D}(\mathbf{T})$. Это неравенство вытекает из представления

$$\mathbf{L} = \mathbf{V} + \mathbf{D}, \quad \mathbf{D} = \text{diag}\{I, I, D\}, \quad D = G + i\nu\omega^{-1}R,$$

где $\mathbf{V}$ — самосопряженный конечномерный оператор, $G = G^*$ — гироскопический оператор, а $R = R^* \gg 0$ — оператор Стокса.

Очевидно, что оператор $\mathbf{D}$ является максимально диссипативным в пространстве $\mathfrak{H}$. Поскольку $\mathbf{V}$ самосопряжен и ограничен, этим же свойством обладает и $\mathbf{L}$. Но тогда оператор $\mathbf{T}$ является максимально $\mathbf{J}$ -диссипативным, так как он не имеет нетривиальных $\mathbf{J}$ -диссипативных расширений. Отметим, что максимальная диссипативность оператора $\mathbf{T}$ в пространстве Π_{κ} вытекает также из дискретности его спектра, что доказано ниже. $\square$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Полезно отметить следующий факт. Если

$$\mathbf{S}_1 = \begin{pmatrix} (\omega^2 N)^{-1} & A(\omega N)^{-1} & (\omega N)^{-1} B^* \\ (\omega N)^{-1} & (A + N)N^{-1} & N^{-1} B^* \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix},$$

то

$$\mathbf{J}_1 := \mathbf{W}\mathbf{S}_1 = \begin{pmatrix} (\omega^2 N)^{-1} & A(\omega N)^{-1} & (\omega N)^{-1} B^* \\ A(\omega N)^{-1} & A(A + N)N^{-1} & (A + N)N^{-1} B^* \\ B(\omega N)^{-1} & B(A + N)N^{-1} & BN^{-1} B^* + I \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{L}_1 := \mathbf{M}\mathbf{S}_1 = \begin{pmatrix} 0 & -\omega^{-1}H & 0 \\ -\omega^{-1}H & -a_0H & 0 \\ 0 & 0 & D \end{pmatrix}.$$

При этом оператор $\mathbf{S}_1$ обратим, что следует из невырожденности матрицы $\begin{pmatrix} \omega^{-2} & A\omega^{-1} \\ \omega^{-1} & A + N \end{pmatrix}$. Таким образом, уравнение (5) после замены $\mathbf{u} = \mathbf{S}_1 \mathbf{f}$ приводится к виду

$$\mathbf{J}_1 \dot{\mathbf{f}} = i\omega \mathbf{L}_1 \mathbf{f}, \quad \text{или} \quad \dot{\mathbf{f}} = i\omega \mathbf{T}_1 \mathbf{f}, \quad \mathbf{T}_1 = \mathbf{J}_1^{-1} \mathbf{L}_1,$$

где $\mathbf{J}_1$ — самосопряженный, а $\mathbf{L}_1$ — максимально диссипативный операторы в $\mathfrak{H}$. При этом операторы $\mathbf{J}_0$, $\mathbf{J}$, $\mathbf{J}_1$ конгруэнтны, а именно

$$\mathbf{J}_1 = \mathbf{S}_1^* \mathbf{J} \mathbf{S}_1, \quad \text{где} \quad \mathbf{J} = \mathbf{S}_0^* \mathbf{J}_0 \mathbf{S}_0. \quad (7)$$

Следовательно, оператор $\mathbf{J}_1$ порождает метрику Понтрягина, причем $\pi_-(\mathbf{J}_1) = \pi_-(\mathbf{J}) = \pi_-(\mathbf{J}_0) = \pi_-(N)$. Указанная замена приводит оператор $\mathbf{M}$ к наиболее удобному виду: прямой сумме операторов в пространствах $\mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}^3$ и $J_0(\Omega)$, что используется в дальнейшем. Заметим, что операторы $\mathbf{L}$ и $\mathbf{L}_1$ также конгруэнтны: $\mathbf{L}_1 = \mathbf{S}_1^* \mathbf{L} \mathbf{S}_1$.

§3. Критерий устойчивости и индекс неустойчивости

Необходимым условием устойчивости уравнения (6) (т.е. ограниченности всех его решений) является отсутствие собственных значений в открытой нижней полуплоскости у оператора $\mathbf{T}$. Следующий результат дает описание спектра оператора $\mathbf{T}$ в замкнутой нижней полуплоскости.

ТЕОРЕМА 2. *Спектр оператора $\mathbf{T}$ дискретен. Единственной точкой его спектра на вещественной оси является точка $\lambda = 0$, которой отвечают два собственных вектора $\mathbf{x}_0 = (e_0, 0, 0)^t$, $\mathbf{x}_1 = (0, e_0, 0)^t$. Подпространство $\text{Ker } \mathbf{T}$ является $\mathbf{J}$ -положительным, присоединенных векторов, отвечающих нулевому собственному значению, нет. В открытой нижней полуплоскости имеется ровно $\kappa = \pi_-(N)$ собственных значений оператора $\mathbf{T}$. В частности, при $\kappa = 0$ вся полуплоскость $\mathbb{C}^-$ принадлежит резольвентному множеству оператора $\mathbf{T}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $\mathbf{D} = \text{diag}(I, I, D)$. Очевидно, что оператор $\mathbf{D}^{-1}$ компактен в $\mathfrak{H}$ (это следует из компактности оператора R^{-1} в пространстве $J_0(\Omega)$). Имеем

$$\mathbf{T} - \lambda \mathbf{I} = \mathbf{J}^{-1}[\mathbf{I} + (\mathbf{V} - \lambda \mathbf{J})\mathbf{D}^{-1}]\mathbf{D}, \quad \mathbf{V} = \mathbf{L} - \mathbf{D},$$

где $\mathbf{V}$ — конечномерный оператор. Так как оператор $\mathbf{T}$ максимально диссипативный, то его резольвентное множество непусто. Тогда из выписанного представления и теоремы о голоморфной оператор-функции (см. [12, гл. 1]), следует дискретность спектра оператора $\mathbf{T}$.

Покажем, что $\mathbf{T}$ не имеет ненулевых вещественных собственных значений. Так как спектр $\mathbf{T}$ дискретен, то достаточно показать, что $\text{Ker}(\mu \mathbf{J} - \mathbf{L}) = 0$ при $0 \neq \mu \in \mathbb{R}$. Пусть

$$(\mu \mathbf{J} - \mathbf{L})\mathbf{u} = 0, \quad \mathbf{u} = (z, w, v)^t \in \mathfrak{H}, \quad 0 \neq \mu \in \mathbb{R}.$$

Тогда $0 = \text{Im}((\mu \mathbf{J} - \mathbf{L})\mathbf{u}, \mathbf{u}) = (Rv, v)$; поэтому $v = 0$. Пользуясь невырожденностью оператора $\mathbf{S}$, из равенства $\mathbf{S}(\mu \mathbf{W} - \mathbf{M}) = \mu \mathbf{J} - \mathbf{L}$ находим $(\mu \mathbf{W} - \mathbf{M})\{z, w, 0\}$. Из определения операторов $\mathbf{W}$ и $\mathbf{M}$ теперь последовательно получаем

$$Bw = 0, \quad w = 0, \quad Hz = 0, \quad \text{и} \quad (\mu I - H)z = 0,$$

что влечет за собой $\mathbf{u} = 0$. Таким образом, оператор $\mathbf{T}$ не имеет ненулевых вещественных собственных значений.

Покажем, что нуль является собственным значением, и вычислим собственный вектор. Пусть $\mathbf{T}\mathbf{u} = 0$. Из равенства $\mathbf{T} = \mathbf{W}^{-1}\mathbf{M}$ имеем $\mathbf{M}\mathbf{u} = 0$. Пользуясь матричным представлением оператора $\mathbf{M}$, находим, что его ядро

состоит из двух линейно независимых векторов $\mathbf{x}_0 = (e_0, 0, 0)^t$ и $\mathbf{x}_1 = (0, e_0, 0)^t$. Положим $\mathbf{x} = \alpha\mathbf{x}_0 + \beta\mathbf{x}_1$. Тогда

$$(\mathbf{J}\mathbf{x}, \mathbf{x}) = \omega^{-2}|\alpha|^2 + a_0(a_0 + 1)|\beta|^2 + 2a_0\omega^{-1} \operatorname{Re}(\alpha\bar{\beta}) > 0,$$

если $\mathbf{x} \neq 0$, т.е. ядро оператора $\mathbf{T}$ является $\mathbf{J}$ -положительным подпространством. В этом случае присоединенных векторов к собственным векторам $\mathbf{x} \in \operatorname{Ker} \mathbf{T}$ быть не может (см. [11, гл. 2]).

Для доказательства утверждения о числе собственных значений оператора $\mathbf{T}$ в нижней полуплоскости воспользуемся фундаментальной теоремой о существовании инвариантных подпространств для максимальных диссипативных операторов в пространстве Понтрягина. По существу эта теорема была доказана Понтрягиным [13] (хотя сформулирована в [13] только для самосопряженных операторов). В приведенной ниже (и даже более общей) формулировке она получена в работах Крейна и Лангера [14] и Азизова [15].

ТЕОРЕМА ОБ ИНВАРИАНТНЫХ ПОДПРОСТРАНСТВАХ. Пусть $\mathbf{T}$ — максимально диссипативный оператор в пространстве Понтрягина $\Pi_{\varkappa} = \{\mathbf{J}, \mathfrak{H}\}$. Тогда существует $\mathbf{T}$ -инвариантное $\mathbf{J}$ -неположительное подпространство $\mathfrak{H}^-$ размерности $\varkappa$, такое, что спектр сужения $\mathbf{T}|_{\mathfrak{H}^-}$ лежит в замкнутой нижней полуплоскости, а в открытой нижней полуплоскости $\mathbb{C}^-$ он совпадает со спектром оператора $\mathbf{T}$.

Мы доказали, что вся вещественная ось, кроме нуля, принадлежит резольвентному множеству оператора $\mathbf{T}$. Ноль является собственным значением этого оператора, но соответствующее этому собственному значению подпространство является $\mathbf{J}$ -положительным. Следовательно, никакой ненулевой вектор этого подпространства не принадлежит $\mathbf{J}$ -неположительному инвариантному относительно $\mathbf{T}$ подпространству $\mathfrak{H}^-$. Поэтому спектр сужения $\mathbf{T}|_{\mathfrak{H}^-}$ лежит в открытой полуплоскости $\mathbb{C}^-$. Но, согласно сформулированной выше теореме, в $\mathbb{C}^-$ он совпадает со спектром оператора $\mathbf{T}$; следовательно, число собственных значений оператора $\mathbf{T}$ в $\mathbb{C}^-$ совпадает с числом $\varkappa = \dim \mathfrak{H}^- = \pi_-(N)$. $\square$

Назовем индексом неустойчивости уравнения (6) размерность факторпространства линейного пространства всех решений по отношению к пространству его ограниченных решений (т.е. число линейно независимых растущих решений по модулю ограниченных решений). Обозначим через $\nu(\mathbf{T})$ индекс неустойчивости уравнения (6). Очевидно, что $\nu(\mathbf{T})$ не меньше числа собственных значений оператора $\mathbf{T}$, лежащих в $\mathbb{C}^-$. Поэтому, согласно теореме 2, $\nu(\mathbf{T}) \geq \pi_-(N)$. Конечно, в общей ситуации индекс неустойчивости может быть строго больше числа собственных значений соответствующего оператора в полуплоскости $\mathbb{C}^-$. Такие примеры известны (см., в частности, [16]). Однако в нашем случае имеет место равенство.

ТЕОРЕМА 3. В случае $n_1 n_2 \neq 0$ индекс неустойчивости $\nu(\mathbf{T})$ уравнения (6) совпадает с числом $\pi_-(N)$. В частности, задача устойчива тогда и только тогда, когда оба числа n_1 и n_2 положительны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $N > 0$, то оператор $\mathbf{J}$ равномерно положителен. Тогда метрика $(\mathbf{J}\mathbf{x}, \mathbf{x})$ в пространстве $\mathfrak{H}$ эквивалентна исходной. В этой

метрике оператор T максимально диссипативный, а потому является генератором сжимающей полугруппы (см. [17, гл. 9]). Следовательно, всякое решение уравнения (6) (понимаемое как равенство в $\mathfrak{H}$) удовлетворяет условию $\|\mathbf{J}^{1/2}u(t)\| \leq \|\mathbf{J}^{1/2}u(0)\|$ при $t \geq 0$, т.е. задача устойчива.

Пусть $\pi_-(N) > 0$. В этом случае задача неустойчива в силу неравенства $\nu(\mathbf{T}) \geq \pi_-(N)$. Вычислим индекс. Пусть $\mathfrak{H}_-$ — (одномерное или двумерное) подпространство, образованное собственными векторами, отвечающими собственным значениям из полуплоскости $\mathbb{C}^-$. Покажем, что $\mathfrak{H}_-$ есть $\mathbf{J}$ -отрицательное подпространство.

Пусть $\mathbf{x} \in \mathfrak{H}_-$, а $\mathbf{u}(t)$ — элементарное решение уравнения (6) с начальным условием $\mathbf{u}(0) = \mathbf{x}$ (в случае $\pi_-(N) = 1$ это решение имеет вид $\mathbf{u}(t) = e^{i\omega\lambda_0 t}\mathbf{x}$, где $\lambda_0 \in \mathbb{C}^-$). Согласно (6), имеем

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\mathbf{J}\mathbf{u}, \mathbf{u}) &= (\mathbf{J}\dot{\mathbf{u}}, \mathbf{u}) + (\mathbf{J}\mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}) = (i\omega\mathbf{J}\mathbf{T}\mathbf{u}, \mathbf{u}) + (\mathbf{u}, i\omega\mathbf{J}\mathbf{T}\mathbf{u}) \\ &= -2\omega \operatorname{Im}(\mathbf{J}\mathbf{T}\mathbf{u}, \mathbf{u}) = -2\nu(Rv, v). \end{aligned}$$

Очевидно, что $\mathbf{u}(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow -\infty$. Интегрируя последнее равенство от $-\infty$ до 0, получим

$$(\mathbf{J}\mathbf{x}, \mathbf{x}) = -2\nu \int_{-\infty}^0 (Rv(t), v(t)) dt.$$

Так как $R > 0$, то $(\mathbf{J}\mathbf{x}, \mathbf{x}) \leq 0$. Предположим, что $(\mathbf{J}\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 0$. Тогда $v(t) \equiv 0$. Выписав по координатам уравнения (5), легко получить, что $\dot{w}(t) \equiv 0$ и $\dot{z}(t) \equiv 0$. Следовательно, вектор $\mathbf{x} = (z, w, 0)^t$ принадлежит ядру оператора $\mathbf{T}$, т.е. отвечает нулевому собственному значению. Это влечет за собой $\mathbf{x} = 0$.

Рассмотрим теперь оператор $\mathbf{J}^{-1}\mathbf{T}^*\mathbf{J} = \mathbf{J}^{-1}\mathbf{L}^*$. Из матричного представления оператора $\mathbf{L}$ вытекает, что $\mathscr{D}(\mathbf{J}^{-1}\mathbf{T}^*\mathbf{J}) = \mathscr{D}(\mathbf{T})$. Очевидно также, что оператор $-\mathbf{J}^{-1}\mathbf{T}^*\mathbf{J}$ максимально $\mathbf{J}$ -диссипативный. Пусть $\mathfrak{H}_-^*$ — инвариантное подпространство оператора $\mathbf{J}^{-1}\mathbf{T}^*\mathbf{J}$, образованное собственными векторами, отвечающими собственным значениям из верхней полуплоскости. Повторив приведенные выше рассуждения, получим, что $\mathfrak{H}_-^*$ является $\mathbf{J}$ -отрицательным. Так как подпространство $\mathfrak{H}_-^*$ конечномерно, то оно равномерно $\mathbf{J}$ -отрицательно. В силу теоремы Понтрягина ([13, теорема 1]) подпространство $\mathfrak{H}_+$, являющееся $\mathbf{J}$ -ортогональным дополнением к $\mathfrak{H}_-^*$, равномерно $\mathbf{J}$ -положительно. Очевидно, что подпространство $\mathfrak{H}_+$ является инвариантным относительно $\mathbf{T}$, а спектр сужения $\mathbf{T}_+ = \mathbf{T}|_{\mathfrak{H}_+}$ лежит в замкнутой верхней полуплоскости. Таким образом, пространство $\mathfrak{H}$ разлагается в прямую сумму инвариантных относительно $\mathbf{T}$ равномерно $\mathbf{J}$ -дефинитных подпространств $\mathfrak{H}_-$ и $\mathfrak{H}_+$. Тогда уравнение (6), рассмотренное на подпространстве $\mathfrak{H}_+$, очевидно, устойчиво. Поэтому индекс неустойчивости $\nu(\mathbf{T})$ равен $\dim \mathfrak{H}_- = \pi_-(N)$. $\square$

В дополнение к теореме 3 заметим, что неустойчивость уравнения (6) в целом влечет за собой неустойчивость движения волчка, т.е. твердой части системы. А именно, справедлив следующий результат.

ТЕОРЕМА 4. Пусть $\mathbf{u}(t) = (z(t), w(t), v(t))^t$ — неограниченное решение уравнения (6). Тогда функция $z(t)$ также неограничена.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В ходе доказательства теоремы 3 найдено разложение пространства $\mathfrak{H}$ в прямую сумму инвариантных относительно $\mathbf{T}$ равномерно $\mathbf{J}$ -дефинитных подпространств: $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_+ \dot{+} \mathfrak{H}_-$. В частности, всякое растущее решение $\mathbf{u}(t)$ уравнения (6) представимо в виде

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}_+(t) + \mathbf{u}_-(t), \quad \text{где } (\mathbf{J}\mathbf{u}_-(t), \mathbf{u}_-(t)) \rightarrow -\infty \text{ при } t \rightarrow +\infty.$$

Положим

$$\mathbf{u}_-(t) = (z(t), w(t), v(t))^t, \quad \mathbf{u}_-^0(t) := \mathbf{S}_0 \mathbf{u}_-(t) = (z(t), w_0(t), v_0(t))^t.$$

Тогда, согласно (7),

$$\begin{aligned} (\mathbf{J}\mathbf{u}_-(t), \mathbf{u}_-(t)) &= (\mathbf{J}_0 \mathbf{u}_-^0(t), \mathbf{u}_-^0(t)) \\ &= \omega^2(Nz(t), z(t)) + ((A - B^*B)w_0(t), w_0(t)) + (v_0(t), v_0(t)). \end{aligned}$$

Так как два последних слагаемых в правой части положительны, а сумма стремится к $-\infty$ при $t \rightarrow +\infty$, то $z(t)$ — неограниченная функция. $\square$

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Оценка сверху числа собственных значений с отрицательной мнимой частью для оператора $\mathbf{T}_1 = \mathbf{J}_1^{-1} \mathbf{L}_1$ получена в работе [9]. Утверждения теорем 2 и 3 о числе собственных значений в полуплоскости $\mathbb{C}^-$ и индексе неустойчивости можно получить как следствие результатов из [18, 19]. Но здесь мы предпочли дать независимое доказательство.

§ 4. Дополнительные свойства оператора $\mathbf{T}$ эволюции системы. Спектр при большой вязкости

Числовой образ оператора $\mathbf{T}$ и свойства собственных функций. Числовым образом оператора F называют множество значений квадратичной формы (Fx, x) , когда x пробегает $\mathscr{D}(F)$, $\|x\| = 1$. Ясно, что спектр оператора лежит в числовом образе. Далее приведем понятие базиса для метода суммирования Абеля порядка α , принадлежащее Лидскому [20]. Пусть оператор F имеет дискретный спектр, причем все его собственные значения, за исключением конечного числа, лежат в угле $|\arg \lambda - \pi/2| < \theta < \pi$. Для краткости считаем, что все собственные значения простые. Говорим, что система $\{y_k\}$ собственных функций оператора F , отвечающих собственным значениям $\{\lambda_k\}$, образует базис для метода суммирования Абеля порядка α , $\alpha < 2\theta/\pi$, если для всех $f \in \mathfrak{H}$ ряд

$$f(t) = \sum e^{(-i\lambda_k)^\alpha t} (f, z_k) y_k$$

сходится при всех $t > 0$ по норме пространства $\mathfrak{H}$ (после, возможно, заключения некоторых членов ряда в скобки, расстановка которых не зависит от f и t), причем существует сильный предел ряда $f(t)$ при $t \rightarrow 0$, равный f . Здесь $\{z_k\}$ — система собственных функций сопряженного оператора, биортогональная к $\{y_k\}$, а $(-i\lambda_k)^\alpha$ понимается как значение главной ветви

аналитической функции λ^α . Очевидно, всякий базис для метода суммирования Абеля является полной системой в $\mathfrak{H}$.

Как и в предыдущем параграфе, мы обозначаем через $\mathbf{T}_\pm$ сужения генератора $\mathbf{T}$ уравнения (6) на инвариантные подпространства $\mathfrak{H}_\pm$, найденные в теореме 2.

ТЕОРЕМА 5. *Числовой образ оператора $\mathbf{T}_+$ лежит в полуполосе $|\operatorname{Re} \lambda| < c_0$, $\operatorname{Im} \lambda > -c_1$ при некоторых постоянных $c_0, c_1 > 0$. Собственные значения $\lambda_k = \lambda_k(\mathbf{T})$ имеют асимптотику*

$$\lambda_k = i \left(\frac{3\pi^2 k}{\operatorname{mes}(\Omega)} \right)^{2/3} \frac{\nu}{\omega} (1 + o(1)), \quad k = 1, 2, 3, \dots, \quad (8)$$

и лежат в полуполосе указанного вида. Они симметричны относительно мнимой оси. Собственные векторы оператора $\mathbf{T}$ образуют базис для метода суммирования Абеля любого порядка $\alpha > 1/2$. В частности, при $\alpha = 1$ получаем, что любое решение уравнения (6) представляется при $t > 0$ в виде сходящегося ряда по собственным функциям оператора $\mathbf{T}$. Оператор $i\mathbf{T}$ является генератором голоморфной полугруппы в пространстве $\mathfrak{H}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathbf{Q}_+$ — ортопроектор на подпространство $\mathfrak{H}_+$ и $\mathbf{J}_+ = \mathbf{Q}_+ \mathbf{J} \mathbf{Q}_+$. Из равномерной $\mathbf{J}$ -положительности подпространства $\mathfrak{H}_+$ следует, что $\mathbf{J}_+$ — равномерно положительный оператор в $\mathfrak{H}_+$. При $\mathbf{x} \in \mathfrak{H}_+$ имеем

$$\begin{aligned} (\mathbf{T}\mathbf{x}, \mathbf{x}) &= (\mathbf{J}_+ \mathbf{T}\mathbf{x}, \mathbf{J}_+^{-1} \mathbf{x}) = (\mathbf{J} \mathbf{T}\mathbf{x}, \mathbf{J}_+^{-1} \mathbf{x}) \\ &= (\mathbf{L}\mathbf{x}, \mathbf{J}_+^{-1} \mathbf{x}) = (\mathbf{Q}_+ \mathbf{L} \mathbf{Q}_+ \mathbf{x}, \mathbf{J}_+^{-1} \mathbf{x}). \end{aligned} \quad (9)$$

Заметим, что если C — равномерно положительный оператор, то вещественная форма $(F\mathbf{x}, \mathbf{x})$ ограничена (полуограничена) тогда и только тогда, когда таковой является форма $(F\mathbf{x}, C\mathbf{x})$. Из матричного представления диссипативного оператора $\mathbf{L}$ вытекает, что вещественная часть формы $(\mathbf{L}\mathbf{x}, \mathbf{x})$ ограничена, а ее мнимая часть полуограничена. Следовательно, тем же свойством обладает форма (9). Поэтому числовой образ оператора $\mathbf{T}_+$ лежит в полуполосе. Вне числового образа $W(\mathbf{T}_+)$ известна оценка резольвенты

$$\|(\lambda - \mathbf{T}_+)^{-1}\| \leq 1/d(\lambda, W(\mathbf{T}_+)), \quad (10)$$

где d — расстояние от λ до $W(\mathbf{T}_+)$. В частности, резольвента имеет максимальное убывание ($\leq c|\lambda|^{-1}$), если λ асимптотически лежит вне малого угла, содержащего мнимую ось. Из известных результатов теории полугрупп (см. [17, гл. 9]) получаем, что $i\mathbf{T}_+$ есть генератор голоморфной полугруппы в пространстве $\mathfrak{H}_+$. Поскольку $\mathbf{T} = \mathbf{T}_+ + \mathbf{T}_-$, где $\mathbf{T}_-$ конечномерен, то этим же свойством обладает оператор $i\mathbf{T}$.

Положим $\mathbf{R} = \operatorname{diag}(I, I, R)$, где R — оператор Стокса. Имеем

$$\mathbf{J} = \mathbf{I} + \mathbf{K}, \quad \mathbf{L} = (i\nu\omega^{-1}\mathbf{I} + \mathbf{V})\mathbf{R}, \quad \mathbf{V} = (\mathbf{L} - i\nu\omega^{-1}\mathbf{R})\mathbf{R}^{-1},$$

где $\mathbf{K}$ — конечномерный, а $\mathbf{V}$ — компактный операторы. Поэтому $\mathbf{T} = i\nu\omega^{-1}(\mathbf{I} + \mathbf{V}_1)\mathbf{R}$, где $\mathbf{V}_1$ — компактный оператор.

Собственные значения операторов $\mathbf{R}$ и R совпадают, кроме одного, $\lambda = 1$. Асимптотика собственных значений оператора Стокса R известна [5] и имеет вид (8) (с точностью до коэффициента ν/ω). Согласно теореме Келдыша–Гохберга–Крейна (см. [12, гл. 5]), аналогичная асимптотика сохраняется и для компактного возмущения $\mathbf{T}$ оператора $\mathbf{R}$. Симметричность собственных значений пучка $\lambda\mathbf{J} - \mathbf{L}$ или оператора $\mathbf{T}$ относительно мнимой оси вытекает из вещественности матриц A , N , iH .

Утверждение о суммируемости методом Абеля достаточно доказать для оператора $\mathbf{T}_+$ в пространстве $\mathfrak{H}_+$. Вне полуполосы мы доказали оценку резольвенты (10). Очевидно, сингулярные числа операторов $\mathbf{T}^{-1}$ и $\mathbf{R}^{-1}$ имеют одинаковую асимптотику (см. [12, гл. 2]), т.е. $s_k(\mathbf{T}) \sim k^p$, $p = 2/3$. Но тогда утверждение о базисе для суммирования методом Абеля порядка $\alpha > p^{-1} - 1 = 1/2$ сразу следует из результата статьи [21]. $\square$

Спектр оператора $\mathbf{T}$ при большой вязкости. С физической точки зрения естественно, что спектр оператора эволюции системы при вязкости $\nu \rightarrow \infty$ будет приближаться к спектру оператора задачи о движении волчка с затвердевшей жидкостью.

Уравнение малых колебаний волчка с затвердевшей жидкостью как целого твердого тела, вращающегося вокруг вертикальной оси, получается проекцией уравнения (5) на подпространство $\mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}^3 \times \{0\}$ в пространстве $\mathfrak{H}$. Следовательно, спектр соответствующей задачи совпадает со спектром матричного пучка

$$V(\lambda) = \lambda \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} H & \omega^{-1}H \\ k\omega^{-1}H & H(A - a_0I) \end{pmatrix} =: \lambda W^{(s)} - M^{(s)},$$

где $W^{(s)}$ и $M^{(s)}$ — проекции операторов $\mathbf{W}$ и $\mathbf{M}$ на $\mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}^3$ — «твердотельную» часть пространства $\mathfrak{H}$. Очевидно, что нуль является двукратным собственным значением пучка $V(\lambda)$. Рассмотрим операторы $\mathbf{S}_1$, $\mathbf{J}_1$, $\mathbf{L}_1$, определенные в замечании 1. Заметим, что собственные значения пучков $\mathbf{V}(\lambda) = \lambda\mathbf{W} - \mathbf{M}$ и $\mathbf{V}_1(\lambda) = \lambda\mathbf{J}_1 - \mathbf{L}_1$ совпадают; то же самое справедливо и для их проекций на $\mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}^3$. А именно, матричные пучки $V(\lambda)$ и

$$\begin{aligned} V_1(\lambda) &= V(\lambda)S_1^{(s)} = \lambda \begin{pmatrix} (\omega^2 N)^{-1} & A(\omega N)^{-1} \\ A(\omega N)^{-1} & A(A + N)N^{-1} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -\omega^{-1}H \\ -\omega^{-1}H & -a_0H \end{pmatrix} \\ &=: \lambda J_1^{(s)} - L_1^{(s)} \end{aligned}$$

имеют одинаковые спектры.

ТЕОРЕМА 6. Пусть $n_1 n_2 \neq 0$. При $\nu \rightarrow \infty$ все собственные значения оператора $\mathbf{T}$ уходят на бесконечность, кроме шести собственных значений, два из которых совпадают с нулем, а остальные четыре приближаются к ненулевым собственным значениям пучка $V(\lambda)$, соответствующего твердотельной части системы. Скорость приближения оценивается величиной $O(\nu^{-1/2})$, если все четыре — простые собственные значения, и величиной $O(\nu^{-1/4})$, если они двукратны. Собственные значения матричных пучков $V(\lambda)$ и $V_1(\lambda)$ симметричны относительно вещественной и мнимой осей. Для собственных значений, уходящих на ∞ , справедливы формулы

$$\lambda_k = \nu \omega^{-1} \lambda_k^{(f)} (1 + o(1)) \quad \text{при } \nu \rightarrow \infty, \quad (11)$$

где $\lambda_k^{(f)}$ — ненулевые собственные значения пучка $\lambda \begin{pmatrix} A & B^* \\ B & I \end{pmatrix} - i \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix}$ в пространстве $\mathbb{C}^3 \times J_0(\Omega)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Симметричность собственных значений пучка $V_1(\lambda)$ (а следовательно, и $V(\lambda)$) относительно вещественной оси следует из его самосопряженности, а относительно мнимой оси — из вещественности матриц A, N, iH .

Положим $\mu = \omega/\nu$, $\rho = \mu^{1/2}$ и умножим пучок $\lambda \mathbf{J}_1 - \mathbf{L}_1$ слева и справа на оператор $\text{diag}(I, I, \mu^{1/2} R^{-1/2})$. Получим, что собственные значения оператора $\mathbf{T}$ совпадают с собственными значениями пучка

$$\mathbf{S}_\rho(\lambda) = \lambda \begin{pmatrix} J_1^{(s)} & \rho C_1^* \\ \rho C_1 & \rho^2 C \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} L_1^{(s)} & 0 \\ 0 & \rho^2 G + iI \end{pmatrix}, \quad (12)$$

где C, C_1 — некоторые ограниченные операторы, вид которых сейчас не существует. Согласно теореме Реллиха–Като (см. [17, гл. 7]), при малых ρ (или больших ν) собственные значения пучка $\mathbf{S}_\rho(\lambda)$ лежат в малых окрестностях собственных значений пучка $\mathbf{S}_0(\lambda)$, т.е. в нуле, в окрестности ∞ и в окрестностях четырех ненулевых симметричных собственных значений пучка $V_1(\lambda)$.

В общем положении, когда эти ненулевые собственные значения простые, их возмущения аналитически зависят от ρ ; поэтому скорость приближения пропорциональна величине $\rho = \mu^{1/2}$. Если же невозмущенные собственные значения двукратны, то для их возмущений справедливы разложения в ряды Пьюизо по степеням $\rho^{1/2}$; поэтому скорость приближения не превосходит величины $O(\mu^{1/4})$. Собственных значений кратности, большей двух, нет в силу симметрии.

Заметим, что

$$\rho(\lambda \mathbf{W} - \mathbf{M}) = \rho \lambda \mathbf{W} - i \text{diag}\{0, 0, R\} + \mathbf{K}(\rho),$$

где $\mathbf{K}(\rho) = O(\rho)$. Вновь применяя теорему Реллиха–Като, получим формулы (11) для собственных значений, уходящих на ∞ . $\square$

Особый интерес представляют вещественные собственные значения пучка $V(\lambda)$, если они есть. Из какой полуплоскости и как приближаются к ним собственные значения оператора $\mathbf{T}$ при $\nu \rightarrow \infty$? Ответ дает следующая теорема.

ТЕОРЕМА 7. Пусть λ_0 — простое вещественное собственное значение пучка $V(\lambda)$, а $h_0 = (z_0, w_0)^t$ — соответствующий собственный вектор. Тогда собственное значение λ оператора $\mathbf{T}$, близкое к λ_0 , имеет вид

$$\lambda = \lambda_0 + ci\mu + O(\mu^{3/2}), \quad c = \frac{\omega \lambda_0^2 (B^* R^{-1} B w_0, w_0)}{(J^{(s)} h_0, h_0)}. \quad (13)$$

Здесь $J^{(s)}$ — сужение оператора $\mathbf{J}$ на $\mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}^3$. Таким образом, λ находится в верхней или нижней полуплоскости в зависимости от знака числа $(J^{(s)} h_0, h_0)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из представления (12) для пучка $\mathbf{S}_\rho(\lambda)$ и теоремы Реллиха–Като следует аналитическая зависимость собственного значения λ оператора $\mathbf{T}$ и соответствующего собственного вектора $\mathbf{f}$ от параметра ρ , а

именно

$$\lambda = \lambda_0 + c_1\rho + c_2\rho^2 + \dots, \quad \mathbf{f} = \mathbf{f}_0 + \rho\mathbf{f}_1 + \rho^2\mathbf{f}_2 + \dots.$$

Положим $\mathbf{f}_j = (g_j, r_j)^t$, $j = 1, 2, 3$, где g_j — проекции векторов $\mathbf{f}_j$ на $\mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}^3$. Выпишем первые коэффициенты разложения по степеням ρ уравнения $\mathbf{S}_\rho(\lambda)\mathbf{f} = 0$. Выписав первые два коэффициента, получим

$$\begin{aligned} \lambda_0 J_1^{(s)} g_0 - L_1^{(s)} g_0 &= 0, \quad r_0 = 0, \\ \lambda_0 C_1 g_0 - ir_1 &= 0, \quad c_1 J_1^{(s)} g_0 + \lambda_0 J_1^{(s)} g_1 - L_1^{(s)} g_1 - C_1 r_0 = 0. \end{aligned}$$

Из этих равенств имеем $c_1(J_1^{(s)} g_0, g_0) = 0$. Известно, что собственный вектор самосопряженного пучка $V_1(\lambda)$, отвечающий простому вещественному собственному значению, является $J_1^{(s)}$ -дефинитным. Поэтому $c_1 = 0$. Далее, коэффициент при ρ^2 равен

$$c_2 J_1^{(s)} g_0 + \lambda_0 C_1^* r_1 + \lambda_0 J_1^{(s)} g_2 - L_1^{(s)} g_2 = 0.$$

Но тогда

$$c_2(J_1^{(s)} g_0, g_0) - i\lambda_0^2(C_1^* C_1 g_0, g_0) = 0. \quad (14)$$

Собственный вектор $h_0 = (z_0, w_0)^t$ пучка $V(\lambda)$, очевидно, равен $S_1^{(s)} g_0$. Выписав выражение для оператора C_1 в (12) с учетом равенств $\mathbf{W}\mathbf{S}_1 = \mathbf{J}_1$ и $W^{(s)} S_1^{(s)} = J_1^{(s)}$, найдем, что

$$C_1 g_0 = R^{-1/2} W^{(s)} h_0 = R^{-1/2} B w_0.$$

Из равенства $J_1^{(s)} = (S_1^{(s)})^* J^{(s)} S_1^{(s)}$ (ср. (7)) и равенства (14) теперь находим выражение для коэффициента $c_2 = ic$ в (13). $\square$

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Знак числа $(J_1^{(s)} g_0, g_0) = (J^{(s)} h_0, h_0)$ определяет тип собственного значения λ_0 самосопряженного пучка $V_1(\lambda)$. В силу симметрии собственные значения λ_0 и $-\lambda_0$ имеют одинаковый тип. Если вещественных значений только два, то оба они положительного типа, так как в противном случае при больших ν в нижней полуплоскости будет находиться три собственных значения оператора $\mathbf{T}$, что невозможно. Если вещественных значений четыре (что возможно лишь в случае $n_1 n_2 > 0$), то их тип положителен, если оба числа n_1 и n_2 положительны, а в противном случае одна из пар симметричных собственных значений имеет отрицательный тип. В частности, утверждение теоремы 2 о числе собственных значений оператора $\mathbf{T}$ в нижней полуплоскости можно получить, опираясь только на теорему 7 и принимая во внимание, что ненулевых вещественных собственных значений нет.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Оператор $B^* R^{-1} B$ вычислен в [3] для некоторых форм полостей. Формула (13) получена в [3] и [22] в случае $k = 0$, когда сила тяжести отсутствует.

Все рассуждения мы приводили в предположении, что $n_1 n_2 \neq 0$. Однако, поведение собственных значений оператора $\mathbf{T}$ можно исследовать без этого

предположения. Интересно также проследить, как осуществляется переход собственного значения из верхней полуплоскости в нижнюю при изменении параметра угловой скорости ω , когда ω проходит критическое значение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. Пусть ω таково, что $n_1 = 0$, а $n_2 \neq 0$. Тогда нуль — трехкратное полупростое собственное значение оператора $\mathbf{T} = \mathbf{T}(\omega)$. При малых ε у оператора $\mathbf{T}(\omega + \varepsilon)$ есть простое собственное значение $\lambda(\varepsilon)$, удовлетворяющее равенству

$$\lambda(\varepsilon) = \frac{2k\varepsilon}{\omega^2(D^{-1}Be_1, Be_1)} + O(\varepsilon^2) \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow \pm 0.$$

Здесь e_1 — единичный вектор, определенный в §1. Число $(D^{-1}Be_1, Be_1)$ чисто мнимое.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Проверка того, что нуль — трехкратное полупростое собственное значение, осуществляется так же, как в теореме 2. В силу (7) собственные значения оператора $\mathbf{T}$ и пучка $\lambda\mathbf{J}_0 - \mathbf{L}_0$, где $\mathbf{L}_0 = (\mathbf{S}_0^*)^{-1}\mathbf{L}\mathbf{S}_0^{-1}$, совпадают. Для операторов $\mathbf{J}_0$ и $\mathbf{L}_0$ легко выписать их разложения по степеням ε , ограничившись первыми двумя членами. Несложно убедиться, что $(GBe_1, Be_1) = 0$. Поэтому собственное значение $\lambda(\varepsilon)$ проходит через нуль по мнимой оси (здесь мы учитываем также симметрию). Далее доказательство проводится точно так же, как в теореме 7. Поэтому его детали мы опускаем. $\square$

§5. Случай симметричного волчка

Инвариантные подпространства. В случае симметрии можно выделить инвариантные подпространства оператора $\mathbf{T}$ и провести в них исследования на устойчивость. Пусть Ox_0 — ось симметрии волчка порядка p . Иными словами, если волчок повернуть на угол $2\pi/p$ вокруг оси Ox_0 , то он совместится сам с собою. Далее считаем, что $p > 2$. Для тела вращения считаем, что $p = \infty$. Введем операторы

$$U_s = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 2\pi s/p & \sin 2\pi s/p \\ 0 & -\sin 2\pi s/p & \cos 2\pi s/p \end{pmatrix}, \quad \mathbf{U}_s = \begin{pmatrix} U_s & 0 & 0 \\ 0 & U_s & 0 \\ 0 & 0 & V_s \end{pmatrix},$$

где оператор V_s определен равенством $V_s v = U_s(v(U_{-s}x))$. В случае $p = \infty$ операторы $\mathbf{U}_s$ определим теми же равенствами, заменив p на 2π .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. Если Ox_0 — ось симметрии волчка порядка p , то при любом целом s (в случае $p = \infty$ при любом $s \in \mathbb{R}$) справедливы равенства

$$AU_s = U_s A, \quad HU_s = U_s H, \quad B^*V_s = V_s B^*, \quad V_s D = D V_s. \quad (15)$$

Операторы $\mathbf{T}$ и $\mathbf{U}_s$ перестановочны. Операторы

$$\mathbf{Q}_j = \frac{1}{p} \sum_{l=0}^{p-1} e^{2\pi i l j/p} \mathbf{U}_l \quad \left(\mathbf{Q}_j = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{ijx} \mathbf{U}_x dx, \quad \text{если } p = \infty \right)$$

являются ортопроекторами в $\mathfrak{H}$. При этом $\sum_{j=0}^{p-1} \mathbf{Q}_j = \mathbf{I}$ (при $p = \infty$ $\sum_{j=-\infty}^{\infty} \mathbf{Q}_j = \mathbf{I}$). Подпространства $\mathfrak{H}_j = \mathbf{Q}_j(\mathfrak{H})$ являются инвариантными относительно оператора $\mathbf{T}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Равенство (15) следует из определения (см. лемму 1 из [8]). Остальные утверждения вытекают непосредственно из этих равенств. Отметим, что при $p = \infty$ интеграл в определении проекторов $\mathbf{Q}_j$ понимается в смысле Петтиса. $\square$

Легко видеть, что $\mathbf{Q}_j = \mathbf{Q}_{j-p}$. Вместо $\mathbf{Q}_{p-1}$ далее удобнее рассматривать $\mathbf{Q}_{-1}$.

ТЕОРЕМА 8. В случае симметрии порядка p ($2 < p \leq \infty$) уравнение (6) устойчиво в подпространствах $\mathfrak{H}_j$ при всех $j \neq \pm 1$. В подпространствах $\mathfrak{H}_{\pm 1}$ уравнение имеет индекс неустойчивости 1, если $n_1 (= n_2) < 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для определенности считаем $p < \infty$. Изменения при $p = \infty$ очевидны. Проекторы $\mathbf{Q}_j$ имеют вид $\text{diag}(R_j, R_j, Q_j)$, причем

$$R_{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & i \\ 0 & -i & 1 \end{pmatrix}, \quad R_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$R_1 = \overline{R_{-1}}, \quad R_j = 0 \text{ при } j \neq 0, \pm 1,$$

где Q_j — ортопроектор в $J_0(\Omega)$ на векторные поля $v(x)$, которые после поворота на угол $2\pi/p$ вокруг оси Ox_0 совпадают с $e^{-2\pi i j/p} v(x)$. Следовательно, при $j \neq 0, \pm 1$ уравнение (6) в подпространстве $\mathfrak{H}_j = \{0\} \times \{0\} \times Q_j(J_0(\Omega))$ имеет вид $\dot{v} = i\omega Dv$ и в силу диссипативности оператора D является устойчивым.

Подпространство $\mathfrak{H}_0$ имеет вид $\mathbb{C}e_0 \times \mathbb{C}e_0 \times Q_0(J_0(\Omega))$. Из равенства $R_0 B^* = B^* Q_0$ следует, что $\mathfrak{H}_0$ инвариантно относительно $\mathbf{L}$. Имеем $\mathbf{J} = \mathbf{S}_0^* \mathbf{J}_0 \mathbf{S}_0$. Заметим, что

$$\mathbf{S}_0(\mathfrak{H}_0) \subset \mathbb{C}e_0 \times \mathbb{C}e_0 \times J_0(\Omega) =: \mathfrak{H}'_0,$$

а на подпространстве $\mathfrak{H}'_0$ оператор $\mathbf{J}_0$ положителен. Следовательно, $\mathbf{J}$ положителен на $\mathfrak{H}_0$. Но тогда оператор $\mathbf{T} = \mathbf{J}^{-1} \mathbf{L}$ является максимально диссипативным в скалярном произведении $(\mathbf{J}\mathbf{x}, \mathbf{x})$ на $\mathfrak{H}_0$, которое эквивалентно обычному, а потому уравнение (6) устойчиво на $\mathfrak{H}_0$.

Поскольку $\mathbf{T}\bar{\mathbf{u}} = -\overline{\mathbf{T}\mathbf{u}}$ (здесь черта означает комплексное сопряжение), а $\mathfrak{H}_{-1}$ состоит из векторов, комплексно сопряженных к $\mathfrak{H}_1$, то индекс неустойчивости уравнения (6) в $\mathfrak{H}_1$ и $\mathfrak{H}_{-1}$ одинаков. При $n_1 < 0$ индекс неустойчивости в $\mathfrak{H}_1$ не может быть нулем или большим единицы (иначе получаем противоречие с теоремой 3). Следовательно, он равен 1. $\square$

Связь с уравнениями Соболева. В случае симметричного волчка и идеальной жидкости ($\nu = 0$) Соболев [1] изучал оператор $\mathbf{F}$ в пространстве $\mathbb{C} \times \mathbb{C} \times J_0(\Omega)$, который определял следующим образом:

$$\mathbf{F}(z, w, v) = (z^1, w^1, v^1).$$

Здесь числа z^1 , w^1 и функция $v^1 = (v_0^1, v_1^1, v_2^1) \in J_0(\Omega)$ находятся из уравнений

$$\begin{aligned} v_0^1 &= i \frac{\partial p}{\partial x_0}, & v_2^1 &= -2\omega i v_1 + i \frac{\partial p}{\partial x_2} + 2\omega w \frac{\partial \bar{\chi}}{\partial x_1}, \\ v_1^1 &= 2\omega i v_2 + i \frac{\partial p}{\partial x_1} - 2\omega w \frac{\partial \bar{\chi}}{\partial x_2}, & z^1 &= \omega w, & \operatorname{div} v &= \operatorname{div} v^1 = 0, \\ v_n^1|_{\partial\Omega} &= 0, & A_1 w^1 &= A_2 w + A_3 z + \int_{\Omega} \left(v_2 \frac{\partial \chi}{\partial x_1} - v_1 \frac{\partial \chi}{\partial x_2} \right) d\Omega. \end{aligned}$$

В этих уравнениях функция χ определена условиями

$$\Delta \chi = 0, \quad \frac{\partial \chi}{\partial n} \Big|_{\partial\Omega} = x_0(\cos nx_2 + i \cos nx_1) - (x_2 + ix_1) \cos nx_0.$$

Можно проверить, что функция χ удовлетворяет равенству

$$P_0 \left(\frac{\partial \chi}{\partial x_2}, -\frac{\partial \chi}{\partial x_1}, 0 \right)^t = (BH - GB)e, \quad e = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, i)^t, \quad (16)$$

а оператор $\mathbf{F}$ есть сужение оператора $\mathbf{T}_0 = \mathbf{S}_0 \mathbf{T} \mathbf{S}_0^{-1}$ на подпространство $\mathfrak{H}_1$ (см. подробнее [8, 9]). Тем самым при $\nu = 0$ изучение оператора Соболева $\mathbf{F}$ сводится к изучению оператора $\mathbf{T}_0$. Нам неизвестно, как определить оператор Соболева $\mathbf{F}$ для вязкой жидкости. Трудность состоит в том, что в равенстве (16) нельзя вместо оператора G взять D , так как вектор Be не содержится в области определения оператора Стокса R . Действительно, если $Be \subset \mathcal{D}(R)$, то справедливо равенство $Be = [e, x] + \nabla p$, откуда получаем

$$RBe = \Delta([e, x]) + \nabla \Delta p + \nabla q = \nabla(\Delta p + q).$$

Здесь p и q — некоторые гладкие функции. Следовательно, $P_0 RBe = RBe = 0$. Это противоречит условию $R \gg 0$.

Авторы благодарят В. В. Козлова, В. Б. Лидского, Е. С. Пятницкого и Ф. Л. Черноусько за полезное обсуждение работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Соболев С. Л. О движении симметричного волчка с полостью, наполненной жидкостью. ПМТФ, № 3, 20–55 (1960).
2. Румянцев В. В. Методы Ляпунова в исследовании устойчивости движения твердых тел с полостями, наполненными жидкостью. Изв. АН СССР, сер. механика и машиностроение, № 6, 119–140 (1963).
3. Черноусько Ф. Л. Движения твердого тела с полостью содержащей вязкую жидкость. ВЦ АН СССР, 1968.
4. Моисеев Н. Н., Румянцев В. В. Динамика тела с полостями, содержащими жидкость. Наука, М., 1965.
5. Копачевский Н. Д., Крейн С. Г., Нго Зуи Кан. Операторные методы в линейной гидродинамике: эволюционные спектральные задачи. Наука, М., 1989.
6. Смирнова Е. П. Устойчивость свободного вращения волчка содержащего тороидальную полость с жидкостью малой вязкости. МТТ, № 5, 20–25 (1976).

7. Черноусько Ф. Л. Вращательные движения твердого тела с полостью, заполненной жидкостью. ПММ, **31**, 416–432 (1967).
8. Юркин М. Ю. О конечномерности задачи о малых колебаниях волчка с полостью, заполненной идеальной жидкостью. Функц. анализ и его прил., **31**, вып. 1, 51–66 (1997).
9. Юркин М. Ю. Об устойчивости вращающегося несимметричного волчка с жидким наполнением. Принята к печати в ДАН.
10. Ладыженская О. А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. Наука, М., 1970.
11. Азизов Т. Я., Иохвидов И. С. Основы теории линейных операторов в пространствах с индефинитной метрикой. Наука, М., 1986.
12. Гохберг И. Ц., Крейн М. Г. Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. Наука, М., 1965.
13. Понтрягин Л. С. Эрмитовы операторы в пространстве с индефинитной метрикой. Изв. АН СССР, сер. матем., **8**, № 6, 243–280 (1944).
14. Крейн М. Г., Лангер Г. К. О дефинитных подпространствах и обобщенных резольвентах эрмитовых операторов в пространствах $P_{\mathcal{H}}$. Функц. анализ и его прил., **5**, вып. 2, 59–71 (1971); **5**, вып. 3, 54–69 (1971).
15. Азизов Т. Я. Диссипативные операторы в гильбертовом пространстве с индефинитной метрикой. Изв. АН СССР, сер. матем., **37**, № 3, 639–662 (1973).
16. Милославский А. И. Об устойчивости некоторых классов эволюционных уравнений. Сиб. матем. ж., XXVI, № 5, 118–132 (1985).
17. Kato T. Теория возмущений линейных операторов. Мир, М., 1972.
18. Shkalikov A. A. Operator pencils arising in elasticity and hydrodynamics: the instability index formula. In: Operator Theory: Advances and Applications, Vol. 87, Birkhäuser, 1996, pp. 258–285.
19. Шкаликов А. А. Формула индекса неустойчивости для уравнений с диссипацией. УМН, **51**, вып. 5, 195–196 (1996).
20. Лидский В. Б. О суммируемости рядов по главным векторам несамосопряженных операторов. Труды ММО, **11**, 3–35 (1962).
21. Shkalikov A. A. Estimates of holomorphic functions and summability theorem. Pacific J. Math., **103**, No. 2, 569–582 (1982).
22. Смирнова Е. П. Стабилизация свободного вращения ассиметрического волчка с полостями, целиком заполненными жидкостью. ПММ, **38**, 980–985 (1974).