Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. С. Городецкий, Ю. С. Ильяшенко, Некоторые новые грубые свойства инвариантных множеств и аттракторов динамических систем, *Функц. анализ и его прил.*, 1999, том 33, выпуск 2, 16–30

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa351>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.209.158.208

26 апреля 2023 г., 07:25:58

УДК 517.938

Некоторые новые грубые свойства инвариантных множеств и аттракторов динамических систем*

© 1999. А. С. Городецкий, Ю. С. Ильяшенко

§1. Введение

В настоящей работе описываются новые грубые свойства (частично гиперболических) инвариантных множеств и аттракторов, в частности, сосуществование плотных множеств периодических орбит различных индексов и существование плотной орбиты с нулевым показателем Ляпунова. Точные формулировки этих свойств приведены ниже в теореме А. Частично гиперболические инвариантные множества, обладающие свойством устойчивой транзитивности, активно изучались [3–7]. Обзор этой области, включая обширную библиографию, можно найти в [8].

1.1. Основные результаты.

ТЕОРЕМА А. Для данного конечного интервала $I \subset \mathbb{R}$, $0 \in I$, и замкнутого многообразия M , $\dim M \geq 3$, найдется такая область $U \subset \text{Diff}^2(M)$, что для любого диффеоморфизма $f \in U$ имеется локально максимальное инвариантное множество $\Delta \subset M$, обладающее следующими свойствами:

(i) существуют такие два числа l_1 и $l_2 = l_1 + 1$, что гиперболические периодические орбиты с устойчивыми многообразиями размерности l_i плотны в Δ ;

(ii) для любого $\lambda \in I$ найдется плотная в Δ орбита с одним из промежуточных показателей Ляпунова, равным λ .

ДОБАВЛЕНИЕ. В качестве множества Δ в теореме А при $\dim M \geq 4$ можно взять частично гиперболический аттрактор.

Гипотеза о существовании открытого множества отображений со свойством (i) была сформулирована в [9]. Для систем, обладающих свойством (ii), неверен аналог теоремы об ε -траекториях, как показано в [2, 10]. Системы, описанные в теореме А, могут появляться при некоторых нелокальных бифуркациях.

ТЕОРЕМА В. Существует такое открытое множество однопараметрических семейств векторных полей в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 4$, что для каждого семейства из этого множества

(1) нулевое значение параметра соответствует векторному полю на границе множества Морса–Смейла с седлоузловым циклом;

(2) существует такое открытое подмножество $\mathcal{B} \subset \mathbb{R}$ с нулем на границе, что отображения Пуанкаре векторных полей, соответствующих значениям параметра из этого подмножества, обладают частично гиперболическим множеством, описанным в теореме А;

* Авторы были частично поддержаны грантами RFBR 98-01-00455, INTAS-93-0570 ext, CRDF RM1-229.

(3) *подмножество $\mathcal{B}$ имеет положительную плотность в нуле.*

Основным ингредиентом нашей конструкции являются случайные динамические системы, реализованные как подсистемы (ограничения на инвариантные подмножества) гладких динамических систем. На самом деле мы могли бы использовать понятие косого произведения вместо понятия случайной динамической системы, но мы используем последнее, чтобы подчеркнуть многообещающую связь, которая может стать объектом дальнейших исследований.

1.2. Ступенчатые и мягкие случайные динамические системы. Простой пример случайной динамической системы выглядит следующим образом. Рассмотрим два диффеоморфизма окружности, f_0 и f_1 , и случайную бесконечную в обе стороны последовательность из нулей и единиц

$$\omega = \dots \omega_{-n} \dots \omega_{-1} \omega_0 \omega_1 \dots \omega_n \dots$$

Соответствующая случайная динамическая система диффеоморфизмов окружности — это последовательность $\{F_n\}$ произведений двух заданных диффеоморфизмов, где выбор сомножителя на k -м месте определяется k -м элементом случайной последовательности. При $n > 0$ имеем

$$F_n = f_{\omega_n} \circ F_{n-1}, \quad F_0 = f_{\omega_0}.$$

Эта система может быть включена в косое произведение следующим образом. Пусть Σ^2 есть пространство всех двусторонних последовательностей из 0 и 1 и σ — сдвиг Бернулли $\Sigma^2 \rightarrow \Sigma^2$. Отображение

$$F: \Sigma^2 \times S^1 \rightarrow \Sigma^2 \times S^1, \quad (\omega, \varphi) \mapsto (\sigma\omega, f_{\omega_0}(\varphi)), \quad (1.1)$$

называется (универсальной) случайной динамической системой. На самом деле отображение F детерминировано. Но любая орбита случайной динамической системы, определенной в начале этого раздела, является орбитой некоторой точки под действием F . Более общий пример получается при замене Σ^2 на Σ^N и S^1 на замкнутое риманово многообразие M :

$$F: \Sigma^N \times M \rightarrow \Sigma^N \times M, \quad (\omega, \varphi) \mapsto (\sigma\omega, f_{\omega_0}(\varphi)). \quad (1.2)$$

Первый сомножитель в произведении $\Sigma \times M$ будем называть *базой*, а второй *слоем*. Метрика d_M на слое индуцируется римановой структурой. Метрика на Σ^N определяется следующим образом:

$$d_{\Sigma^N}(\omega, \omega') = 2^{-l}, \quad l = \min\{j \in \mathbb{Z}^+ \mid \omega_j \neq \omega'_j \text{ или } \omega_{-j} \neq \omega'_{-j}\}. \quad (1.3)$$

Заметим, что ограничение отображения F , заданного формулой (1.2), на слой над точкой ω зависит не от всей последовательности ω , а только от ее элемента ω_0 . Мы называем такие системы *ступенчатыми* случайными динамическими системами. В теории случайных динамических систем это соответствует случаю независимых одинаково распределенных случайных отображений [1]. Мы будем также рассматривать отображения

$$G: \Sigma^N \times M \rightarrow \Sigma^N \times M, \quad (\omega, \varphi) \mapsto (\sigma\omega, f_\omega(\varphi)), \quad (1.4)$$

где $f_\omega: M \rightarrow M$ зависит от всей последовательности ω . Мы будем говорить о таких отображениях как о *мягких* случайных динамических системах.

Общий план работы и добавление к теореме А принадлежат второму автору. Результаты §2 были доказаны авторами совместно. Остальные результаты статьи были доказаны первым автором. Подробные доказательства (довольно технические и длинные) будут опубликованы отдельно.

§2. Свойства ступенчатых случайных динамических систем

Здесь мы показываем, что свойства, подобные свойствам (i), (ii) из теоремы А, появляются в ступенчатых динамических системах.

2.1. Локально типичные свойства ступенчатых случайных динамических систем. Рассмотрим отображение F , заданное формулой (1.2). Оно полностью определяется выбором N диффеоморфизмов $f_0, \dots, f_{N-1}$ окружности S^1 в себя.

ТЕОРЕМА 1. *Для любого $N \in \mathbb{N}$ найдется такой интервал $I \subset \mathbb{R}$, $0 \in I$, и N таких открытых множеств $U_0, \dots, U_{N-1} \subset \text{Diff}^1(S^1)$, что для любых $f_0, \dots, f_{N-1}, f_j \in U_j$, отображение F , заданное формулой (1.2), обладает следующими свойствами:*

(i) *периодические орбиты отображения F с мультипликатором вдоль окружности, по модулю большим единицы, плотны в $\Sigma^N \times S^1$, и то же самое справедливо для периодических орбит с мультипликатором, по модулю меньшим единицы;*

(ii) *для любого $\lambda \in I$ существует плотная в $\Sigma^N \times S^1$ орбита с ляпуновским показателем вдоль окружности, равным λ ;*

(iii) *если орбита последовательности $\omega \in \Sigma^N$ под действием сдвига Бернулли σ плотна в Σ^N , то для любого $\varphi \in S^1$ орбита точки (ω, φ) под действием F плотна в $\Sigma^N \times S^1$.*

2.2. Пример. Положим $N = 2$. В качестве примера множеств U_0 и U_1 в теореме 1 можно взять малые C^1 -окрестности следующих диффеоморфизмов g_0, g_1 .

Пусть g_0 есть поворот окружности $S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ на малый угол, скажем $0,1$. Пусть g_1 есть диффеоморфизм с двумя неподвижными точками, аттрактором q и репеллером p . Все остальные точки сдвигаются от p к q под действием положительных итераций диффеоморфизма g_1 . Предположим также, что $q = 0$, $p = \frac{1}{2}$ и g_1 линейно в некоторых окрестностях точек q и p . А именно, на $O(q) = (-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}) \subset S^1$ отображение g_1 является растяжением $\varphi \mapsto a\varphi$, на $O(p) = (\frac{1}{4}, \frac{3}{4}) \subset S^1$ отображение g_1^{-1} имеет сходный вид: $\varphi \mapsto a(\varphi - \frac{1}{2}) + \frac{1}{2}$, и $\max_{S^1} |Dg_1| \leq a$, $\max_{S^1} |Dg_1^{-1}| \leq a$. Тогда выполняются утверждения теоремы 1 (с интервалом $I = (-\frac{1}{4} \ln 2; \frac{1}{4} \ln 2)$ для $a = \sqrt{2}$.)

2.3. Периодические орбиты. Чтобы проиллюстрировать теорему 1, мы докажем следующее предложение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Утверждение (i) теоремы 1 выполнено для отображения F , заданного формулой (1.1), с $f_0 = g_0$, $f_1 = g_1$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть Θ есть произвольное открытое множество в $\Sigma^2 \times S^1$. Найдется такая конечная последовательность $\alpha_{-n} \dots \alpha_0 \dots \alpha_{n-1}$ из 0 и 1 и такая малая дуга $J \subset S^1$, $a^n |J| < 0,1$, что $U \times J \subset \Theta$, где $U = \{\omega \mid \omega_j = \alpha_j, j \in \{-n, \dots, n-1\}\}$ и $|J|$ обозначает длину дуги J . Мы найдем периодическую точку в $U \times J$ с мультипликатором вдоль окружности, большим единицы.

Пусть J_ω обозначает дугу $\{\omega\} \times J$ и $\pi: \Sigma^2 \times S^1 \rightarrow S^1$ — проекцию вдоль первого сомножителя. Тогда для любого $\omega \in U$

$$\pi \circ F^n J_\omega = f^+ J, \quad \pi \circ F^{-n} J_\omega = f^- J,$$

где $f^+ = f_{\omega_{n-1}} \circ \dots \circ f_{\omega_0}$, $f^- = f_{\omega_{-n}}^{-1} \circ \dots \circ f_{\omega_{-1}}^{-1}$. Пусть $J^\pm = f^\pm J$. По нашему выбору J выполняются неравенства $|J^-| < 0,1$. Если бы мы нашли такую конечную композицию g отображений g_0 и g_1 , что образ дуги J^+ покрывал бы дугу J^- с сильным растяжением, то под действием отображения $f = (f^-)^{-1} \circ g \circ f^+ : S^1 \rightarrow S^1$ дуга J накрывалась бы своим образом и ограничение отображения f на J было бы растяжением. Из этого бы следовало существование периодической точки в J для этого отображения с положительным мультипликатором. Рассматривая соответствующую периодическую последовательность из Σ^2 , мы бы нашли требуемую периодическую точку отображения F , заданного формулой (1.1), в $U \times J \subset \Sigma^2 \times S^1$. Итак, чтобы закончить доказательство, достаточно следующей леммы.

ЛЕММА 1. *Для любых двух дуг J^- , $J^+ \subset S^1$, $|J^-| < 0,1$, и любого $K > 0$ найдется такая дуга $J^{++} \subset J^+$ и такая конечная композиция g отображений g_0 и g_1 , что $g(J^{++}) \supset J^-$, $Dg|_{J^{++}} > K$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 1. Выберем дугу $J^{++} \subset J^+$ настолько малой, что $K < 0,1/|J^{++}|$. С помощью не более чем десяти поворотов дуга J^{++} может быть отображена в растягивающуюся окрестность $O(q)$. Применение g_1 растягивает дугу с мультипликатором a . После m применений этой процедуры мы получим дугу длины $a^m|J^{++}|$. Таким образом, для достаточно большого m мы получим дугу длины больше 0,1. Далее, посредством не более десяти поворотов эта дуга накрывает дугу J^- . Из выбора J^{++} и m следует, что $a^m > K$, т.е. $Dg|_{J^{++}} > K$, где g — это построенная композиция. Доказательство закончено.

§3. Гладкая реализация

Мы хотим найти такую гладкую динамическую систему, что ее ограничение на некоторое локально максимальное инвариантное подмножество сопряжено со ступенчатой случайной динамической системой F , заданной формулой (1.2).

3.1. Косые произведения как гладкие реализации случайных динамических систем. Рассмотрим стандартную подкову Смейла, реализованную как отображение попарно непересекающихся прямоугольников. А именно, пусть $D = D_0 \cup \dots \cup D_{N-1}$, $D' = D'_0 \cup \dots \cup D'_{N-1}$, $D_i \cap D_j = \emptyset$, $D'_i \cap D'_j = \emptyset$ при $i \neq j$. Мы обозначаем область той же буквой, что и дифференциал отображения; смысл обозначения всегда ясен из контекста. Пусть $S : D \rightarrow D'$ — такое отображение, что $S|_{D_i} : D_i \rightarrow D'_i$ является ограничением на D_i линейного гиперболического отображения с константами сжатия и растяжения, равными $k \in (0,1)$ и $k^{-1} > 1$ соответственно. Заметим, что коэффициент k может быть выбран произвольно малым при подходящем выборе прямоугольников D_i и D'_i .

Известно, что отображение S имеет инвариантное множество Λ , гомеоморфное Σ^N , и $S|_\Lambda$ сопряжено сдвигу Бернулли $\sigma : \Sigma^N \rightarrow \Sigma^N$.

Рассмотрим локально постоянную функцию $i : D \rightarrow \{0, \dots, N-1\}$, определенную следующим образом: $i(x) = j \iff x \in D_j$. Косое произведение

$$\mathfrak{F} : D \times M \rightarrow D' \times M, \quad \mathfrak{F}(x, \varphi) = (S(x), f_{i(x)}(\varphi))$$

называется k -реализацией системы (1.2).

Легко видеть, что $\mathfrak{F}|_{\Lambda \times M}$ сопряжено с отображением F из формулы (1.2). Множество $\Lambda \times M$ — частично гиперболическое множество для $\mathfrak{F}$, и его центральные многообразия являются слоями проекции на первый сомножитель: $\Lambda \times M \rightarrow \Lambda$, $\Lambda \simeq \Sigma^N$.

Возникает вопрос: что происходит при малом возмущении отображения $\mathfrak{F}$?

3.2. Гладкие возмущения косых произведений. Пусть

$$L = \max_{i \in \{0, \dots, N-1\}} \max_{\varphi \in M} (\|Df_i(\varphi)\|, \|Df_i^{-1}(\varphi)\|).$$

Из теоремы 6.1 в [11] легко получить следующее утверждение:

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\mathfrak{F}: D \times M \rightarrow D' \times M$ есть k -реализация отображения F . Пусть $kL^r < 1$, $r \geq 1$. Тогда любой C^r -диффеоморфизм $\mathfrak{G}$, C^r -близкий к $\mathfrak{F}$, имеет инвариантное подмножество Δ , гомеоморфное $\Sigma^N \times M$, проекция $\Phi: (\Delta, \mathfrak{G}) \rightarrow (\Sigma^N, \sigma)$ является полусопряжением и слои $\Phi^{-1}(\omega)$ являются C^r -гладкими.

Чтобы изучить свойства отображения $\mathfrak{G}$, нам нужно больше информации о зависимости центральных слоев $\Phi^{-1}(\omega)$ от точки ω в базе Σ^N .

§ 4. Гёльдерова зависимость центральных слоев

Здесь описывается идея доказательства того, что центральные слои в теореме 2 гёльдерово зависят от точки в базе (т.е. в Σ^N) в C^r -норме.

4.1. Формулировка теоремы о гёльдеровой зависимости.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $\mathfrak{F}$ — та же k -реализация, что и в теореме 2. Тогда любой $C^{r+\text{Lip}}$ -диффеоморфизм $\mathfrak{G}$, C^r -близкий к $\mathfrak{F}$, имеет инвариантное подмножество Δ , гомеоморфное $\Sigma^N \times M$. Проекция $\Phi: (\Delta, \mathfrak{G}) \rightarrow (\Sigma^N, \sigma)$ является полусопряжением, а слои $\Phi^{-1}(\omega)$ являются C^r -гладкими и гёльдерово зависят от точки $\omega \in \Sigma^N$ в C^r -норме.

4.2. C^r -норма в пространстве центральных слоев. Центральные слои $\Phi^{-1}(\omega)$, появляющиеся в теореме 2, являются графиками C^r -гладких отображений $E_\omega: M \rightarrow D$ в декартовом произведении $D \times M$. C^r -расстояние между двумя центральными слоями $\Phi^{-1}(\omega)$ и $\Phi^{-1}(\omega')$ определяется как C^r -расстояние между соответствующими отображениями E_ω и $E_{\omega'}$.

Пусть $\mathcal{L}^r$ обозначает метрическое пространство всех центральных слоев для отображения $\mathfrak{G}$ с C^r -метрикой на нем. Отдельный центральный слой $\Phi^{-1}(\omega)$ является точкой в этом пространстве. Заметим, что $\mathfrak{G}$ отображает слой в слой и, следовательно, индуцирует корректно определенное отображение $\mathfrak{f}: \mathcal{L}^r \rightarrow \mathcal{L}^r$. Поскольку каждая точка $\omega \in \Sigma^N$ соответствует слою $\Phi^{-1}(\omega)$, также корректно определено отображение $H: \Sigma^N \rightarrow \mathcal{L}^r$. Проекция $\Phi: (\Delta, \mathfrak{G}) \rightarrow (\Sigma^N, \sigma)$ является полусопряжением; поэтому отображение $H: \Sigma^N \rightarrow \mathcal{L}^r$, $\omega \mapsto \Phi^{-1}(\omega)$, является сопряжением: $H \circ \sigma = \mathfrak{f} \circ H$. Исследовать зависимость центральных слоев в C^r -норме от точки в базе — это то же самое, что исследовать свойства отображения $H: \Sigma^N \rightarrow \mathcal{L}^r$.

4.3. Гёльдерова непрерывность сопряжений: классический результат. Мы хотим доказать, что сопряжение $H: \Sigma^N \rightarrow \mathcal{L}^r$, $H \circ \sigma = \mathfrak{f} \circ H$, является гёльдеровым. Существует теорема, которая выглядит чрезвычайно похожей на то, что нам нужно:

ТЕОРЕМА 4 [12]. Пусть Λ и Λ' — компактные гиперболические множества диффеоморфизмов f и f' соответственно и $h: \Lambda \rightarrow \Lambda'$ является топологическим сопряжением: $h = f'hf^{-1}$. Тогда h , и h^{-1} гёльдеровы.

К сожалению, наши пространства Σ^N и $\mathcal{L}^r$ не являются гиперболическими множествами (нет никакого объемлющего пространства для первого, и объемлющее пространство бесконечномерно для второго). Можно заменить Σ^N на гиперболическое множество Λ , но нет никакой надежды сделать это для $\mathcal{L}^r$. Поэтому нам надо обобщить теорему 4, чтобы получить нужный результат.

4.4. Внутренне гиперболические множества. Здесь мы вводим понятие внутренне гиперболического множества, которое не использует никакого объемлющего пространства, но тем не менее позволяет доказать аналог теоремы 4.

Пусть (Λ, d) — компактное метрическое пространство и $f: \Lambda \rightarrow \Lambda$ — липшицеморфизм (т.е. f — гомеоморфизм, f и f^{-1} липшицевы).

Определим два отношения эквивалентности $\sim_u$ и $\sim_s$ на Λ следующим образом:

$$\begin{aligned} x \sim_u y &\iff \lim_{n \rightarrow +\infty} d(f^{-n}(x), f^{-n}(y)) = 0, \\ x \sim_s y &\iff \lim_{n \rightarrow +\infty} d(f^n(x), f^n(y)) = 0. \end{aligned}$$

Определим также локальные устойчивое и неустойчивое многообразия:

$$\begin{aligned} W_\varepsilon^s(x) &= \{z \mid z \sim_s x \text{ и } d(f^n(x), f^n(z)) \leq \varepsilon \text{ для любого } n \in \mathbb{Z}^+\}, \\ W_\varepsilon^u(x) &= \{z \mid z \sim_u x \text{ и } d(f^{-n}(x), f^{-n}(z)) \leq \varepsilon \text{ для любого } n \in \mathbb{Z}^+\}. \end{aligned}$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Липшицеморфизм f компактного метрического пространства (Λ, d) называется *внутренне гиперболическим*, если для некоторых $\delta > 0$, $\varepsilon > 0$ выполнены следующие условия:

(IH1) Если $d(x, y) < \delta$, то существует и единственная точка $w(x, y) = W_\varepsilon^u(x) \cap W_\varepsilon^s(y) \in \Lambda$. Отображение $(x, y) \mapsto w(x, y)$ непрерывно.

(IH2) Существуют такие константы $C > 0$, $0 < \nu < 1$, $0 < \xi < 1$, что

$$\begin{aligned} y \in W_\varepsilon^s(x) &\implies d(f^n(x), f^n(y)) \leq C\nu^n d(x, y), \quad n \in \mathbb{N}, \\ y \in W_\varepsilon^u(x) &\implies d(f^{-n}(x), f^{-n}(y)) \leq C\xi^n d(x, y), \quad n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Простейшими примерами являются обычные локально максимальные гиперболические множества и сдвиги Бернулли.

ЛЕММА 2. В условиях теоремы 3 отображение $\mathfrak{f}: \mathcal{L}^r \rightarrow \mathcal{L}^r$ является внутренне гиперболическим.

4.5. Гёльдерова непрерывность сопряжений: внутренне гиперболический случай.

ТЕОРЕМА 5. Пусть Λ и Λ' — компактные метрические пространства, липшицеморфизмы $f: \Lambda \rightarrow \Lambda$ и $f': \Lambda' \rightarrow \Lambda'$ внутренне гиперболические и $h: \Lambda \rightarrow \Lambda'$ — топологическое сопряжение: $h = f'hf^{-1}$. Тогда h , и h^{-1} гёльдеровы.

Отображение $\mathfrak{f}: \mathcal{L}^r \rightarrow \mathcal{L}^r$ внутренне гиперболично по лемме 2. Рассмотрим $\sigma: \Sigma^N \rightarrow \Sigma^N$ в качестве $f: \Lambda \rightarrow \Lambda$ и $\mathfrak{f}: \mathcal{L}^r \rightarrow \mathcal{L}^r$ в качестве $f': \Lambda' \rightarrow \Lambda'$

в теореме 5. Тогда сопряжение $H: (\Sigma^N, \sigma) \rightarrow (\Sigma^r, f)$ гёльдерово. Из этого следует теорема 3.

Нам также нужно иметь возможность оценить показатель Гёльдера полученного сопряжения. Следующее утверждение позволяет получить эту оценку:

ТЕОРЕМА 6. Пусть Λ и Λ' — компактные метрические пространства, липшицевморфизмы $f: \Lambda \rightarrow \Lambda$ и $f': \Lambda' \rightarrow \Lambda'$ внутренние гиперболичны с константами ν , ξ и ν' , ξ' соответственно и $h: \Lambda \rightarrow \Lambda'$ — топологическое сопряжение: $h = f'hf^{-1}$.

Пусть P — константа Липшица для f и Q — константа Липшица для f^{-1} .

Пусть для некоторых $\alpha > 0$, $\alpha' > 0$ выполнены следующие неравенства:

$$\xi P^\alpha < 1, \quad \nu Q^\alpha < 1, \quad \xi' P^{\alpha'} < 1, \quad \nu' Q^{\alpha'} < 1.$$

Тогда сопряжение h гёльдерово с показателем Гёльдера, равным $\alpha\alpha'$.

Теорему 6 можно использовать, чтобы установить, что показатель Гёльдера сопряжения $H: \Sigma^N \rightarrow \Sigma^r$ можно взять произвольно большим, если выбрать k -реализацию с достаточно малым коэффициентом k .

ЗАМЕЧАНИЕ. Теорема 5 может быть использована, чтобы доказать гёльдерову зависимость центральных слоев в C^r -норме от точки в базе в гораздо более широком контексте. Это может иметь приложения [13], отличные от описанных в настоящей работе. Мы благодарим Андрея Тёрёка за это замечание.

§5. Мягкие случайные динамические системы: идея доказательства теоремы А

Динамика отображения $\mathfrak{G}$ из теоремы 2, ограниченного на его локально максимальное инвариантное множество Δ , может быть описана в терминах мягких случайных динамических систем. Свойства этих систем позволяют обобщить теорему 1 и, таким образом, получить теорему А.

5.1. Редукция к свойствам мягких случайных динамических систем. Пусть $\mathfrak{G}$ — тот же диффеоморфизм, что и в теореме 3. Тогда он имеет инвариантное подмножество Δ , гомеоморфное $\Sigma^N \times M$. Пусть $\pi: \Sigma^N \times M \rightarrow M$ — проекция на слой вдоль базы. Гомеоморфизм $\mathbf{H}: \Sigma^N \times M \rightarrow \Delta$, $\Delta \subset D \times M$, можно выбрать так, чтобы он сохранял координату φ и, следовательно, чтобы его ограничение на отдельный слой являлось C^r -диффеоморфизмом. Рассмотрим индуцированное отображение

$$G = \mathbf{H}^{-1} \circ \mathfrak{G} \circ \mathbf{H}: \Sigma^N \times M \rightarrow \Sigma^N \times M.$$

Обозначим зависящее от ω отображение $\pi \circ \mathbf{H}^{-1} \circ \mathfrak{G} \circ \mathbf{H}(\omega, \cdot): M \rightarrow M$ через f_ω . Отображения $\mathbf{H}$, $\mathbf{H}^{-1}$ и $\mathfrak{G}$ имеют класс гладкости C^r , а значит, $f_\omega \in C^r$. Теперь отображение G принимает следующий вид:

$$G: \Sigma^N \times M \rightarrow \Sigma^N \times M, \quad (\omega, \varphi) \mapsto (\sigma\omega, f_\omega(\varphi)). \quad (5.1)$$

Таким образом, G является мягкой случайной динамической системой (1.4). Поскольку центральные слои $\Phi^{-1}(\omega)$ множества Δ гёльдерово зависят от точки $\omega \in \Sigma^N$ в C^r -метрике, диффеоморфизмы f_ω гёльдерово зависят от $\omega \in \Sigma^N$ в C^r -метрике. Так как отображение $\mathfrak{G}$ является C^r -близким к $\mathfrak{F}$, его центральные слои являются C^r -близкими к центральным слоям отображения $\mathfrak{F}$ [11], и,

следовательно, для любого $\omega \in \Sigma^N$ диффеоморфизм f_ω является C^r -близким к f_{ω_0} .

Гомеоморфизм $\mathbf{H}: \Sigma^N \times M \rightarrow \Delta$ сопрягает отображения G и $\mathfrak{G}|_\Delta$, и его ограничение на отдельный слой C^r -гладко. Поэтому, чтобы исследовать отображение $\mathfrak{G}$, нужно исследовать мягкую случайную динамическую систему G , имеющую соответствующие свойства (f_ω гладкие, близки к f_{ω_0} и гёльдерово зависят от ω).

5.2. Оценки φ -координаты. Легко работать со ступенчатой случайной динамической системой, поскольку можно думать только о φ -координате орбиты и на каждом шаге следить за ее образом под действием одного из N диффеоморфизмов f_j . В случае мягкой случайной динамической системы мы не знаем, какое отображение должно быть применено к слою над ω до тех пор, пока мы не знаем всю последовательность ω . Чтобы обойти эту трудность, нам нужна следующая лемма.

Положим

$$\gamma = \max_{\{\omega, \omega' | \omega_0 = \omega'_0\}} d_{C^0}(f_\omega, f_{\omega'}), \quad (5.2)$$

$$L = \max_{\omega \in \Sigma^N} \max_{\varphi \in S^1} (\|Df_\omega(\varphi)\|, \|Df_\omega^{-1}(\varphi)\|). \quad (5.3)$$

ЛЕММА 3. Пусть отображение G , заданное формулой (5.1), обладает следующими свойствами:

- (1) $d_{C^0}(f_\omega, f_{\omega'}) \leq C(d_{\Sigma^N}(\omega, \omega'))^\alpha$ для некоторых $C > 0$, $\alpha > 0$ и любых $f_\omega, f_{\omega'}$;
- (2) $L2^{-\alpha} < 1$.

Тогда найдется такое $K > 0$, не зависящее от γ , $K = K(L, C, \alpha)$, что для любых $m \in \mathbb{N}$, $\varphi \in M$ и $\omega, \omega' \in \Sigma^N$

$$d_{\Sigma^N}(\omega, \omega') \leq 2^{-m} \implies d_M(\pi \circ G^m(\omega, \varphi), \pi \circ G^m(\omega', \varphi)) \leq K\gamma^b,$$

где $b = 1 - \ln L / \ln 2^\alpha$.

Лемма 3 позволяет оценить φ -координату точек, которые получаются при итерировании отображения G , заданного формулой (5.1), даже если мы знаем ω -координату начальной точки только приблизительно.

5.3. Окончание доказательства теоремы А. Предыдущая лемма позволяет доказать следующее обобщение теоремы 1 для мягких случайных динамических систем.

ТЕОРЕМА 7. Для любого N существует такой интервал $I \subset \mathbb{R}$, $0 \in I$, и такие N открытых множеств $U_0, \dots, U_{N-1} \subset \text{Diff}^2(S^1)$, что если отображение G , заданное формулой (5.1) обладает свойствами

- (1) $f_\omega \in U_{\omega_0}$ для любого $\omega \in \Sigma^N$,
- (2) $d_{C^1}(f_\omega, f_{\omega'}) \leq C(d_{\Sigma^N}(\omega, \omega'))^\beta$ для некоторых $C > 0$, $\beta > 0$ и любых $f_\omega, f_{\omega'}$,
- (3) $L2^{-\beta} < 1$,

то оно обладает свойствами (i)–(iii), сформулированными для отображения F в теореме 1.

Доказательство теоремы А проводится теперь следующим образом.

Возьмем окрестности $U_0, \dots, U_{n-1}$, как в теореме 7, и диффеоморфизмы $f_j \in U_j$ и рассмотрим соответствующую ступенчатую систему (1.2). Затем построим k -реализацию $\mathfrak{F}$ отображения F с достаточно малым k . Пусть $L/2$ — максимум констант Липшица отображений $f_0, \dots, f_{N-1}, f_0^{-1}, \dots, f_{N-1}^{-1}$.

Если $k(L/2)^2 < 1$, то применима теорема 2. Следовательно, любое отображение $\mathfrak{G}$ из некоторой малой окрестности $\mathfrak{U}$ отображения $\mathfrak{F}$ в C^2 имеет частично гиперболическое инвариантное множество Δ с C^2 -гладкими центральными слоями. Ограничение отображения $\mathfrak{G}$ на Δ является системой вида (5.1). Для достаточно малых k и $\mathfrak{U}$ оно удовлетворяет условиям теоремы 7.

Действительно, требование (1) выполнено для малой окрестности $\mathfrak{U}$. Для любого $\beta > 0$ константа k может быть взята настолько малой, что (2) будет выполнено для данного β . Это можно получить из теоремы 6. Следовательно, (3) обеспечивается подходящим выбором k . Теперь применение теоремы 7 доказывает теорему А.

§6. Частично гиперболические аттракторы: добавление к теореме А

Множество Δ в теореме А может быть аттрактором. Ниже мы доказываем аналог утверждения (i) теоремы 1. Система, которая здесь строится, является «почти ступенчатой» на аттракторе.

6.1. Косые произведения над соленоидом. Рассмотрим соленоид Смейла–Вильямса $\mathbf{S}: T \rightarrow T$, $T = S^1 \times B$, $B = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 2\}$, $S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ и $\mathbf{S}(s, z) = (2s, \frac{1}{3}z + \exp 2\pi i s)$. Рассмотрим теперь косое произведение

$$\mathcal{H}: T \times S^1 \rightarrow T \times S^1, \quad (x, \varphi) \mapsto (\mathbf{S}(x), f_x(\varphi)), \quad x \in T, \varphi \in S^1. \quad (6.1)$$

При любом выборе f_x отображение (6.1) имеет максимальный аттрактор Δ . Обозначим его проекцию на базу T вдоль слоев S^1 через Λ . Это множество является настоящим соленоидом, не зависящим от f_x . Пусть $\mathcal{H}|_{\Delta} = G$.

Выберем f_x «почти кусочно-постоянным». Семейство f_x не может быть действительно кусочно-постоянным, поскольку множество Λ связно.

Пусть g_0, g_1 те же, как в разд. 2.2, причем $a \in (1, 2^{1/4})$. Возьмем

$$f_x = g_j \quad \text{при } x = (s, z), \quad s \in [j/2 + 1/2^{11}, (j+1)/2], \quad j = 0, 1. \quad (6.2)$$

Для всех $x \in T$ пусть f_x будет C^2 -гладким по x, φ и

$$\left| \frac{\partial f_x}{\partial \varphi} \right| \leq a, \quad \left| \frac{\partial (f_x^{-1})}{\partial \varphi} \right| \leq a, \quad a \in (1, 2^{1/4}). \quad (6.3)$$

6.2. Плотные множества периодических точек.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Отображение $\mathcal{H}$, удовлетворяющее условиям (6.1)–(6.3), имеет два множества периодических точек, каждое из которых плотно в аттракторе Δ . Первое множество состоит из периодических орбит с одномерными, а второе — с двумерными неустойчивыми многообразиями.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы докажем существование только второго множества. Существование первого множества доказывается аналогично, заменой отображения $\mathcal{H}$ обратным на аттракторе.

Для любой точки $x \in T$ определим *судьбу* точки x как бесконечную вправо последовательность из 0 и 1 следующим образом:

$$\omega(x) = \{\omega_n(x)\}, \quad \omega_n(x) = j \quad \text{при } \mathbf{S}^n(x) \in D_j,$$

где $D_j = \{(s, x) \mid s \in [j/2, j/2 + 1/2)\}$.

Важное замечание. Если сегмент $\omega_1(x) \dots \omega_{10}(x)$ содержит хотя бы один символ 1, то, согласно (6.2), $f_x = g_{\omega_0(x)}$.

Возьмем произвольное открытое множество в $T \times S^1$. Тогда найдется такой отрезок $\alpha_{-n} \dots \alpha_{n-1}$, содержащий по крайней мере один 0, и такая дуга $I \subset S^1$, что $U \times I$ принадлежит этому открытому множеству, где

$$U = \{x \in T \mid \omega_k(x) = \alpha_k \text{ при } -n \leq k \leq n-1\}.$$

Возьмем

$$U' = \{x \in U \mid \omega_k(x) = 1 \text{ при } -(n+m) \leq k < -n, n \leq k \leq n+m-1\},$$

где натуральное число m будет выбрано позже. Мы найдем периодическую орбиту с $\dim W^u = 2$ в $U' \times I$. Пусть $\pi: T \times S^1 \rightarrow S^1$ — проекция вдоль первого сомножителя.

Фиксируем $z \in U'$ так, что $\omega_{n+m}(z) = 1$. Для любого $x \in U'$ положим $I_x = \{x\} \times I$ и $I^\pm(x) = \pi \circ G^{\pm(n+m)} I_x$. Пусть $J^+(x)$ — «средняя треть» дуги $I^+(x)$ и $J^-(x)$ — дуга с тем же центром, что и $I^-(x)$, и удвоенной длины.

Применим лемму 1 к дугам $J^-(z)$, $J^+(z)$ вместо J^- , J^+ и $K > a^{n+m}$. Пусть композиция g отображений g_0, g_1 , которую дает эта лемма, состоит из q сомножителей и соответствует отрезку из 0 и 1, который мы обозначим через β .

Без потери общности можно считать, что отрезок $\bar{\beta}$ не содержит больше девяти нулей подряд. Действительно, композиция десяти поворотов g_0 есть тождественное отображение и на нее можно сократить.

Обозначим через $\bar{\alpha}$ отрезок $1 \dots 1 \alpha_{-n} \dots \alpha_{n-1} 1 \dots 1$ с m единицами перед α_{-n} и после α_{n-1} . Возьмем точку $y \in \Lambda$ с периодической судьбой $\omega = (\bar{\alpha}\bar{\beta})$.

Докажем, что существует периодическая точка отображения G на дуге I_y с мультипликатором вдоль окружности, по модулю большим 1.

Положим $y_0 = y$, $y_l = \mathbf{S}^l y$. При $m+n < l \leq m+n+q$ отображение f_{y_l} равно g_0 или g_1 и определяется соответствующим членом последовательности $\bar{\beta}$. Действительно, при указанном l судьба точки y_l не содержит 10 нулей подряд в отрезке $\omega_1 \dots \omega_{10}$. Следовательно, $s(\mathbf{S}(y_l)) \notin [0, 1/2^{11}] \cup [1/2, 1/2 + 1/2^{11}]$ в силу важного замечания, сделанного выше в этом разделе. Поэтому $\pi \circ G^{m+n+q} I_y = g I^+(y)$. В разд. 6.3 будет доказана

ЛЕММА 4. При достаточно большом m и достаточно малом I для выбранных y и z выполняются соотношения $I^-(y) \subset J^-(z)$, $J^+(z) \subset I^+(y)$, $|J^-(z)| < 0,1$.

Из леммы 4 следует, что $I^-(y) \subset J^-(z) \subset g(J^+(z)) \subset g(I^+(y))$. Кроме того, $g'|_{I^+(y)} \geq K$ по лемме 1. Следовательно, на дуге I_y лежит искомая периодическая точка отображения G . Это доказывает предложение 2 по модулю леммы 4.

6.3. Расходимость орбит: набросок доказательства леммы 4. По (6.3)

$$a^{-(n+m)} |I| \leq |I^\pm(z)| \leq a^{n+m} |I|.$$

Пусть

$$\mathbb{L} = \max_{T \times S^1} \left| \frac{\partial f_x(\varphi)}{\partial x} \right|.$$

Ниже мы доказываем, что для любых $a \in (1, 2^{1/4})$, $\varphi \in S^1$ и выбранных выше точек $y, z \in U'$

$$|\pi \circ G^{\pm(n+m)}(z, \varphi) - \pi \circ G^{\pm(n+m)}(y, \varphi)| \leq C \mathbb{L} a^{n+m} 2^{-m}. \quad (6.4)$$

Выведем лемму 4 из неравенства (6.4). Возьмем $|I| = 0,1a^{-(n+m)}$. Тогда $|I^-(z)| \leq 0,1$, $|I^+(z)| \geq 0,1a^{-2(n+m)}$. Докажем, что расстояние между концами дуг $I^+(z)$, $I^+(y)$, соответствующими одному и тому же концу дуги I , меньше $|I^+(z)|/3$ для достаточно большого m . Действительно,

$$C \mathbb{L} a^{n+m} 2^{-m} \leq 0,1a^{-2(n+m)}/3$$

при $a \in (1, 2^{1/4})$ и $m > 3n + C_1$, где C_1 зависит от C и $\mathbb{L}$. То же выполнено для концов дуг $I^-(z)$, $I^-(y)$. Это доказывает лемму по модулю неравенства (6.4).

Докажем (6.4) для G^{n+m} (для $G^{-(n+m)}$ доказательство аналогично). Имеем

$$|f_z(\varphi) - f_y(\psi)| \leq \rho(z, y) \mathbb{L} + a|\varphi - \psi|. \quad (6.5)$$

Пусть y_l то же, что и выше, $z_{l+1} = \mathbf{S}(z_l)$ и $z_0 = z$. По определению U' и $\mathbf{S}$ при $0 \leq l \leq n$ мы имеем $\rho(z_l, y_l) \leq 2^{-m}$. Следовательно, по (6.5)

$$|\pi \circ G^n(z, \varphi) - \pi \circ G^n(y, \varphi)| \leq C \mathbb{L} a^n 2^{-m}. \quad (6.6)$$

При $n < l \leq n + m$ имеют место равенства $f_{z_l} = f_{y_l} = g_1$. Это выводится из (6.2) следующим образом. При $n < l \leq n + m - 1$ по построению точек z , y имеем $\omega_0(z_l) = \omega_1(z_l) = \omega_0(y_l) = \omega_1(y_l) = 1$. При $l = n + m$ по-прежнему $\omega_0(z_l) = \omega_1(z_l) = \omega_0(y_l) = 1$. Далее, первые 10 символов в последовательности $\omega_1(y_l) \dots \omega_{10}(y_l) \dots$ не равны 0 одновременно. Поэтому по (6.2) $f_{y_l} = g_{\omega_0(y_l)} = g_1$.

Следовательно, согласно (6.3), $|f_{z_l}(\varphi) - f_{y_l}(\psi)| = |g_1(\varphi) - g_1(\psi)| \leq a|\varphi - \psi|$. Отсюда и из неравенства (6.6) вытекает (6.4), что завершает доказательство леммы 4 и, значит, предложения 2.

§ 7. Случайные динамические системы на границе множества Морса–Смейла

Частично гиперболические множества со случайными динамическими системами на них появляются при нелокальных бифуркациях. Этот эффект был неявно описан в [14]: частично гиперболические множества были описаны, но случайные динамические системы не были упомянуты. Ниже мы воспроизводим и продолжаем это описание, что приводит в итоге к теореме В.

7.1. Несколько гомоклинических поверхностей седлоузловой цикла. Рассмотрим векторное поле в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 4$, имеющее седлоузловой цикл и удовлетворяющее некоторым условиям общности положения. Седлоузловой цикл — это периодическая траектория, у которой один мультипликатор равен 1, а другие лежат вне единичной окружности. Мы не воспроизводим условия общности положения; их можно найти в [14]. Векторные поля с седлоузловым циклом образуют множество коразмерности один в $\mathfrak{X}^r$, $r \geq 1$. Не увеличивая коразмерность вырождения, можно предполагать, что векторные

поля с седлоузловым циклом имеют N гладких инвариантных поверхностей, диффеоморфных двумерному тору T^2 или бутылке Клейна K^2 , со следующим свойством. Каждая из этих поверхностей содержит седлоузловой цикл L , который является одновременно α - и ω -предельным множеством всех остальных траекторий на поверхности. Такая поверхность называется гомоклинической поверхностью цикла L .

7.2. Описание бифуркации.

ТЕОРЕМА 8. Пусть типичное однопараметрическое семейство векторных полей X_ε содержит векторное поле X_0 , которое лежит на границе множества Морса–Смейла и имеет седлоузловой цикл L с N гладкими гомоклиническими поверхностями, диффеоморфными T^2 или K^2 . Пусть U — малая окрестность объединения этих гомоклинических поверхностей. Тогда, возможно после перепараметризации, все векторные поля X_ε для малых $\varepsilon > 0$ имеют инвариантное множество Ω_ε , содержащее все неблуждающие точки поля X_ε в U . Существует глобальное сечение Γ , трансверсальное к X_ε в U , и глобальное отображение Пуанкаре $\mathfrak{G}_\varepsilon: V \rightarrow V'$ открытых подмножеств V, V' из Γ вдоль орбит поля X_ε . Пересечение $\Delta_\varepsilon = \Omega_\varepsilon \cap \Gamma$ инвариантно под действием $\mathfrak{G}_\varepsilon$ и допускает такое сюръективное отображение $\Phi_\varepsilon: \Delta_\varepsilon \rightarrow \Sigma_N$ на пространство всех двусторонних последовательностей из N символов, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \Delta_\varepsilon & \xrightarrow{\mathfrak{G}_\varepsilon} & \Delta_\varepsilon \\ \Phi_\varepsilon \downarrow & & \downarrow \Phi_\varepsilon \\ \Sigma^N & \xrightarrow{\sigma} & \Sigma^N \end{array}$$

коммутативна. Здесь σ — сдвиг Бернулли. Более того, для любого $\omega \in \Sigma^N$ слой $\Phi_\varepsilon^{-1}(\omega)$ является вложенной окружностью. Вложение $i_{\omega, \varepsilon}: S^1 \rightarrow \Phi_\varepsilon^{-1}(\omega) \subset \Gamma$ является липшицевым и непрерывно зависит от ω .

Эта теорема в несколько иной, но эквивалентной форме доказана в [14, §5.7].

ЗАМЕЧАНИЕ. Множество Δ_ε в теореме 8 является максимальным инвариантным множеством для $\mathfrak{G}_\varepsilon$ в $U \cup \Gamma$.

Сечение Γ является гиперповерхностью в трубчатой окрестности седлоузлового цикла L . Оно диффеоморфно произведению окружности S^1 и шара B . Координата φ на окружности S^1 поднимается на Γ . Она зависит от диффеоморфизма $S^1 \times B \rightarrow \Gamma$ и от параметризации окружности S^1 . Этот выбор можно сделать специальным образом так, что справедлива приведенная ниже теорема 10. Более того, вложение $i_{\omega, \varepsilon}$ в теореме 8 можно взять сохраняющим координату φ ; образ $i_{\omega, \varepsilon}(S^1)$, следовательно, есть график зависящего от ω и ε отображения $S^1 \rightarrow B$.

Рассмотрим отображение

$$\mathbf{H}_\varepsilon: \Sigma^N \times S^1 \rightarrow \Delta_\varepsilon, \quad \mathbf{H}_\varepsilon^{-1}(p) = (\Phi_\varepsilon(p), \varphi). \quad (7.1)$$

Тогда $\mathbf{H}_\varepsilon^{-1}$ сопрягает отображение $\mathfrak{G}_\varepsilon|_{\Delta_\varepsilon}$ с мягкой динамической системой

$$G_\varepsilon: \Sigma^N \times S^1 \rightarrow \Sigma^N \times S^1, \quad (\omega, \varphi) \mapsto (\sigma\omega, f_\omega(\varphi, \varepsilon)). \quad (7.2)$$

Из теоремы 8 следует, что при фиксированном ε отображение f_ω липшицево по φ и непрерывно по ω . Чтобы перенести свойства ступенчатых случайных

динамических систем на мягкие, нужны более сильные аналитические свойства отображения f_ω . Следующая теорема является аналогом теоремы 3 для множеств Δ_ε .

ТЕОРЕМА 9. *В теореме 8 вложение $i_{\omega,\varepsilon}$ окружности в Γ имеет класс гладкости C^r для произвольного r при достаточно малом $\varepsilon > 0$. Более того, это вложение гёльдерово зависит от ω как элемент из $C^r(S^1, B)$; показатель Гёльдера стремится к бесконечности при $\varepsilon \rightarrow +0$.*

СЛЕДСТВИЕ. *Мягкая система (7.2) сопрягается отображением (7.1) с отображением $\mathfrak{G}_\varepsilon$, ограниченным на его максимальное инвариантное множество Δ_ε . Отображение $f_\omega(\cdot, \varepsilon): S^1 \rightarrow S^1$ в (7.2) является C^r -диффеоморфизмом (не обязательно сохраняющим ориентацию) и гёльдерово зависит от ω как элемент из $\text{Diff}^r(S^1, S^1)$; показатель Гёльдера стремится к бесконечности при $\varepsilon \rightarrow +0$.*

7.3. Перенормировка: возвращение к критическому значению параметра. Когда параметр ε стремится к 0 справа, область определения отображения $\mathfrak{G}_\varepsilon$ сжимается. Оказывается, что множество Δ_ε стремится к объединению N окружностей, которые образуют пересечение Γ с гомоклиническими поверхностями. Нет никакого корректно определенного на этом объединении предельного отображения для семейства $\mathfrak{G}_\varepsilon$. С другой стороны, отображения G_ε стремятся к пределу по специально выбранной подпоследовательности при $\varepsilon \rightarrow 0$.

ТЕОРЕМА 10. *Критическое векторное поле X_0 в теореме 8 определяет N диффеоморфизмов окружности $f_j: S^1 \rightarrow S^1$, $j \in \{0, \dots, N-1\}$. Существует такая непрерывная функция $T(\varepsilon)$, монотонно стремящаяся к $+\infty$ при $\varepsilon \rightarrow +0$, что в (7.2)*

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} f_\omega(\varphi + T(\varepsilon), \varepsilon) = f_{\omega_0}(\varphi). \quad (7.3)$$

Более того, пусть $\tau(\varepsilon) = \{T(\varepsilon)\}$ (τ — дробная часть числа T) и $\mathbb{I}$ — произвольный интервал. Тогда множество $\tau^{-1}(\mathbb{I})$ имеет положительную плотность в нуле.

ЗАМЕЧАНИЯ. 1. Свойство (7.3) позволяет произвести перенормировку и предельный переход при $\varepsilon \rightarrow 0$ в семействе G_ε . А именно, пусть $\varepsilon(k, \mu)$ определяется равенством $T(\varepsilon(k, \mu)) = k + \mu$, $k \in \mathbb{Z}^+$, $\mu \in [0, 1)$. В силу 1-периодичности функции f_ω по φ из (7.3) следует, что

$$f_\omega(\varphi, \varepsilon(k, \mu)) \rightarrow f_{\omega_0}(\varphi - \mu) \quad \text{при } k \rightarrow \infty. \quad (7.4)$$

Пусть $\varepsilon_k = \varepsilon(k, 0)$. Тогда последовательность G_{ε_k} стремится к пределу F вида (1.2).

2. Рассмотрим последовательность h_k подков Смейла с прямоугольными областями определения, сжимающимися к отрезку при $k \rightarrow \infty$. Последовательность отображений h_k не имеет никакого разумного предела. Однако все h_k сопряжены с одним и тем же сдвигом Бернулли $\sigma: \Sigma^2 \rightarrow \Sigma^2$, который можно рассматривать как предел этой последовательности подков, полученный после перенормировки. В том же самом смысле отображения $\mathfrak{G}_{\varepsilon_k}|_{\Delta_{\varepsilon_k}}$ после перенормировки стремятся к пределу (1.2), который имеет богатые динамические свойства.

7.4. набросок доказательства теоремы В. Теорема В следует из результатов этого параграфа и теоремы 7. А именно, пусть $N \in \mathbb{Z}$, $N > 1$, произвольно. Пусть $U_0, \dots, U_{N-1}$ те же, что и в теореме 7. Фиксируем произвольно $f_j \in U_j$. Поле X_0 в теореме 8 можно выбрать так, чтобы соответствующие отображения в правой части формулы (7.3) были равны f_j . Требования теоремы 8 на поле X_0 влекут за собой утверждение (1) теоремы В.

Пусть X_ε — типичная однопараметрическая деформация поля X_0 , $\mathfrak{G}_\varepsilon$ — семейство отображений Пуанкаре из теоремы 8, G_ε — соответствующее семейство (7.2) и G_{ε_k} — подпоследовательность этого семейства из п. 1 замечаний в разд. 7.3. Из (7.4) следует, что требование (1) теоремы 7 выполнено для отображений G_{ε_k} при больших k .

Требования (2) и (3) теоремы 7 выполнены для этих отображений в силу следствия теоремы 9. Утверждение (2) теоремы В вытекает теперь из следствия теоремы 9.

Докажем утверждение (3) теоремы В. Пусть $\mathbb{I} \subset [0, 1]$ — такой интервал, что отображение $\varphi \mapsto f_j(\varphi - \mu)$ при $\mu \in \mathbb{I}$ по-прежнему принадлежит U_j . Тогда теорема 7 применима к отображениям $G_{\varepsilon(k, \mu)}$ при $\mu \in \mathbb{I}$ и больших k . Соответствующие значения $\varepsilon(k, \mu)$ образуют пересечение множества $\tau^{-1}(\mathbb{I})$ с малой окрестностью нуля. Утверждение (3) теоремы В вытекает теперь из последнего утверждения теоремы 10.

§ 8. Гипотезы

8.1. Устойчивая эргодичность и устойчивая транзитивность. Сохраняющий объем C^2 -дiffeоморфизм называется устойчиво эргодичным, если любое его C^1 -малое сохраняющее объем возмущение эргодично. Примером являются диффеоморфизмы Аносова. В [15] было показано, что существуют частично гиперболические устойчиво эргодические диффеоморфизмы.

ГИПОТЕЗА 1. *Устойчиво эргодический диффеоморфизм является устойчиво транзитивным, т. е. любое его C^1 -малое не обязательно сохраняющее объем возмущение транзитивно.*

8.2. Групповые расширения и устойчивая транзитивность. Доказано, что большинство групповых расширений над транзитивным гиперболическим множеством с помощью компактных групп Ли являются устойчиво эргодичными в классе всех групповых расширений этого типа [16]. Групповое расширение имеет гладкую реализацию, если существует такой гладкий диффеоморфизм, что его ограничение на частично гиперболическое инвариантное множество сопряжено этому групповому расширению.

ГИПОТЕЗА 2. *Если групповое расширение над транзитивным гиперболическим множеством с помощью компактной группы Ли устойчиво эргодично (в классе групповых расширений) и имеет гладкую реализацию, то эта гладкая реализация имеет частично гиперболическое инвариантное множество, устойчиво транзитивное в классе всех C^1 -возмущений.*

Благодарности. Авторы благодарят CIMAT и UNAM, Мексика, где началась эта работа, и Корнельский университет, США, где статья была окончательно написана, за их гостеприимство и творческую атмосферу. Мы благодарим также Дж. Гукенхеймера, М. Филда, А. Дж. Хомбурга, Дж. Хаббарда, Ф. Такенса, А. Тёрёка и Э. Уилкинсон за полезные обсуждения, и Е. Н. Ильшенко за помощь в подготовке рукописи.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Arnold L.* Random dynamical systems. In: Lect. Notes in Math., Vol. 1609, 1995, pp. 1–43.
2. *Yuan G. Ch., Yorke J. A.* An open set of maps for which every point is absolutely nonshadowable. Proc. Amer. Math. Soc. (to appear).
3. *Shub M.* Topologically transitive diffeomorphisms on T^4 . Lect. Notes in Math., Vol. 206, 1971, p. 39.
4. *Mané R.* Contributions to the stability conjecture. Topology, **17**, 383–396 (1978).
5. *Bonatti C., Diaz L. J.* Persistent nonhyperbolic transitive diffeomorphisms. Ann. of Math. (2), **143**, No. 2, 357–396 (1996).
6. *Diaz L. J., Pujals E., Ures R.* Normal hyperbolicity and robust transitivity. Preprint PUC-Rio, 1997.
7. *Bonatti C., Viana M.* SRB measures for partially hyperbolic systems whose central direction is mostly contracting. Preprint IMPA, 1997.
8. *Viana M.* Dynamics: a Probabilistic and Geometric Perspective. Extra Volume ICM-98 (Berlin), 1998.
9. *Kostelich E. J., Kan Ittai, Grebogi C., Ott E., Yorke J.* Unstable dimension variability: A source of nonhyperbolicity in chaotic systems. Physica D, **109**, 81–90 (1997).
10. *Dawson S., Grebogi C., Sauer T., Yorke J.* Obstructions to Shadowing When a Lyapunov Exponent Fluctuates about Zero. Phys. Rev. Lett., **73**, No. 14, 1927–1930 (1994).
11. *Hirsh M., Pugh C., Shub M.* Invariant manifolds. Lect. Notes in Math., Vol. 583, 1977.
12. *Katok A., Hasselblatt B.* Introduction to the modern theory of dynamical systems. Cambridge University Press, 1995.
13. *Nitica V., Török A.* Cohomology of dynamical systems and rigidity of partially hyperbolic actions of higher-rank lattices. Duke Math. J., **79**, No. 3, 751–810 (1995).
14. *Ilyashenko Yu., Li W.* Nonlocal bifurcations. Amer. Math. Soc., Providence, Long Island, 1998.
15. *Grayson M., Pugh C., Shub M.* Stably ergodic diffeomorphisms. Ann. of Math. (2), **140**, No. 2, 295–329 (1994).
16. *Field M., Parry W.* Stable ergodicity of skew extensions by compact Lie groups. Topology, **38**, No. 1, 167–187 (1999).

Независимый московский университет
 Московский государственный университет,
 Независимый московский университет,
 Математический институт им. В. А. Стеклова РАН,
 Корнельский университет, США

Поступило в редакцию
 28 декабря 1998 г.