Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ф. Г. Маликов, И. Б. Френкель, Аннулирующие идеалы и наклонные функторы, *Функци. анализ и его прил.*, 1999, том 33, выпуск 2, 31–42

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa352>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.174.16.151

26 апреля 2023 г., 09:53:00

Аннулирующие идеалы и наклонные функторы

© 1999. Ф. Г. Маликов, И. Б. Френкель

§ 1. Введение

Сформулируем два основных результата настоящей статьи.

(А) Пусть ω — отображение, которое подмодуль модуля Вейля над аффинной алгеброй Ли переводит в аннулирующий идеал соответствующего фактормодуля. Тогда ω устанавливает эквивалентность решетки подмодулей модуля Вейля с регулярным доминантным старшим весом и решетки вертексных идеалов локального пополнения соответствующей универсальной обертывающей алгебры. Заметим, что слова «регулярный доминантный» означают, в частности, что уровень k является положительным рациональным числом; ср. § 2.

(В) Пусть теперь уровень k — отрицательное рациональное число, а $\mathcal{O}_k^\lambda$ — категория модулей над аффинной алгеброй Ли на уровне k , удовлетворяющих следующему условию: если $A \in \mathcal{O}_k^\lambda$, то старший вес любого неприводимого подфактора модуля A принадлежит орбите веса λ под действием аффинной группы Вейля; мы предполагаем, что λ — регулярный антидоминантный вес. Пусть далее $\text{fam } \mathcal{O}_k^\lambda \subset \mathcal{O}_k^\lambda$ — полная подкатегория, состоящая из модулей, «аналитически зависящих от k ». Тогда категория наклонных функторов, отображающих $\text{fam } \mathcal{O}_k^{\lambda_r}$ в $\text{fam } \mathcal{O}_k^{\lambda_l}$, изоморфна категории наклонных модулей в $\mathcal{O}_k^{\lambda_l}$ для любых λ_r, λ_l . Если к тому же $\lambda_r = \lambda_l$, то категория наклонных функторов является моноидальной и ее кольцо Гротендика изоморфно групповой алгебре аффинной группы Вейля.

Настоящая статья является результатом попытки перенести классическую теорию бимодулей Хариш-Чандры на случай аффинной алгебры Ли. Читатель, знакомый с классической теорией, заметит, что результат (А) аналогичен известной теореме Джозефа [18] о решетке двусторонних идеалов универсальной обертывающей алгебры простой алгебры Ли, а (В) параллелен классификации проективных функторов, полученной Бернштейном и Гельфандом в [3]. Полезно также обратить внимание на существенные различия: в первом случае место ассоциативной алгебры занимает алгебра Ли, соответствующая вертексной алгебре; во втором вместо проективных функторов рассматриваются наклонные функторы — это основное новое понятие, введенное в настоящей статье. Нашим главным техническим средством является бифунктор Каждана–Люстига; в аффинном случае он играет роль функтора тензорного умножения на конечномерный модуль, успешно использованного в [3] для получения классификации бимодулей Хариш-Чандры в классическом случае.

Пользуемся случаем, чтобы поблагодарить П. Этингофа, Б. Фейгина и Г. Цуккермана за полезные обсуждения и И. Мирковича, который сообщил

нам о своей неопубликованной работе [25], содержащей результаты, напоминающие некоторые из наших. Часть этой работы была выполнена во время посещения авторами Института Шрёдингера в Вене в 1996 г.

§2. Предварительные сведения

2.1. Ниже приводится список основных понятий и обозначений, которыми мы будем пользоваться без дальнейших пояснений:

- простая конечномерная алгебра Ли $\mathfrak{g}$ с фиксированным треугольным разложением, в частности, с фиксированной подалгеброй Картана $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$; по умолчанию под двойственным пространством $\mathfrak{h}^*$ понимается действительная часть $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^*$;

- действие $(\lambda \mapsto w\lambda)$ и сдвинутое с помощью ρ действие $(\lambda \mapsto w \cdot \lambda)$ группы Вейля W на $\mathfrak{h}^*$, сохраняющее решетку весов $P \subset \mathfrak{h}^*$; обозначим через $\bar{C}$ камеру Вейля — ту фундаментальную область для сдвинутого на ρ действия группы W , которая определяется зафиксированным треугольным разложением; $P^+ = P \cap C$, где $C \subset \bar{C}$ есть внутренность;

- категория $\mathcal{O}_{\mathfrak{g}}$ $\mathfrak{g}$ -модулей, связанная с треугольным разложением;
- модуль Верма $M_{\lambda} \in \mathcal{O}_{\mathfrak{g}}$, $\lambda \in \mathfrak{h}^*$, и простой конечномерный модуль V_{λ} , $\lambda \in P^+ \subset P$;

- аффинная алгебра Ли $\hat{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}((z)) \oplus \mathbb{C}K$ и «обобщенная» подалгебра Бореля $\hat{\mathfrak{g}}_{\geq} = \mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}[[z]] \oplus \mathbb{C}K$;

- категория $\mathcal{O}_k$ $\hat{\mathfrak{g}}$ -модулей на уровне k (т.е. K действует как умножение на k) и полная подкатегория $\tilde{\mathcal{O}}_k \subset \mathcal{O}_k$, состоящая из модулей, полупростых относительно $\mathfrak{g} \hookrightarrow \hat{\mathfrak{g}}$;

- модуль Верма $M_{\lambda}^k = \text{Ind}_{\hat{\mathfrak{g}}_{\geq}}^{\hat{\mathfrak{g}}} M_{\lambda} \in \mathcal{O}_k$, $\lambda \in \mathfrak{h}^*$; модуль Вейля $V_{\lambda}^k = \text{Ind}_{\hat{\mathfrak{g}}_{\geq}}^{\hat{\mathfrak{g}}} V_{\lambda} \in \tilde{\mathcal{O}}_k$, $\lambda \in P^+$; более общим образом, если $V \in \mathcal{O}_{\mathfrak{g}}$ — некоторый $\mathfrak{g}$ -модуль, то $V^k \in \mathcal{O}_k$ — это $\hat{\mathfrak{g}}$ -модуль, полученный индуцированием с V ; очевидно, что V_{λ}^k является фактором модуля M_{λ}^k ; каждый простой модуль из $\mathcal{O}_k$ — это фактор модуля M_{λ}^k для некоторого λ ; обозначим этот модуль через L_{λ}^k ;

- если $k \notin \mathbb{Q}$, то $\tilde{\mathcal{O}}_k$ полупроста, причем любой объект является прямой суммой модулей Вейля; эквивалентность $\mathcal{O}_k \approx \mathcal{O}_{\mathfrak{g}}$, доказанная Финкельбергом [11], есть аналог этого утверждения для $\mathcal{O}_k$;

- для $k + h^{\vee} = p/q \in \mathbb{Q}_{>}$ рассмотрим аффинную группу Вейля $W_k = pQ \propto W$, где Q — решетка корней алгебры Ли $\mathfrak{g}$; имеется обычное и сдвинутое на аффинный вес ρ действие группы W_k на $\mathfrak{h}^*$; для последнего фундаментальной областью является $\bar{C}_{\text{aff}} = \bar{C} \cap \{\lambda : 0 \leq (\lambda + \rho, \theta) \leq \rho\}$, где θ — старший корень алгебры Ли $\mathfrak{g}$; положим $P_k^+ = P^+ \cap C_{\text{aff}}$, где $C_{\text{aff}} \subset \bar{C}_{\text{aff}}$ — внутренность; иногда бывает важно, чтобы множество P_k^+ содержало хотя бы один ненулевой вес; для этого, в случае неклассических систем корней, k должно быть достаточно велико (см., например, [11, §2.6]), что и будет предполагаться; назовем вес $\lambda \in P_k^+$ доминантным (иногда доминантным весом называют пару (λ, k) , где λ удовлетворяет этому условию); если $k + h^{\vee} = p/q \in \mathbb{Q}_{<}$, то можно определить W_k и антидоминантный вес сходным образом;

- $\mathcal{O}_k = \bigoplus_{\lambda \in P_k^+} \mathcal{O}_k^{\lambda}$, где $\mathcal{O}_k^{\lambda}$ — полная подкатегория, состоящая из модулей, композиционные ряды которых содержат только $L_{w \cdot \lambda}^k$, $w \in W_k$ (см. [4, 27]); аналогичное разложение справедливо для $\tilde{\mathcal{O}}_k$.

Двойственность. Обозначим через A^d полное двойственное пространства A . Если A — модуль над алгеброй Ли, то A^d , очевидно, тоже. Если A градуировано конечномерными подпространствами, то возникает ограниченное двойственное, обозначаемое через $D(A)$.

Объекты категории $\tilde{\mathcal{O}}_k$ канонически градуированы. Обозначим через $D: \tilde{\mathcal{O}}_k \rightarrow \tilde{\mathcal{O}}_k$, $M \mapsto D(M)$, функтор, такой, что $\hat{\mathfrak{g}}$ -модульная структура получается композированием канонического действия на двойственном пространстве с антиавтоморфизмом $\hat{\mathfrak{g}} \rightarrow \hat{\mathfrak{g}}$, $g \otimes z^n \mapsto g \otimes (-z)^{-n}$. Аналогичным образом определяется двойственность $D: \mathcal{O}_k \rightarrow \mathcal{O}_k$.

Функторы d , D точны.

Имеется инволюция $\bar{\cdot}: P^+ \rightarrow P^+$, такая, что $V_\lambda^d = V_{\bar{\lambda}}$.

В завершение отметим следующий факт о геометрии весов; вместе с доказательством он появляется в качестве леммы 7.7 в [17].

ЛЕММА 2.1.1. *Предположим, что*

- (i) $(\lambda, k), (\mu, k) \in P_k^+$ регулярны;
- (ii) если $\bar{w} \in W$, то $\bar{w}(\lambda - \mu) \in P^+$;
- (iii) ν — вес модуля $V_{\bar{w}(\lambda - \mu)}$, такой, что $w_1 \cdot \lambda = w \cdot \mu + \nu$ для некоторых $w, w_1 \in W_k$.

Тогда $w_1 = w$ и $\nu \in W(\lambda - \mu)$.

§3. Тензорное умножение по Каждану–Люстигу

Каждан и Люстиг [21–23] (вдохновленные Дринфельдом [5]) определили ковариантный бифунктор

$$\tilde{\mathcal{O}}_k \times \tilde{\mathcal{O}}_k \rightarrow \tilde{\mathcal{O}}_k, \quad A, B \mapsto A \dot{\otimes} B. \quad (1)$$

Мы напомним его определение и основные свойства

3.1. Определения.

3.1.1. Основные объекты. Мы будем пользоваться следующими обозначениями:

z — координата на $\mathbb{CP}^1$;

$L\mathfrak{g}^P$, $P \in \mathbb{CP}^1$, — алгебра петель, «сядущая» в P ; иными словами, $L\mathfrak{g}^P = \mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}((z - P))$, $P \in \mathbb{C}$, и $L\mathfrak{g}^\infty = \mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}((z^{-1}))$;

более общим образом, если $P = \{P_1, \dots, P_m\}$, то $L\mathfrak{g}^P = \bigoplus_{i=1}^m L\mathfrak{g}^{P_i}$;

$\hat{\mathfrak{g}}^P$ — аффинная алгебра, сидящая в точке P , — каноническое центральное расширение алгебры $L\mathfrak{g}^P$; разумеется, $\hat{\mathfrak{g}}^0 = \hat{\mathfrak{g}}$;

более общим образом, если $P = \{P_1, \dots, P_m\}$, то $\hat{\mathfrak{g}}^P$ — прямая сумма алгебры $\hat{\mathfrak{g}}^{P_i}$, $i = 1, \dots, m$, по модулю следующего соотношения: все канонические центральные элементы K , по одному в каждой алгебре, равны;

$\Gamma = \mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}[z, z^{-1}, (z - 1)^{-1}]$; очевидно, что Γ — алгебра Ли.

Разложения в ряд Лорана в точках $\infty, 1, 0$ доставляют гомоморфизм алгебр Ли

$$\varepsilon: \Gamma \rightarrow L\mathfrak{g}^{\{\infty, 1, 0\}}.$$

ЛЕММА 3.1.1. *Отображение ε поднимается до гомоморфизма алгебр Ли*

$$\varepsilon: \Gamma \rightarrow \hat{\mathfrak{g}}^{\{\infty, 1, 0\}}.$$

Доказательство состоит в использовании теоремы о вычетах [22].

Следовательно, любой $\hat{\mathfrak{g}}^{\{\infty,1,0\}}$ -модуль является Γ -модулем. Далее, любой модуль $A \in \tilde{\mathcal{O}}_k$ естественно наделяется структурой $\hat{\mathfrak{g}}^P$ -модуля для любой точки P с помощью очевидной замены координат. Если $A, B, C \in \tilde{\mathcal{O}}_k$, рассмотрим $A \otimes B \otimes C$ как $\hat{\mathfrak{g}}^{\{\infty,1,0\}}$ -модуль, имея в виду, что $\hat{\mathfrak{g}}^\infty$ действует на A , $\hat{\mathfrak{g}}^1$ — на B , а $\hat{\mathfrak{g}}^0$ — на C . (В этом обозначении имеется очевидная неопределенность.) Возникает пространство коинвариантов

$$(A \otimes B \otimes C)_\Gamma = (A \otimes B \otimes C) / \Gamma(A \otimes B \otimes C).$$

3.1.2. Определение. Пусть $\hat{\Gamma}$ — центральное расширение алгебры Ли Γ с коциклом, определенным, как обычно, с той лишь разницей, что берется сумма вычетов в ∞ и 1. Пусть $\Gamma(0) \subset \hat{\Gamma}$ — подалгебра, состоящая из функций, обращающихся в нуль в 0. Ясно, что ее можно также рассматривать как подалгебру в Γ .

Пространство $(A \otimes B)^d$, очевидно, является $\hat{\Gamma}$ -модулем. Он обладает возрастающей фильтрацией $\{(A \otimes B)^d(N)\}$, где

$$(A \otimes B)^d(N) = \{x \in (A \otimes B)^d : \gamma_1 \cdots \gamma_N x = 0, \text{ если } \gamma_i \in \Gamma(0) \forall i\}. \quad (2)$$

Пространство $\bigcup_{N \geq 1} (A \otimes B)^d(N)$, естественно, является $\hat{\mathfrak{g}}$ -модулем. Переход от $(A \otimes B)^d$ к $\bigcup_{N \geq 1} (A \otimes B)^d(N)$ часто называется функтором гладких векторов.

Положим

$$A \dot{\otimes} B = D \left(\bigcup_{N \geq 1} (A \otimes B)^d(N) \right). \quad (3)$$

ТЕОРЕМА 3.1.2.

- (i) $\text{Hom}_{\hat{\mathfrak{g}}}(A \dot{\otimes} B, D(C)) = \text{Hom}_{\hat{\mathfrak{g}}}(C, D(A \dot{\otimes} B)) = ((A \otimes B \otimes C)_\Gamma)^d$.
- (ii) Если у $A, B \in \tilde{\mathcal{O}}_k$ есть фильтрация Вейля, то $A \dot{\otimes} B$ обладает тем же свойством. (Под фильтрацией Вейля мы понимаем конечную фильтрацию, последовательные факторы которой являются модулями Вейля.)
- (iii) Если $k \notin \mathbb{Q}$, то $V_\lambda^k \dot{\otimes} V_\mu^k = (V_\lambda \otimes V_\mu)^k$.
- (iv) Для любого $k \in \mathbb{C}$ модуль $V_\lambda^k \dot{\otimes} V_\mu^k$ обладает фильтрацией Вейля (см. (ii)), причем кратность модуля V_ν^k равна $(V_\lambda \otimes V_\mu : V_\nu)$.
- (v) Имеется изоморфизм $A \dot{\otimes} V_0^k \rightarrow A$ для любого $A \in \tilde{\mathcal{O}}_k$.
- (vi) Существуют морфизмы коммутативности и ассоциативности

$$A \dot{\otimes} B \approx B \dot{\otimes} A, \quad (A \dot{\otimes} B) \dot{\otimes} C \approx A \dot{\otimes} (B \dot{\otimes} C),$$

наделяющие $\tilde{\mathcal{O}}_k$ структурой коммутативной моноидальной категории¹.

§4. Аффинные функторы сдвига

4.1. Определение. Для любого $(\lambda, k) \in P_k^+$ обозначим через $\tilde{\mathcal{O}}_k^\lambda$ полную подкатегорию категории $\tilde{\mathcal{O}}_k$, состоящую из тех модулей, старшие веса композиционных факторов которых лежат в орбите $W_k \cdot (\lambda, k)$. Возникает проекция

$$p_\lambda : \tilde{\mathcal{O}}_k \rightarrow \tilde{\mathcal{O}}_k^\lambda.$$

¹Braided monoidal category в англоязычной литературе.

Для любых двух весов $(\lambda, k), (\mu, k) \in P_k^+$ выберем $\bar{w} \in W$ так, что $\bar{w}(\lambda - \mu) \in P^+$. Очевидно, что тогда $(\bar{w}(\lambda - \mu), k) \in P_k^+$.

Определим функтор сдвига следующей формулой:

$$T_\mu^\lambda: \tilde{\mathcal{O}}_k^\mu \rightarrow \tilde{\mathcal{O}}_k^\lambda, \quad A \mapsto p_\lambda(V_{\bar{w}(\lambda-\mu)}^k \dot{\otimes} A). \quad (4)$$

Первым ввел такие функторы, вероятно, Финкельберг [12], который, однако, рассматривал их только при $k < 0$.

В качестве очевидного следствия из определения получаем

$$T_\lambda^\mu = p_\mu \circ ((V_{\bar{w}(\lambda-\mu)}^d)^k \dot{\otimes} ?). \quad (5)$$

4.2. Жесткость модулей Вейля с доминантным старшим весом.

ЛЕММА 4.2.1. *Если $(\lambda, \mu), (\mu, k)$ регулярны и $w \in W$ таков, что $w \cdot \mu \in P^+$, то*

$$T_\mu^\lambda(V_{w \cdot \mu}^k) = V_{w \cdot \lambda}^k.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно теореме 3.1.2(iv), $T_\mu^\lambda(V_{w \cdot \mu}^k)$ обладает фильтрацией с факторами вида $V_{w_1 \cdot \lambda}^k$, $w_1 \in W_k$, причем $w_1 \cdot \lambda = w \cdot \mu + \nu$, где ν — это вес модуля $V_{\bar{w}(\lambda-\mu)}$. По лемме 2.1 $w_1 = w$. Из этого следует, что наша фильтрация состоит из единственного члена $V_{w \cdot \lambda}^k$. $\square$

СЛЕДСТВИЕ 4.2.2. *Если $(\lambda, k) \in P_k^+$ регулярен, то V_0^k является прямым слагаемым в $V_\lambda^k \dot{\otimes} V_\lambda^k$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Конечно же, $(0, k)$ доминантен и регулярен, а $p_0(A)$ — прямое слагаемое в A . Остается заметить, что $T_\lambda^0 V_\lambda^k = p_0(V_\lambda^k \dot{\otimes} V_\lambda^k)$ и воспользоваться леммой 4.2.1, чтобы получить $T_\lambda^0 V_\lambda^k = V_0^k$. $\square$

Таким образом, возникают отображения

$$i_\lambda: V_0^k \rightarrow V_\lambda^k \dot{\otimes} V_\lambda^k, \quad e_\lambda: V_\lambda^k \dot{\otimes} V_\lambda^k \rightarrow V_0^k.$$

Замечая, что отображения между $\dot{\otimes}$ -произведениями модулей Вейля однозначно определяются их ограничениями на соответствующие конечномерные $\mathfrak{g}$ -модули (теорема 3.1.2(i)), мы убеждаемся в том, что при подходящем нормировании отображений i_λ и e_λ композиции

$$\begin{aligned} V_\lambda^k &= V_0^k \dot{\otimes} V_\lambda^k \xrightarrow{i_\lambda \otimes \text{id}} V_\lambda^k \dot{\otimes} V_\lambda^k \dot{\otimes} V_\lambda^k \xrightarrow{\text{id} \otimes e_\lambda} V_\lambda^k, \\ V_\lambda^k &= V_\lambda^k \dot{\otimes} V_0^k \xrightarrow{\text{id} \otimes i_\lambda} V_\lambda^k \dot{\otimes} V_\lambda^k \dot{\otimes} V_\lambda^k \xrightarrow{e_\lambda \otimes \text{id}} V_\lambda^k \end{aligned} \quad (6)$$

равны единице. По определению (см., например, [23, III, Appendix]) имеем

СЛЕДСТВИЕ 4.2.3. *Если $(\lambda, k) \in P_k^+$, то V_λ^k и V_λ^k жестки.*

Рассмотрим функтор

$$V_\lambda^k \dot{\otimes} ? : \tilde{\mathcal{O}}_k \rightarrow \tilde{\mathcal{O}}_k, \quad M \mapsto V_\lambda^k \dot{\otimes} M.$$

СЛЕДСТВИЕ 4.2.4. (i) *Пусть $(\lambda, k) \in P_k^+$. Тогда*

(i) *функторы $V_\lambda^k \dot{\otimes} ?$ и $V_\lambda^k \dot{\otimes} ?$ сопряжены, т. е. имеется естественный изоморфизм*

$$\text{Hom}_{\hat{\mathfrak{g}}}(V_\lambda^k \dot{\otimes} A, B) = \text{Hom}_{\hat{\mathfrak{g}}}(A, V_\lambda^k \dot{\otimes} B);$$

(ii) *функторы $V_\lambda^k \dot{\otimes} ?$ и $V_\lambda^k \dot{\otimes} ?$ точны, т. е. переводят короткие точные последовательности в точные.*

Доказательство стандартно; см., например, [23, III, Appendix].

4.3. Свойства аффинных функторов сдвига. Как известно, имеется понятие формального характера $\text{ch } A$, $A \in \tilde{\mathcal{O}}_k^\lambda$ (см. [4]). Возникает абелева группа характеров, причем каждое из множеств $\{\text{ch } V_{w \cdot \lambda}^k, w \in W_k\}$, $\{\text{ch } L_{w \cdot \lambda}^k, w \in W_k\}$ является ее топологическим базисом. Конечно же, символы $\text{ch } V_{w \cdot \lambda}^k$, $\text{ch } L_{w \cdot \lambda}^k$ нужно игнорировать, если $w \cdot \lambda \notin P^+$. Заметим, что

$$\text{ch } A = \sum_{w \geq w_o} \bar{n}_w \text{ch } L_{w \cdot \mu}^k \iff \text{ch } A = \sum_{w \geq w_o} n_w \text{ch } V_{w \cdot \mu}^k. \quad (7)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.3.1. *Пусть (λ, k) и (μ, k) регулярны и доминантны. Тогда*

- (i) T_μ^λ *точен;*
- (ii) $T_\mu^\lambda, T_\lambda^\mu$ *сопряжены;*
- (iii) *если $\text{ch } A = \sum_{w \in W_k} n_w \text{ch } V_{w \cdot \mu}^k$, то $\text{ch } T_\mu^\lambda A = \sum_{w \in W_k} n_w \text{ch } V_{w \cdot \lambda}^k$;*
- (iv) $T_\mu^\lambda(L_{w \cdot \mu}^k) = L_{w \cdot \lambda}^k$;
- (v) *более общим образом, T_μ^λ устанавливает эквивалентность решеток подмодулей модулей $V_{w \cdot \mu}^k$ и $V_{w \cdot \lambda}^k$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (i) T_μ^λ *точен*, так как является композицией точных функторов p_λ и $(V_{\bar{w}(\lambda-\mu)}^d)^k \dot{\otimes} ?$; см. следствие 4.2.4(ii).

(ii) Из следствия 4.2.4(i) вытекает, что для любых $A \in \tilde{\mathcal{O}}_k^\mu$, $B \in \tilde{\mathcal{O}}_k^\lambda$

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\hat{\mathfrak{g}}}(T_\mu^\lambda A, B) &= \text{Hom}_{\hat{\mathfrak{g}}}(p_\lambda(V_{\bar{w}(\lambda-\mu)}^k \dot{\otimes} A), B) \\ &= \text{Hom}_{\hat{\mathfrak{g}}}(V_{\bar{w}(\lambda-\mu)}^k \dot{\otimes} A, B) = \text{Hom}_{\hat{\mathfrak{g}}}(A, (V_{\bar{w}(\lambda-\mu)}^d)^k \dot{\otimes} B) \\ &= \text{Hom}_{\hat{\mathfrak{g}}}(A, p_\mu((V_{\bar{w}(\lambda-\mu)}^d)^k \dot{\otimes} B)) = \text{Hom}_{\hat{\mathfrak{g}}}(A, T_\lambda^\mu B). \end{aligned} \quad (8)$$

(iii) *легко вытекает из (i) (если воспользоваться локальными композиционными рядами; см. [4]).*

(iv) Предположим, что $T_\mu^\lambda(L_{w_0 \cdot \mu}^k)$ *приводим*. Тогда возникает точная последовательность

$$0 \rightarrow N \rightarrow T_\mu^\lambda(L_{w_0 \cdot \mu}^k) \rightarrow L_{w_0 \cdot \lambda}^k \rightarrow 0.$$

Применяя к ней T_λ^μ , получаем

$$0 \rightarrow T_\lambda^\mu(N) \rightarrow T_\lambda^\mu(T_\mu^\lambda(L_{w_0 \cdot \mu}^k)) \rightarrow T_\lambda^\mu(L_{w_0 \cdot \lambda}^k) \rightarrow 0.$$

В силу (iii) и (7) имеем $\text{ch}(T_\lambda^\mu(T_\mu^\lambda(L_{w_0 \cdot \mu}^k))) = \text{ch } L_{w_0 \cdot \mu}^k$ и $\text{ch } T_\lambda^\mu(N) \neq 0$; поэтому $\text{ch } T_\lambda^\mu(L_{w_0 \cdot \lambda}^k) < \text{ch } L_{w_0 \cdot \mu}^k$. Противоречие.

(v) Здесь доказательство является очевидной версией доказательства п. (iv); детали мы опускаем. $\square$

4.4. ТЕОРЕМА 4.4.1. *Функтор $T_\mu^\lambda: \tilde{\mathcal{O}}_k^\mu \rightarrow \tilde{\mathcal{O}}_k^\lambda$ доставляет эквивалентность категорий.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно доказать, что $T_\mu^\lambda \circ T_\lambda^\mu: \tilde{\mathcal{O}}_k^\lambda \rightarrow \tilde{\mathcal{O}}_k^\lambda$ эквивалентен тождественному функтору. Иными словами, надо доказать, что $\text{id}: A \rightarrow A$ преобразуется в изоморфизм в $\text{Hom}_{\hat{\mathfrak{g}}}(T_\mu^\lambda \circ T_\lambda^\mu(A), A)$. Это нам

уже известно, если A прост (см. предложение 4.3.1(iv)). Пользуясь локальными композиционными рядами и тем фактом, что в силу следствия 4.2.2 $A \subset T_\mu^\lambda \circ T_\lambda^\mu(A)$ выделяется прямым слагаемым, можно вывести нужное утверждение в общем случае. $\square$

ЗАМЕЧАНИЕ 4.4.2. Тем же способом можно определить функторы сдвига на категории $\mathcal{O}_k$ и доказать, что категории $\mathcal{O}_k^\mu$ и $\mathcal{O}_k^\nu$ эквивалентны, если μ и ν целочисленны, регуляры и доминантны. Единственное отличие конструкции в этом случае состоит в использовании $\dot{\otimes}$ -произведения модуля Вейля с объектами всей категории $\mathcal{O} \supset \tilde{\mathcal{O}}_k$ (см. [12]). В частности, видно, что

$$(V_\lambda^k \dot{\otimes} M_\mu^k : M_\nu^k) = (V_\lambda \otimes M_\mu : M_\nu) \quad (9)$$

(ср. с теоремой 3.1.2(iv)).

§5. Аннулирующие идеалы модулей со старшим весом

5.1. Поля, коинварианты и вертексные алгебры. По теореме 3.1.2(v) $A \dot{\otimes} V_0^k \approx A$ для любого $A \in \tilde{\mathcal{O}}_k$. Поэтому в силу той же теоремы 3.1.2(i) для любого $B \in \tilde{\mathcal{O}}_k$ имеется естественный изоморфизм

$$((A \otimes V_0^k \otimes D(B))_\Gamma)^d \approx \text{Hom}_{\hat{\mathfrak{g}}}(A, B).$$

Напомним, что пространство $((A \otimes V_0^k \otimes D(B))_\Gamma)^d$ было определено с помощью алгебры Ли Γ , а Γ , в свою очередь, определена выбором трех точек ∞ , 1 , 0 ; см. п. 3.1.1. В выборе точек имеется, конечно, произвол. Зафиксировав ∞ и 0 и модули A и $D(B)$, сидящие в них, разрешим третьей точке быть переменной. Тогда мы получим семейство алгебр Ли Γ_t , $t \in \mathbb{C}^*$, и семейство векторных пространств (ср. с п. 3.1.1)

$$\langle A, V_0^k, D(B) \rangle_t := ((A \times V_0^k \times D(B))_{\Gamma_t})^d, \quad t \in \mathbb{C}^*.$$

Эти пространства естественно организуются в тривиальное линейное расслоение над $\mathbb{C}^*$ со слоем

$$\langle A, V_0^k, D(B) \rangle_t = (A \otimes D(A))_{\hat{\mathfrak{g}}} = \text{Hom}_{\hat{\mathfrak{g}}}(A, B)$$

в силу соображений, использующих взаимность Фробениуса. Выберем сечение этого расслоения, зафиксировав $\varphi \in \text{Hom}_{\hat{\mathfrak{g}}}(A, B)$. Это дает трилинейный функционал, зависящий от $t \in \mathbb{C}^*$,

$$\Phi_t^\varphi \in \langle A, V_0^k, D(B) \rangle_t \subset (A \otimes V_0^k \otimes D(B))^d.$$

Проинтерпретируем его как линейное отображение:

$$\Phi_t^\varphi(\cdot) : V_0^k \rightarrow (A \otimes D(B))^d, \quad (10)$$

или, эквивалентным образом,

$$\tilde{\Phi}_t^\varphi(\cdot) : V_0^k \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{C}}(A, D(B)^d), \quad t \in \mathbb{C}^*. \quad (11)$$

Поскольку $\dim B = \infty$, образ отображения $\tilde{\Phi}_t^\varphi$ не может быть отождествлен с $\text{Hom}_{\mathbb{C}}(A, B)$. Однако простые непосредственные вычисления показывают, что $\tilde{\Phi}_t^\varphi(v) \in \text{Hom}_{\mathbb{C}}(A, B)[[t, t^{-1}]]$ для любого $v \in V_0^k$; иными словами, $\tilde{\Phi}_t^\varphi(v)$ — это формальная порождающая функция семейства элементов из $\text{Hom}_{\mathbb{C}}(A, B)$. Чтобы привести пример, предположим, что модуль B либо равен A , либо

является фактором модуля A , а $\text{id}: A \rightarrow B$ — проекция. Чтобы согласовать наши обозначения со стандартными, положим $Y(v, t) := \tilde{\Phi}_t^{\text{id}}(v)$. Тогда можно показать, что

$$Y(\text{vac}, t) = \text{id},$$

где vac — вектор старшего веса модуля V_0^k . Далее,

$$Y((x \otimes z^{-1})\text{vac}, t) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} (x \otimes z^i) t^{-i-1},$$

где $x \otimes z^i \in \hat{\mathfrak{g}}$ отождествлен с оператором, действующим в A ; эта конструкция воспроизводит знаменитый *ток*.

Из определений легко вывести

$$\text{СЛЕДСТВИЕ 5.1.1. } \Phi_t^{\text{id}}(v)(x, y) = y(Y(v, t)x).$$

Напомним, что вертексная алгебра определяется как градуированное векторное пространство $V = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} V[i]$ вместе с отображением

$$Y(\cdot, t): V \rightarrow \text{End}(V)[[t, t^{-1}]],$$

удовлетворяющим ряду аксиом, в числе которых упомянем аксиомы ассоциативности и коммутативности; см., например, [14, 15]. Сходным образом определяется модуль над вертексной алгеброй. Вертексная алгебра является модулем над собой. Назовем идеалом вертексной алгебры ее подмодуль. Напомним также, что Фурье-компоненты полей $Y(v, t)$, $v \in V$, образуют алгебру Ли; обозначим ее через $\text{Lie}(V)$. Таким образом, идеал вертексной алгебры V определяет идеал алгебры Ли $\text{Lie}(V)$ в смысле алгебр Ли. Не всякий идеал алгебры Ли $\text{Lie}(V)$ может быть получен таким способом. Идеалы, полученные так, будем называть *вертексными*.

Из [15] (см. также [9]) вытекает, что в силу конструкций из разд. 5.1 $(V_0^k, Y(\cdot, t))$ — вертексная алгебра, а любой $A \in \tilde{\mathcal{O}}_k$ — модуль над ней. Алгебра Ли $\text{Lie}(V_0^k)$ обычно обозначается через $U(\hat{\mathfrak{g}})_{\text{loc}}$ и называется *локальным пополнением алгебры* $U(\hat{\mathfrak{g}})$, хоть и не является ассоциативной алгеброй. Легко понять, что решетка вертексных идеалов алгебры $U(\hat{\mathfrak{g}})_{\text{loc}}$ изоморфна решетке подмодулей модуля V_0^k , рассматриваемого как $\hat{\mathfrak{g}}$ -модуль.

5.2. Здесь мы доказываем следующую теорему — один из основных результатов данной статьи.

ТЕОРЕМА 5.2.1. Пусть $k \in \mathbb{Q}_{>}$, а $(\lambda, k), (0, k) \in P_k^+$ регулярны. Обозначим через $\Omega(V_\lambda^k)$ решетку подмодулей модуля V_λ^k , а через $\Omega(U(\hat{\mathfrak{g}})_{\text{loc}})$ решетку вертексных идеалов алгебры $U(\hat{\mathfrak{g}})_{\text{loc}}$ с центральным зарядом k . Следующее отображение является изоморфизмом решеток:

$$\omega: \Omega(U(\hat{\mathfrak{g}})_{\text{loc}}) \rightarrow \Omega(V_\lambda^k), \quad \Omega(U(\hat{\mathfrak{g}})_{\text{loc}}) \ni I \mapsto IV_\lambda^k. \quad (12)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде всего, по определению алгебры Ли $U(\hat{\mathfrak{g}})_{\text{loc}}$ (см. разд. 5.1) отображение ω можно эквивалентным образом рассматривать как отображение решеток подмодулей, т.е. $\omega: \Omega(V_0^k) \rightarrow \Omega(V_\lambda^k)$. Будем доказывать теорему в этой интерпретации.

Рассмотрим функтор сдвига T_0^λ . Если $N \subset V_0^k$ — подмодуль, то, с одной стороны, мы имеем

$$T_0^\lambda(V_0^k) = V_\lambda^k \dot{\otimes} V_0^k (= V_\lambda^k)$$

и, следовательно,

$$T_0^\lambda(V_0^k/N) = V_\lambda^k \dot{\otimes} (V_0^k/N).$$

По теореме 3.1.2 и следствию 5.1.1

$$\text{Hom}_{\hat{g}}(T_0^\lambda(V_0^k/N), ?) = \langle V_0^k/N, V_\lambda^k, D(?) \rangle_t = \text{Hom}_{\hat{g}}(V_\lambda^k/\omega(N), ?). \quad (13)$$

С другой стороны, по предложению 4.3.1(i)

$$T_0^\lambda(V_0^k/N) = V_\lambda/T_0^\lambda(N).$$

Сравнивая последнее равенство с (13), заключаем, что $\omega(N) = T_0^\lambda(N)$. Остается вспомнить, что T_0^λ является изоморфизмом решеток подмодулей в силу предложения 4.3.1(v). $\square$

Применим этот результат к аннулирующим идеалам допустимых представлений. Напомним, что если $k + h^\vee \in \mathbb{Q}_{>}$ и $(\lambda, k) \in P_k^+$ регулярен, то L_λ^k называется *допустимым* [20]. Модуль L_λ^k — неприводимый фактор модуля V_λ^k по подмодулю N_λ^k , порожденному одним особым вектором; см. также [20]. По теореме 5.2.1 $\omega(N_0^k) = N_\lambda^k$. Мы доказали

СЛЕДСТВИЕ 5.2.2. *Аннулирующий идеал допустимого представления равен $\text{Lie}(N_0^k)$; в частности, он порожден (в смысле вертексных алгебр) одним особым вектором из V_0^k .*

§6. Наклонные функторы — случай отрицательного центрального заряда

Начиная с этого момента, $k + h^\vee$ — отрицательное рациональное число. Структура категории $\mathcal{O}_k$ может быть описана следующим образом. Пусть (λ, k) антидоминантен, а λ целочислен. Обозначим через $\mathcal{O}_k^\lambda$ полную подкатегорию, состоящую из модулей, которые в качестве подфакторов содержат только те неприводимые модули, старшие веса которых лежат в W_k -орбите веса (λ, k) . В силу [4, 27] $\mathcal{O}_k = \bigoplus_\lambda \mathcal{O}_k^\lambda$ (см. также §2).

Из [19] вытекает, что любой объект из $\mathcal{O}_k^\lambda$ имеет конечную длину. Возникает кольцо Гротендика, причем каждое из множеств $\{\text{ch}(M_{w \cdot \lambda}^k), w \in W_k\}$, $\{\text{ch}(L_{w \cdot \lambda}^k), w \in W_k\}$ является его базисом.

Все это переносится на случай $\tilde{\mathcal{O}}_k$ путем замены M_λ^k на V_λ^k (предварительно надо убедиться, что в этом случае λ — целочисленный доминантный вес).

6.1. Наклонные модули. Определение.

Модуль U из $\mathcal{O}_k$ (соответственно $\tilde{\mathcal{O}}_k$) называется *наклонным*, если и U и $D(U)$ обладают фильтрацией, состоящей из модулей Верма (соответственно Вейля).

Например, модуль Верма с антидоминантным старшим весом является наклонным в $\mathcal{O}_k$, так как он неприводим и поэтому изоморфен своему двойственному. Аналогично, модуль Вейля с антидоминантным весом тоже является наклонным в $\tilde{\mathcal{O}}_k$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.1.1. (i) *Любой наклонный модуль из $\tilde{\mathcal{O}}_k$ есть прямая сумма неразложимых наклонных модулей. Для любого (μ, k) , где μ — целочисленный доминантный вес, имеется единственный неразложимый наклонный*

модуль $\tilde{U}_{\mu,k}$, такой, что

$$\mathrm{ch}(\tilde{U}_{\mu,k}) = \mathrm{ch}(V_{\mu}^k) + \sum_{\nu <_k \mu} c_{\nu} \mathrm{ch}(V_{\nu}^k).$$

(Частичный порядок $<_k$ определяется стандартным образом с помощью порядка Брюа на аффинной группе Вейля.) Отображение $\mu \mapsto \tilde{U}_{\mu,k}$ устанавливает биекцию между множеством весов, удовлетворяющих упомянутому выше условию, и множеством классов изоморфизма неразложимых наклонных модулей в $\tilde{\mathcal{O}}_k$.

(ii) Сходным образом, любой наклонный модуль из $\mathcal{O}_k$ есть прямая сумма неразложимых наклонных модулей. Для любого (μ, k) существует единственный неразложимый наклонный модуль $U_{\mu,k}$, такой, что

$$\mathrm{ch}(U_{\mu,k}) = \mathrm{ch}(M_{\mu}^k) + \sum_{\nu <_k \mu} c_{\nu} \mathrm{ch}(M_{\nu}^k).$$

Отображение $(\mu, k) \mapsto U_{\mu,k}$ устанавливает биекцию между множеством весов и множеством классов изоморфизма неразложимых наклонных модулей из $\mathcal{O}_k$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение (i) доказано в [23] с использованием общих результатов Рингеля [26]; (ii) может быть доказано таким же образом. Прозрачное изложение, приспособленное для категории $\mathcal{O}$, имеется в [2]. $\square$

СЛЕДСТВИЕ 6.1.2. Множество характеров наклонных модулей из $\mathcal{O}_k$ ($\tilde{\mathcal{O}}_k$) — базис кольца Гротендика на $\mathcal{O}_k$ ($\tilde{\mathcal{O}}_k$).

Каждан и Люстиг доказали, что категория $\tilde{\mathcal{O}}_k$ жесткая. Некоторые следствия этого факта собраны в следующей лемме.

ЛЕММА 6.1.3. (i) Для любого $A \in \tilde{\mathcal{O}}_k$ функтор $A \dot{\otimes} ? : \mathcal{O}_k \rightarrow \mathcal{O}_k$ точен.

(ii) Для любых $A \in \tilde{\mathcal{O}}_k$, $B \in \mathcal{O}_k$ выполняется равенство $D(A \dot{\otimes} B) = D(A) \dot{\otimes} D(B)$.

(iii) Если оба модуля $A \in \tilde{\mathcal{O}}_k$, $B \in \mathcal{O}_k$ наклонные, то таков же и $A \dot{\otimes} B$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (i) доказывается так же, как следствие 4.2.4.

(ii) — общий факт о моноидальных категориях, см. [23, III, Proposition A. 1].

(iii) — немедленное следствие п. (ii) и того факта, что $\dot{\otimes}$ -произведение модуля с фильтрацией Вейля и модуля с фильтрацией Верма есть модуль с фильтрацией Верма; см замечание 4.4.2.

6.2. Наклонные функторы.

6.2.1. Модули, зависящие от параметра. Пусть t — переменная, а $R(t)$ — кольцо рациональных функций с полюсами только на положительной части действительной оси. Наряду с $\mathcal{O}_k$ введем категорию $\mathcal{O}_t$, определенную так же, как $\mathcal{O}_k$, за исключением того, что $\mathbb{C}$ заменено на $R(t)$, т. е. $\hat{\mathfrak{g}}$ рассматривается как $R(t)$ -алгебра, а от объектов категории $\mathcal{O}_t$ требуется, чтобы они были свободными $R(t)$ -модулями. Возникает функтор специализации

$$sp_k : \mathcal{O}_t \rightarrow \mathcal{O}_k, \quad M \mapsto M(k) \stackrel{\mathrm{def}}{=} M/(t-k)M.$$

Пусть $\mathcal{A}_t \subset \mathcal{O}_t$ — полная подкатегория, состоящая из таких V , что $V(k)$ обладает фильтрацией Вейля. Положим по определению $\mathrm{fam} \mathcal{O}_k \stackrel{\mathrm{def}}{=} sp_k(\mathcal{A}_t)$.

Сходным образом определяются $\text{fam}\mathcal{O}_k^\lambda \subset \mathcal{O}_k^\lambda$ и вейлевские версии $\text{fam}\widetilde{\mathcal{O}}_k, \text{fam}\widetilde{\mathcal{O}}_k^\lambda \subset \text{fam}\widetilde{\mathcal{O}}_k$.

- ПРИМЕРЫ. (i) $V_\lambda^k \in \text{fam}\widetilde{\mathcal{O}}_k, M_\lambda^k \in \text{fam}\mathcal{O}_k$.
 (ii) $V_\lambda^k \dot{\otimes} V_\mu^k \in \text{fam}\widetilde{\mathcal{O}}_k, V_\mu^k \dot{\otimes} M_\lambda^k \in \text{fam}\mathcal{O}_k$.
 (iii) Прямые слагаемые модулей из п. (ii) принадлежат соответствующим подкатегориям.

6.2.2. *Основные результаты.* Начиная с этого момента, у нас будут зафиксированы два антидоминантных веса (λ_r, k) и (λ_l, k) , такие, что λ_r, λ_l целочисленны.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Наклонным функтором* называется прямое слагаемое функтора

$$p_{\lambda_l} \circ (U \dot{\otimes} ?): \text{fam}\mathcal{O}_k^{\lambda_r} \rightarrow \text{fam}\mathcal{O}_k^{\lambda_l},$$

где U — наклонный модуль.

Вот один из наших главных результатов.

ТЕОРЕМА 6.2.1. (i) *Каждый наклонный функтор является прямой суммой неразложимых.*

(ii) *Имеется биекция между наклонными функторами и элементами группы W_k . Функтор $\Phi_w \in \text{Func}(\text{fam}\mathcal{O}_k^{\lambda_r}, \text{fam}\mathcal{O}_k^{\lambda_l})$, соответствующий $w \in W_k$, однозначно определяется условием $\Phi_w(M_{\lambda_r}^k) = U_{w \cdot \lambda_l, k}$.*

Одним из следствий этой теоремы является то, что категория наклонных функторов как подкатегория в категории всех функторов из $\text{fam}\mathcal{O}_k^{\lambda_r}$ в $\text{fam}\mathcal{O}_k^{\lambda_l}$ полупроста и эквивалентна категории наклонных модулей в $\mathcal{O}_k^{\lambda_l}$. Обозначим эту категорию через $\text{Tilt}(\lambda_l, \lambda_r)$.

Предположим теперь, что у нас есть три антидоминантных веса (λ_1, k) , (λ_2, k) , (λ_3, k) и два наклонных функтора $\Phi \in \text{Tilt}(\lambda_2, \lambda_1)$ и $\Psi \in \text{Tilt}(\lambda_3, \lambda_2)$. Тогда $\Psi \circ \Phi$ — тоже наклонный функтор, что вытекает из леммы 6.1.3(iii) и наличия морфизма ассоциативности $U_2 \dot{\otimes} (U_1 \dot{\otimes} B) = (U_2 \dot{\otimes} U_1) \dot{\otimes} B$. Если к тому же $\lambda_l = \lambda_r = \lambda$, то категория $\text{Tilt}(\lambda) \stackrel{\text{def}}{=} \text{Tilt}(\lambda_r, \lambda_l)$ замкнута относительно $\circ$ и пара $(\text{Tilt}(\lambda), \circ)$ является полупростой моноидальной категорией. Следующая теорема — наш второй главный результат, касающийся наклонных функторов.

ТЕОРЕМА 6.2.2. *Кольцо Гротендика категории $(\text{Tilt}(\lambda), \circ)$ изоморфно групповой алгебре группы W_k .*

Доказательства двух последних теорем будут опубликованы позже.

ЛИТЕРАТУРА

1. Adamovic D., Milas A. Vertex operator algebras associated to modular invariant representations for A_1^1 . Math. Res. Lett., **2**, No. 3, 563–575 (1995).
2. Andersen H., Paradowski J. Fusion categories arising from semi-simple Lie algebras. Comm. Math. Phys., **169**, 563–588 (1995).
3. Bernstein J. N., Gelfand S. I. Tensor products of finite and infinite dimensional representations of semi-simple Lie algebras. Compositio Math., **41**, No. 2, 245–285 (1980).
4. Deodhar V. V., Gabber O., Kac V. G. Structure of some categories of representations of infinite dimensional Lie algebras. Adv. Math., **45**, 92–116 (1982).

5. *Дринфельд В. Г.* О квазитреугольных квазихопфовых алгебрах и одной группе, тесно связанной с $Gal(\bar{Q}/Q)$. Алгебра и анализ, **2**, вып. 4, 149–181 (1990).
6. *Dong C., Li H., Mason G.* Vertex operator algebras associated to admissible representations of $\widehat{sl}_2$. Preprint q-algebra/9509026.
7. *Duflo M.* Representations irréductibles des groupes semi-simples complexes. In: Lect. Notes in Math., Vol. 497, 1975, pp. 26–88.
8. *Enright T.* On the irreducibility of the fundamental series of a real semi-simple Lie algebra. Ann. Math., **110**, 1–82 (1979).
9. *Feigin B., Frenkel E.* Affine Kac–Moody algebras at the critical level and Gelfand–Dikii algebras. Int. J. Math. Phys. A, **7**, Supplement **1A**, 197–215 (1992).
10. *Feigin B., Malikov F.* Fusion algebras and cohomology of a nilpotent subalgebra of an affine Lie algebra. Lett. Math. Phys., **31**, 315–325 (1994).
11. *Feigin B., Malikov F.* Modular functor and representation theory of $\widehat{sl}_2$ at a rational level. In: “Operads: Proceedings of Renaissance Conferences”, Contemp. Math., vol. 202 (J.-L. Loday, J. Stasheff, and A. Voronov, eds.), 1997.
12. *Finkelberg M.* Fusion Categories, Ph.D. Thesis, Harvard University, 1993.
13. *Frenkel E., Kac V., Wakimoto M.* Characters and fusion rules for W-algebras via quantized Drinfeld–Sokolov reduction. Commun. Math. Phys., **147**, 295–328 (1992).
14. *Frenkel I. B., Lepowsky J., Meurman A.* Vertex operator algebras and the monster, Academic Press, 1988.
15. *Frenkel I. B., Zhu Y.* Vertex operator algebras associated to representations of affine and Virasoro algebras. Duke Math. J., **66**, 123–168 (1992).
16. *Jantzen J. C.* Moduln mit einem höchsten Gewicht. Lect. Notes in Math., vol. 750, Springer-Verlag, 1979.
17. *Jantzen J. C.* Representations of Algebraic Groups. Pure Appl. Math., Vol. 131, Academic Press, 1987.
18. *Joseph A.* Dixmier’s problem for Verma and principal series submodules. J. London Math. Soc. (2), **20**, No. 2, 193–204 (1979).
19. *Kac V. G., Kazhdan D. A.* Structure of representations with highest weight of infinite dimensional Lie algebras. Adv. Math., **34**, 97–108 (1979).
20. *Kac V. G., Wakimoto M.* Modular invariant representations of infinite dimensional Lie algebras and superalgebras. Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., **85**, No. 14, 4956–4960 (1988).
21. *Kazhdan D., Lusztig G.* Affine Lie algebras and quantum groups. Internat. Math. Res. Notices, No. 2, 21–29 (1991).
22. *Kazhdan D., Lusztig G.* Tensor structures arising from affine algebras. I, II. J. Amer. Math. Soc., **6**, No. 4, 905–947, 949–1011 (1993).
23. *Kazhdan D., Lusztig G.* Tensor structures arising from affine algebras. III, IV. J. Amer. Math. Soc., **7**, No. 2, 335–381, 383–453 (1994).
24. *Lusztig G.* Nonlocal finiteness of a W -graph. Electronic Journal of Representation Theory, **1**, 25–30 (1997).
25. *Mircović I.* unpublished.
26. *Ringel C. M.* The category of modules with good filtrations over a quasi-hereditary algebra has almost split sequences. Math. Z., **208**, 209–223 (1991).
27. *Rocha A., Wallach N.* Projective modules over graded Lie algebras I. Math. Z., **180**, 151–177 (1982).
28. *Vogan D.* Irreducible characters of semi-simple Lie groups. Duke Math. J., **46**, 61–108, 805–859 (1979).
29. *Zuckerman G.* Tensor products of finite and infinite dimensional representations of semi-simple Lie groups. Ann. of Math., **106**, 295–308 (1977).