Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Я. Якубов, Оценки по спектральному параметру для собственных функций эллиптических операторов, *Функц. анализ и его прил.*, 1999, том 33, выпуск 2, 58–67

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa354>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.172.240.79

26 апреля 2023 г., 17:41:12

УДК 517.43+517.5

Оценки по спектральному параметру для собственных функций эллиптических операторов

© 1999. В. Я. ЯКУБОВ

§1. Оценка сверху для собственных функций эллиптических операторов

Получению равномерных оценок для модулей нормированных в L_2 собственных функций $u_n(x)$ эллиптического оператора

$$Lu \equiv \sum_{i,j=1}^N \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) + a(x)u \quad (N \geq 2) \quad (1.1)$$

и их производных посвящен ряд работ Х. Л. Смолицкого [1], Д. М. Эйдуса [2, 3], В. А. Ильина и И. А. Шишмарева [4–8], О. А. Ладыженской [9] и др.

Речь идет о нахождении наименьшего показателя α , при котором в замкнутой области $\bar{D} = D + \Gamma$ справедлива равномерная по x оценка

$$|u_n(x)| \leq C \lambda_n^\alpha \quad (n \rightarrow +\infty), \quad (1.2)$$

где константа C зависит лишь от области $\bar{D}$ и коэффициентов оператора L .

В работах Ильина и Шишмарева было доказано, что в случае гладких коэффициентов $a_{ij}(x)$ в области $\bar{D} = D + \Gamma$ справедлива оценка

$$|u_n(x)| \leq C \lambda_n^{(N-1)/4}. \quad (1.3)$$

Более того, ими было показано на примере оператора Лапласа в шаре, что эта оценка достигается. В дальнейшем эти же авторы установили, что в случае разрывных кусочно-гладких коэффициентов $a_{ij}(x)$ имеет место оценка

$$|u_n(x)| \leq C \lambda_n^{N/4}. \quad (1.4)$$

К сожалению, вопрос о точности оценки (1.4) в классе кусочно-гладких коэффициентов остается открытым (известно, что для $n = 1$ эта оценка не является точной), см., например, [19, гл. I, §2].

В настоящей работе показано, что если коэффициенты $a_{ij}(x)$ суммируемы в $\bar{D}$, то оценка (1.4) сохраняет силу и, более того, точна.

Отметим, что полученные нами в этом параграфе оценки стали возможны благодаря фундаментальным работам Де Джорджи, Нэша, Стампакки [14–17] и Ладыженской.

Прежде чем формулировать теоремы, сделаем несколько замечаний.

Будем предполагать, что коэффициенты в (1.1) измеримы и, более того, удовлетворяют условиям

$$\alpha^{-1} |\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^N a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \leq \alpha |\xi|^2, \quad (1.5)$$

где $\alpha > 0$, $a_{ij} = a_{ji}$, $|a(x)| \leq a_0$ (α , a_0 — константы). Для получения оценки (1.2) с показателем $\alpha = N/4$ мы пользуемся теоремами 8.25 и 8.29 из [13]. Из этих теорем следует, что обобщенные решения $u(x)$ задачи Дирихле для эллиптического уравнения

$$Lu \equiv \sum_{i,j=1}^N \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) + a(x)u = 0, \quad u|_{\partial D} = 0, \quad (1.6)$$

с измеримыми коэффициентами, удовлетворяющими условиям (1.5), принадлежат пространству $W_2^1(D)$ и являются непрерывными функциями. Более того, для них справедлива оценка

$$\max_{x \in \bar{D}} |u(x)| \leq C \|u(x)\|_{L_2(D)}, \quad (1.7)$$

где константа C зависит лишь от чисел α , a_0 и N . Предполагается, что граница Γ области D удовлетворяет условию внешнего конуса. Отметим попутно, что условия (1.5) обеспечивают существование у оператора Lu дискретного спектра (см. [21]).

Итак, имеет место

ТЕОРЕМА 1.1. *Для нормированных в пространстве L_2 обобщенных собственных функций спектральной краевой задачи*

$$\sum_{i,j=1}^N \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) + a(x)u + \lambda u = 0, \quad u|_{\partial D} = 0 \quad (1.8)$$

с измеримыми и удовлетворяющими условиям (1.5) в области $D \subset \mathbb{R}^N$ (граница области D удовлетворяет условию внешнего конуса) коэффициентами имеют место оценки

$$\|u_n(x)\|_C \leq C \lambda_n^{N/4}, \quad (1.9)$$

где константа C зависит лишь от чисел α , a_0 и N .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть x_0 — точка из $\bar{D}$, такая, что $\max_{\bar{D}} |u(x)| = |u(x_0)|$ (точка x_0 существует, так как решения задачи (1.8), принадлежащие пространству $W_2^1(D)$, как было отмечено выше, непрерывны); произведем в задаче (1.8) замену

$$t = (x - x_0)\lambda^{1/2}, \quad v(t) = u(x_0 + t\lambda^{-1/2}), \quad t \in D_1, \quad (1.10)$$

где область D_1 есть образ области D . К решению $v(t)$ полученной после замены (1.10) задачи

$$\sum_{i,j=1}^N \frac{\partial}{\partial t_i} \left(b_{ij}(t) \frac{\partial v}{\partial t_j} \right) + b(t)v = 0, \quad u|_{\partial D_1} = 0 \quad (1.11)$$

применим оценку (1.7) (ясно, что коэффициенты $b_{ij}(t)$ удовлетворяют условию эллиптичности с той же константой α , что и коэффициенты $a_{ij}(x)$, а коэффициент $b(t)$ удовлетворяет условию $|b(t)| \leq a_0 + 1$). Получаем

$$|v(0)| = \max_{\bar{D}_1} |v(t)| \leq C \|v\|_{L_2(D_1)}, \quad (1.12)$$

где постоянная C зависит лишь от констант α , a_0 и размерности N . Но

$$\|v\|_{L_2(D_1)}^2 = \int_{D_1} |v(t)|^2 dt = \int_D |u(x)|^2 \lambda^{N/2} dx = \lambda^{N/2}, \quad (1.13)$$

и, следовательно, на основании (1.12) получаем, что $|v(0)| \leq C\lambda^{N/4}$, или

$$\max_{\overline{D}} |u(x)| = |u(x_0)| = |v(0)| \leq C\lambda^{N/4}, \quad (1.14)$$

что и требовалось доказать.

§2. Достижимость оценки (1.9)

Основным результатом настоящей работы является доказательство достижимости оценки (1.9), и содержится он в следующей теореме.

ТЕОРЕМА 2.1. *Существует эллиптический оператор с непрерывными почти всюду в замкнутой N -мерной области $\overline{K}_N$ коэффициентами, для счетного множества нормированных в пространстве L_2 собственных функций которого справедливы оценки*

$$\max_{x \in \overline{K}_N} |u_n(x)| \geq C\lambda_n^{N/4},$$

где константа C — число, не зависящее от n .

Доказательство теоремы основывается на получении соответствующего результата для собственных функций следующей обобщенной задачи Штурма–Лиувилля:

$$y'' + \lambda\rho(x)y = 0 \quad (0 < x < l), \quad (2.1)$$

$$y(0) = 0, \quad y(l) = 0, \quad (2.2)$$

$$\int_0^l \rho(x)y^2(x) dx = 1, \quad (2.3)$$

где $\rho(x)$ — измеримая на отрезке $[0, l]$ функция, удовлетворяющая условиям $0 < \rho_0 \leq \rho(x) \leq \rho_1$, а l , ρ_0 , ρ_1 — заданные числа. Под собственной функцией задачи (2.1)–(2.2) мы понимаем функцию $y = y(x, \lambda, \rho) \not\equiv 0$, имеющую абсолютно непрерывную первую производную на отрезке $[0, l]$, удовлетворяющую условиям (2.2) и почти всюду уравнению (2.1).

Построим пример непрерывной почти всюду на отрезке $[0, l]$ функции $\rho(x)$, такой, что для счетного множества номеров n справедливы оценки

$$a\lambda_n^{1/4}(\rho) \leq \max_{0 \leq x \leq l} |y(x, \lambda_n(\rho), \rho)| \leq b\lambda_n^{1/4}(\rho),$$

где $y(x, \lambda_n(\rho), \rho)$ — собственные функции задачи (2.1)–(2.3), соответствующие собственным числам $\lambda_n(\rho)$, а числа $a > 0$ и $b > 0$ находятся явно и не зависят от n (правое неравенство выполняется для всех n).

На отрезке $[0, 3/4]$ введем в рассмотрение кусочно-постоянные функции

$$\rho_n(x) = \begin{cases} \pi^2, & \text{если } x \in \bigcup_{k=1}^n [x_{2(k-1)}, x_{2k-1}), \\ (9\pi)^2, & \text{если } x \in \bigcup_{k=1}^n [x_{2k-1}, x_{2k}), \\ (4\pi)^2, & \text{если } x \in [x_{2n}, 3/4], \end{cases}$$

где $x_i = (3/4)(1 - 1/3^i)$ ($i = 0, 1, \dots$), и рассмотрим задачу (2.1)–(2.2) при $\rho = \rho_n(x)$, $l = 3/4$. Собственные функции $y(x, \lambda_n(\rho), \rho_n)$ этой задачи удовлетворяют уравнению (2.1) на интервалах непрерывности функции $\rho_n(x)$, а в точках x_i ($i = 1, \dots, 2n$) — условиям гладкой склейки: $y(x_i - 0) = y(x_i + 0)$, $y'(x_i - 0) = y'(x_i + 0)$. Имеет место

ЛЕММА 2.1. *Функции*

$$y(x, \lambda, \rho_n) = \begin{cases} 3^{2(k-1)} \sin(\sqrt{\lambda}\pi x), & \text{если } x \in [x_{2(k-1)}, x_{2k-1}], \\ 3^{2(k-1)} \sin(9\sqrt{\lambda}\pi x), & \text{если } x \in [x_{2k-1}, x_{2k}], \quad k = 1, \dots, n, \\ \frac{1}{4} \cdot 3^{2n} \sin(4\sqrt{\lambda}\pi x), & \text{если } x \in [x_{2n}, 3/4], \end{cases} \quad (2.4)$$

являются собственными функциями задачи (2.1)–(2.2) ($\rho = \rho_n$, $l = 3/4$), соответствующими собственным числам $\lambda = 3^{2m}$ при любом натуральном $m \geq 4n$, причем точки x_{2k} — нули, а x_{2k-1} — абсциссы экстремумов этих функций.

Доказательство проводится непосредственной проверкой; при этом учитывается, что числа вида $3^{2k} - 1 = (3^2 - 1)(3^{2(k-1)} + 3^{2(k-2)} + \dots + 1) = 8p$ кратны 4, а числа вида $3^{2k-1} - 1 = (3 - 1)(3^{2k} + 3^{2k-1} + \dots + 1) = 2(2q - 1)$ кратны 2, но не кратны 4.

Обозначим теперь через $y^*(x, \lambda, \rho)$ решение задачи (2.1)–(2.3), т.е. нормированную собственную функцию. Тогда справедлива

ЛЕММА 2.2. *При любых натуральных числах m и n , таких, что $m \geq 4n$, имеют место оценки*

$$c_1 \cdot 3^n < \max_{0 \leq x \leq 3/4} |y^*(x, 3^{2m}, \rho_n)| < c_2 \cdot 3^n,$$

где константы c_1 и c_2 ни от n , ни от m не зависят и находятся в явном виде.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Найдем норму в L_2 функции $y(x, 3^{2m}, \rho_n)$:

$$\begin{aligned} \|y(x, 3^{2m}, \rho_n)\|_{L_2}^2 &= \int_0^{3/4} \rho_n(x) y^2(x, 3^{2m}, \rho_n) dx \\ &= \pi^2 \left[\sum_{k=1}^n 3^{4(k-1)} \left(\int_{x_{2(k-1)}}^{x_{2k-1}} \sin^2(3^m \pi x) dx + 81 \int_{x_{2k-1}}^{x_{2k}} \sin^2(3^{m+2} \pi x) dx \right) \right. \\ &\quad \left. + 3^{4n} \int_{x_{2n}}^{3/4} \sin^2(4 \cdot 3^m \pi x) dx \right] \\ &= \frac{\pi^2}{2} \left\{ \sum_{k=1}^n 3^{4(k-1)} [(x_{2k-1} - x_{2k-2}) + 81(x_{2k} - x_{2k-1})] + 3^{4n} \left(\frac{3}{4} - x_{2n} \right) \right\} \\ &= \frac{3\pi^2}{8} \left\{ \sum_{k=1}^n 3^{4(k-1)} \left[\left(\frac{1}{3^{2k-2}} - \frac{1}{3^{2k-1}} \right) + 81 \left(\frac{1}{3^{2k-1}} - \frac{1}{3^{2k}} \right) \right] + 3^{4n} \frac{1}{3^{2n}} \right\} \\ &= \frac{3\pi^2}{8} \left(\frac{56}{27} \sum_{k=1}^n 3^{2k} + 3^{2n} \right) = \frac{\pi^2}{4} \left(5 \cdot 3^{2n} - \frac{7}{27} \right) = \frac{\pi^2}{4} \left(5 - \frac{7}{2 \cdot 3^{2n}} \right) 3^{2n}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\|y(x, 3^{2m}, \rho_n)\|_{L_2} = \frac{\pi}{2} \sqrt{5 - \frac{7}{2 \cdot 3^{2n}}} 3^n. \quad (2.5)$$

Из (2.4) очевидным образом следует, что при $m \geq 4n$

$$\max_{0 \leq x \leq 3/4} |y(x, 3^{2m}, \rho_n)| = \max_{x_{2n} \leq x \leq 3/4} |y(x, 3^{2m}, \rho_n)| = \frac{1}{4} \cdot 3^{2n}. \quad (2.6)$$

Из (2.6) и (2.5) теперь получаем

$$\max_{0 \leq x \leq 3/4} |y^*(x, 3^{2m}, \rho_n)| = \max_{0 \leq x \leq 3/4} \frac{|y(x, 3^{2m}, \rho_n)|}{\|y(x, 3^{2m}, \rho_n)\|_{L_2}} = \frac{1}{2\pi} \left(5 - \frac{7}{2 \cdot 3^{2n}}\right)^{-1/2} \cdot 3^n,$$

откуда следует

$$\frac{1}{2\sqrt{5}\pi} \cdot 3^n < \max_{0 \leq x \leq 3/4} |y^*(x, 3^{2m}, \rho_n)| < \frac{1}{4\pi} \cdot 3^n,$$

что и требовалось доказать.

СЛЕДСТВИЕ. Для собственной функции $y^*(x, \lambda(\rho_n), \rho_n)$ задачи (2.1)–(2.3) ($\rho = \rho_n(x)$, $l = 3/4$), соответствующей собственному значению $\lambda = 3^{4n}$, при любом достаточно большом $n \in \mathbb{N}$ имеют место оценки

$$\frac{1}{2\sqrt{5}\pi} \lambda^{1/4} < \max_{0 \leq x \leq 3/4} |y^*(x, \lambda, \rho_n)| < \frac{1}{4\pi} \lambda^{1/4}. \quad (2.7)$$

Рассмотрим теперь задачу Коши

$$y'' + \lambda \rho(x)y = 0 \quad (0 < x < 3/4), \quad (2.8)$$

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 1, \quad (2.9)$$

где $\rho(x)$ — измеримая ограниченная на отрезке $[0, 3/4]$ функция. Под решением уравнения (2.8) понимается функция $y(x, \lambda, \rho)$ с абсолютно непрерывной первой производной, которая почти всюду на $(0, 3/4)$ удовлетворяет уравнению (2.8). Приведем еще ряд лемм.

ЛЕММА 2.3. Пусть

$$a_0(x, \rho) = x,$$

$$a_p(x, \rho) = \int_0^x \int_0^{t_1} \rho(t_2) \int_0^{t_2} \int_0^{t_3} \rho(t_4) \cdots \int_0^{t_{2p-2}} \int_0^{t_{2p-1}} t_{2p} \rho(t_{2p}) dt_{2p} \dots dt_1; \quad (2.10)$$

тогда функция

$$y(x, \lambda, \rho) = \sum_{p=0}^{\infty} (-\lambda)^p a_p(x, \rho) \quad (2.11)$$

является решением задачи (2.8)–(2.9).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде всего замечаем, что

$$|a_p(x, \rho)| \leq \frac{M}{(2p+1)!}, \quad |a'_p(x, \rho)| \leq \frac{M}{(2p)!}, \quad |a''_p(x, \rho)| \leq \frac{M}{(2p-1)!},$$

где $M = \sup_{0 \leq x \leq 3/4} |\rho(x)|$, причем первые два неравенства выполняются на всем отрезке $[0, 3/4]$, а последнее — почти всюду. Следовательно, ряд (2.11) и его производные равномерно и абсолютно сходятся. Тот факт, что сумма этого ряда есть решение задачи (2.8)–(2.9), проверяется легко.

ЛЕММА 2.4. Для любых чисел $\lambda > 0$, $\varepsilon > 0$ существуют числа $n_0 \in \mathbb{N}$, $h > 0$, такие, что при $|\lambda - \lambda_1| < h$, $n \geq n_0$ равномерно по $x \in [0, 3/4]$ выполняется оценка

$$|y(x, \lambda_1, r(x)) - y(x, \lambda, \rho_n(x))| < \varepsilon,$$

где $r(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \rho_n(x)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\tau(x) = r(x) - \rho_n(x)$. Тогда $\tau(x) \equiv 0$ при $x \in [0, x_{2n}]$ и $\tau(x) \leq 80\pi^2$ при $x \in [x_{2n}, 3/4]$ и, следовательно,

$$\left| \int_0^{3/4} \tau(x) dx \right| = \left| \int_{x_{2n}}^{3/4} \tau(x) dx \right| \leq 80\pi^2 \left(\frac{3}{4} - x_{2n} \right) = \frac{20\pi^2}{3^{2n-1}} = \varepsilon_1. \quad (2.12)$$

Далее,

$$\begin{aligned} a_p(x, r) &= a_p(x, \rho_n + \tau) \\ &= \int_0^x \int_0^{t_1} (\rho_n + \tau) \cdots \int_0^{t_{2p-2}} \int_0^{t_{2p-1}} t_{2p}(\rho_n(t_{2p}) + \tau(t_{2p})) dt_{2p} \dots dt_1 \\ &= \int_0^x \int_0^{t_1} \rho(t_2) \cdots \int_0^{t_{2p-2}} \int_0^{t_{2p-1}} t_{2p}\rho_n(t_{2p}) dt_{2p} \dots dt_1 + \sum_{i=1}^N a_i(x, \rho_n, \tau) \\ &= a_p(x, \rho_n) + \sum_{i=1}^N a_i(x, \rho_n, \tau), \end{aligned}$$

где $a_i(x, \rho_n, \tau)$ — интегралы вида (2.10), в которых вместо функции $\rho(x)$ на некоторых местах стоит функция $\rho_n(x)$, а на других — функция $\tau(x)$, и таких интегралов получается $N = C_p^1 + C_p^2 + \dots + C_p^p = 2^p - 1$.

Таким образом,

$$a_p(x, r) - a_p(x, \rho_n) = \sum_{i=1}^N a_i(x, \rho_n, \tau).$$

Оценим правую часть этого равенства:

$$|a_i(x, \rho_n, \tau)| < (81\pi^2)^p \int_0^{3/4} |\tau(x)| dx < (81\pi^2)^p \varepsilon_1,$$

$$\left| \sum_{i=1}^N a_i(x, \rho_n, \tau) \right| < N(81\pi^2)^p \varepsilon_1 = \varepsilon_2.$$

Значит,

$$|a_p(x, r) - a_p(x, \rho_n)| < \varepsilon_2. \quad (2.13)$$

Перейдем к основной оценке:

$$\begin{aligned} |y(x, \lambda_1, r(x)) - y(x, \lambda, \rho_n(x))| &= \left| \sum_{p=1}^{\infty} ((-\lambda_1)^p a_p(x, r) - (-\lambda)^p a_p(x, \rho_n)) \right| \\ &= \left| \sum_{p=1}^{\infty} ((-\lambda_1)^p a_p(x, r) - (-\lambda)^p a_p(x, r) + (-\lambda)^p a_p(x, r) - (-\lambda)^p a_p(x, \rho_n)) \right| \\ &\leq \sum_{p=1}^{\infty} \lambda^p |a_p(x, r) - a_p(x, \rho_n)| + \sum_{p=1}^{\infty} |\lambda^p - \lambda_1^p| a_p(x, r) = s_1 + s_2. \end{aligned}$$

Оценим суммы s_1 и s_2 :

$$s_1 = \sum_{p=1}^k \lambda^p |a_p(x, r) - a_p(x, \rho_n)| + \sum_{p=k+1}^{\infty} \lambda^p |a_p(x, r) - a_p(x, \rho_n)|.$$

Берем k настолько большим, чтобы вторая сумма стала меньше $\varepsilon/3$, а для оценки первой суммы используем неравенство (2.13). Итак $s_1 < \sum_{p=1}^k \lambda^p \varepsilon_2 + \varepsilon/3 = 2\varepsilon/3$, если взять n настолько большим, чтобы $\varepsilon_2 \leq \varepsilon(3 \sum_{p=1}^k \lambda^p)^{-1}$, $\varepsilon_1 = \varepsilon_2(N(9\pi)^{2p})^{-1}$.

Далее,

$$s_2 = |\lambda - \lambda_1| \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(80\pi^2)^p}{(2p+1)!} (\lambda^{p-1} + \lambda^{p-2}\lambda_1 + \dots + \lambda\lambda_1^{p-2} + \lambda_1^{p-1})$$

$$< h \sum_{p=1}^{\infty} \frac{p(2\lambda)^{(p-1)}(80\pi^2)^p}{(2p+1)!} = \frac{\varepsilon}{3}, \quad \text{если } h = \frac{\varepsilon}{3} \left(\sum_{p=1}^{\infty} \frac{p(2\lambda)^{(p-1)}(80\pi^2)^p}{(2p+1)!} \right)^{-1}.$$

Лемма доказана.

ЛЕММА 2.5. Для любых чисел $\varepsilon > 0$ и $m \in \mathbb{N}$ существует число $n_0 \in \mathbb{N}$, такое, что при $n \geq n_0$

$$|\lambda_m(r(x)) - \lambda_m(\rho_n(x))| < \varepsilon, \quad (2.14)$$

где $\lambda_m(r(x))$ и $\lambda_m(\rho_n(x))$ — это m -е собственные числа задачи (2.1)–(2.2) при $\rho = r$ и $\rho = \rho_n$ соответственно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Задача (2.1)–(2.2) равносильна в $L_2(0, 3/4)$ спектральной задаче для интегрального уравнения

$$y(x) = \lambda \int_0^{3/4} G(x, s) \sqrt{\rho(x)\rho(s)} y(s) ds,$$

где $G(x, s)$ — функция Грина оператора $\{y'' = 0, y(0) = y(3/4) = 0\}$. Рассмотрим в $L_2(0, 3/4)$ оператор $I(\rho)\varphi = \int_0^{3/4} G(x, s) \sqrt{\rho(x)\rho(s)} \varphi(s) ds$. Тогда

$$\begin{aligned} \|I(\rho_n(x)) - I(r(x))\|^2 &\leq \int_0^{3/4} \int_0^{3/4} |G(x, s)|^2 |\rho_n(x)\rho_n(s) - r(x)r(s)| dx ds \\ &\leq \int_0^{3/4} \int_0^{3/4} |\rho_n(x)\rho_n(s) - \rho_n(x)r(s) + \rho_n(x)r(s) - r(x)r(s)| dx ds \\ &\leq \int_0^{3/4} \int_0^{3/4} |\rho_n(x)(\rho_n(s) - r(s)) + r(s)(\rho_n(x) - r(x))| dx ds \\ &\leq 162\pi^2 \int_0^{3/4} |\rho_n(x) - r(x)| dx < \delta_1 \end{aligned}$$

(ввиду (2.12) δ_1 можно считать меньшим любого наперед заданного числа, если выбрать соответствующим образом n). Отсюда (см. [20, с. 368]) следует (2.14).

ЛЕММА 2.6. Для любых чисел $k \in \mathbb{N}$, $\varepsilon > 0$ существует число $n_0 \in \mathbb{N}$, такое, что при $n \geq n_0$ равномерно по $x \in [0, 3/4]$ выполняется неравенство

$$|y(x, \lambda_k(\rho_n), \rho_n(x)) - y(x, \lambda_k(r), r(x))| < \varepsilon,$$

где $y(x, \lambda, \rho)$ — решение задачи Коши (2.8)–(2.9), а $\lambda_k(\rho)$ есть k -е собственное число задачи (2.1)–(2.2).

Доказательство следует из лемм 2.4 и 2.5.

ЛЕММА 2.7. Для любого числа $\varepsilon > 0$ и непрерывной на отрезке $[0, 3/4]$ функции $\varphi(x) \not\equiv 0$ существует число $\delta > 0$, такое, что для любой непрерывной на отрезке $[0, 3/4]$ функции $g(x) \not\equiv 0$, удовлетворяющей условию $\max_{0 \leq x \leq 3/4} |\varphi(x) - g(x)| < \delta$, имеет место оценка

$$\max_{0 \leq x \leq 3/4} \left| |\varphi(x)| \left(\int_0^{3/4} |\varphi(x)|^2 dx \right)^{-1/2} - |g(x)| \left(\int_0^{3/4} |g(x)|^2 dx \right)^{-1/2} \right| < \varepsilon.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $g(x) = \varphi(x) + \tau(x)$, $M_1 = \max_{0 \leq x \leq 3/4} |\varphi(x)|$, $\tau_1 = \max_{0 \leq x \leq 3/4} |\tau(x)|$, $M_2 = \|\varphi(x)\|_{L_2} = \left(\int_0^{3/4} \varphi^2(x) dx \right)^{1/2}$ и $\tau_1 < M_2/2$.

Тогда

$$\frac{|\varphi(x)|}{\|\varphi(x)\|_{L_2}} - \frac{|g(x)|}{\|g(x)\|_{L_2}} \leq \frac{|\varphi(x)|}{M_2} - \frac{|\varphi(x)| - \tau_1}{M_2 + \tau_1} = \frac{\tau_1(|\varphi(x)| - M_2)}{M_2(M_2 + \tau_1)} \leq \frac{\tau_1 M_1}{M_2^2} < \frac{\varepsilon}{4},$$

если взять $\tau_1 < \varepsilon M_2^2 / 4M_1 = \delta$. Аналогично,

$$\begin{aligned} \frac{|g(x)|}{\|g(x)\|_{L_2}} - \frac{|\varphi(x)|}{\|\varphi(x)\|_{L_2}} &\leq \frac{|\varphi(x)| + \tau_1}{M_2 - \tau_1} - \frac{|\varphi(x)|}{M_2} \\ &= \frac{\tau_1(M_2 + |\varphi(x)|)}{(M_2 - \tau_1)M_2} < \frac{2M_1\tau_1}{0,5M_2^2} = 4 \frac{\tau_1 M_1}{M_2^2} < \varepsilon. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Из лемм 2.5–2.7 следует

ЛЕММА 2.8. Для любых чисел $m \in \mathbb{N}$ и $\varepsilon > 0$ существует число $n_0 \in \mathbb{N}$, такое, что при всех $n \geq n_0$ для соответствующих решений задачи (2.1)–(2.3) справедливы оценки

$$|y^*(x, \lambda_m(\rho_n), \rho_n(x)) - y^*(x, \lambda_m(r), r(x))| < \varepsilon. \quad (2.15)$$

Из оценок (2.7) и (2.15) следует

ЛЕММА 2.9. Существуют почти всюду непрерывные на отрезке $[0, 3/4]$ функции $r(x)$, такие, что для счетного множества собственных функций задачи (2.1)–(2.3) ($l = 3/4$, $\rho = r(x)$) имеют место оценки

$$\frac{1}{2\sqrt{5}\pi} \lambda^{1/4}(r) < \max_{0 \leq x \leq 3/4} |y^*(x, \lambda(r), r(x))| < \frac{1}{4\pi} \lambda^{1/4}(r).$$

Отметим, что функцию $r(x)$ можно сделать непрерывной всюду на полуинтервале $[0, 3/4]$ (см. [18, 19]).

Перейдем теперь к доказательству основной теоремы настоящей работы — теоремы 2.1.

Пусть

$$Lu \equiv \sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a(x_i) \frac{\partial u}{\partial x_i} \right), \quad (2.16)$$

где функция $a(x_i)$ непрерывна и положительна на отрезке $[0, b]$. Рассмотрим спектральную задачу

$$-Lu = \lambda u \quad (x \in K_N), \quad (2.17)$$

$$u|_{\Gamma_N} = 0, \quad (2.18)$$

где Γ_N — поверхность N -мерного куба $\bar{K}_N = \{0 \leq x_i \leq b, i = 1, \dots, N\}$. Пользуясь методом Фурье, сведем задачу (2.17)–(2.18) к N одинаковым задачам Штурма–Лиувилля

$$-\frac{d}{dt} \left(a(t) \frac{dv(t)}{dt} \right) = \mu v(t), \quad (2.19)$$

$$v(0) = 0, \quad v(b) = 0. \quad (2.20)$$

Известным преобразованием

$$x = \int_0^t \frac{ds}{a(s)}, \quad v(t(x)) = y(x),$$

где $t = t(x)$ — функция, обратная к функции $x = \int_0^t [a(s)]^{-1} ds$, приведем задачу (2.19)–(2.20) к задаче

$$y'' + \mu \rho(x)y = 0 \quad (0 < x < l), \quad (2.21)$$

$$y(0) = 0, \quad y(l) = 0, \quad (2.22)$$

где $\rho(x) = a(t(x))$, $l = \int_0^b [a(s)]^{-1} ds$.

На основании леммы 2.9 существует функция $\rho(x)$, непрерывная почти всюду на отрезке $[0, 3/4]$, такая, что для счетного множества нормированных собственных функций $y_n(x, \rho)$ задачи (2.21)–(2.22), соответствующих собственным значениям μ_n , имеют место оценки

$$\frac{1}{2\sqrt{5}\pi} \mu_n^{1/4} \leq \|y_n(x, \rho)\|_{C[0, 3/4]}. \quad (2.23)$$

Но числа $\lambda_n = N\mu_n$ являются собственными значениями задачи (2.17)–(2.18), а соответствующие им собственные функции имеют вид

$$u_n(x) = u_n(x_1, \dots, x_N) = v_n(x_1) \cdots v_n(x_N); \quad (2.24)$$

поэтому теорему 2.1 можно считать доказанной.

Построены также примеры эллиптических операторов, для нормированных собственных функций которых имеют место другие порядки роста [10–12].

В заключение автор выражает благодарность профессорам В. В. Жикову, В. Б. Лидскому и И. А. Шишмареву за внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Смолицкий Х. Л. Оценки производных фундаментальных функций. ДАН СССР, **74**, № 2, 205–208 (1950).
2. Эйдус Д. М. Оценки модуля собственных функций. ДАН СССР, **90**, № 6, 973–974 (1953).
3. Эйдус Д. М. Некоторые неравенства для собственных функций, ДАН СССР, **107**, № 6, 796–798 (1956).

4. Ильин В. А., Шишмарев И. А. О точных оценках собственных функций в замкнутой области. Материалы к совместному советско-американскому симпозиуму по уравнениям в частных производных, Новосибирск, август 1963.
5. Ильин В. А., Шишмарев И. А. Равномерные в замкнутой области оценки для собственных функций эллиптического оператора и их производных. Изв. АН СССР, сер. матем., **24**, № 6, 883–896 (1960).
6. Шишмарев И. А. Введение в теорию эллиптических уравнений. Изд-во МГУ, 1979.
7. Шишмарев И. А. Равномерные оценки производных решений задачи Дирихле и задачи на собственные функции для оператора $Lu = \operatorname{div}(p(x) \operatorname{grad} u) + q(x)u$ с разрывными коэффициентами. ДАН СССР, **137**, № 1, 45–47 (1961).
8. Ильин В. А. О системе классических собственных функций линейного самосопряженного оператора с разрывными коэффициентами. ДАН СССР, **137**, № 2, 272–275 (1961).
9. Ладыженская О. А. Метод Фурье для гиперболических уравнений. ДАН СССР, **74**, № 3, 417–420 (1950).
10. Якубов В. Я. Оценки для нормированных в L_2 собственных функций эллиптического оператора. ДАН СССР, **274**, № 1, 35–37 (1984).
11. Якубов В. Я. Оценки для собственных функций эллиптического оператора с суммируемым коэффициентом. Тезисы Второй Северо-Кавказской региональной конференции «Функционально-дифференциальные уравнения и их приложения», Махачкала, 1989.
12. Якубов В. Я. Точные оценки для нормированных в L_2 собственных функций эллиптического оператора. Докл. РАН, **331**, № 3, 286–287 (1993).
13. Гилбарг Д., Трудингер Н. Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка. Наука, М., 1989.
14. Nash J. Continuity of solutions of parabolic and elliptic equations. Amer. J. Math., **80**, No. 4, 931–954 (1958) [Имеется русский перевод: Нэш Дж. О непрерывности решений параболических и эллиптических уравнений. Математика, **4**, № 1, 31–52 (1960)].
15. De Giorgi E. Sulla differenziabilità e l'analiticità delle estremali degli integrali multipli regolari. Memorie delle Acc. Sci. Torino, Ser. 3, t. 3, p. 1, 25–43 (1957) [Имеется русский перевод: Де Джорджи Э. О дифференцируемости и аналитичности экстремалей кратных регулярных интегралов. Математика, **4**, № 6, 23–38 (1960)].
16. Stampacchia G. Problemi al contorno ellittici con dati discontinui dotati di soluzioni Hölderiane. Ann. Mat., **51**, 1–38 (1960).
17. Киндерлерер Д., Стампацкья Г. Введение в вариационные неравенства и их приложения. Мир, М., 1983.
18. Якубов В. Я. Неклассические двусторонние точные оценки для нормированных собственных функций задачи Штурма–Лиувилля. Вестник МГУ, сер. 1, матем., механика, № 4, 37–44 (1993).
19. Якубов В. Я. Спектральные краевые задачи для дифференциальных операторов с негладкими коэффициентами. Докторская диссертация, МГУ, 1996.
20. Гохберг И. Ц., Крейн М. Г. Теория вольтерровых операторов в гильбертовом пространстве и ее приложения. Наука, М., 1967.
21. Ладыженская О. А., Уралцева Н. Н. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. Наука, М., 1964.