Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. С. Акбаров, Свойство стереотипной аппроксимации и проблема однозначности следа, *Функци. анализ и его прил.*, 1999, том 33, выпуск 2, 68–73

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa355>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 107.22.136.117

26 апреля 2023 г., 10:13:28

Свойство стереотипной аппроксимации и проблема однозначности следа

© 1999. С. С. АКБАРОВ

В фундаментальной работе [1] А. Гротендик показал, что для произвольного банахова пространства X свойство аппроксимации эквивалентно однозначной определенности следа ядерного оператора. Это утверждение не переносится непосредственно на более общие классы пространств, поскольку здесь свойство аппроксимации перестает быть достаточным условием [2]. Тем не менее в модифицированном виде этот факт остается справедливым для любых локально выпуклых пространств [3]. Изучению условий однозначной определенности следа и близким вопросам посвящена серия работ Г. Л. Литвинова [2–4].

В настоящей заметке предлагается решение проблемы однозначности следа для категории стереотипных локально выпуклых пространств, введенной автором в [5, 6]. Мы отмечаем, что в этой категории однозначность следа эквивалентна естественно определяемому свойству стереотипной аппроксимации, а также анонсируем некоторые другие результаты, касающиеся свойства стереотипной аппроксимации и близких к нему условий.

1. Псевдополные и псевдонасыщенные пространства. В этом и следующем пунктах мы напомним некоторые определения работ [5, 6]¹. Условимся *морфизмом* локально выпуклых пространств (ЛВП) называть произвольное линейное непрерывное отображение $\varphi: X \rightarrow Y$.

Множество S в ЛВП X мы, как обычно, называем *вполне ограниченным*, если для всякой окрестности нуля U в X найдется конечное множество $F \subseteq X$, такое, что $S \subseteq U + F$. Пространство X называется *псевдополным*, если всякая вполне ограниченная направленность Коши в X сходится. Это равносильно тому, что всякое замкнутое вполне ограниченное множество в X является компактом.

Как и в случае с полными пространствами, существует стандартная операция, позволяющая каждому ЛВП X сопоставить ближайшее к нему «снаружи» псевдополное пространство X^∇ , называемое его *псевдополнением*.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Каждому ЛВП X можно поставить в соответствие морфизм $\nabla_X: X \rightarrow X^\nabla$ в некоторое псевдополное ЛВП X^∇ так, чтобы выполнялись следующие условия:*

(i) *X псевдополно тогда и только тогда, когда $\nabla_X: X \rightarrow X^\nabla$ — изоморфизм;*

(ii) *для любого морфизма ЛВП $\varphi: X \rightarrow Y$ найдется единственный морфизм ЛВП $\varphi^\nabla: X^\nabla \rightarrow Y^\nabla$, замыкающий диаграмму*

¹Терминология и обозначения настоящей работы несколько отличаются от принятых в [5, 6], но все результаты сохраняют преемственность. В частности, $X^\nabla = \#X$, $X^\Delta = {}_bX$, $X^* = X'$.

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{\nabla_X} & X^\nabla \\
 \varphi \downarrow & & \downarrow \varphi^\nabla \\
 Y & \xrightarrow{\nabla_Y} & Y^\nabla
 \end{array}$$

Множество D в ЛВП X мы называем *емким*, если для всякого вполне ограниченного множества $S \subseteq X$ найдется конечное множество $F \subseteq X$, такое, что $S \subseteq D + F$. Пространство X мы называем *псевдонасыщенным*, если всякое замкнутое выпуклое уравновешенное емкое множество D в X является окрестностью нуля.

Оказывается, существует также стандартная конструкция, позволяющая каждому ЛВП X сопоставить ближайшее к нему «изнутри» псевдонасыщенное пространство X^Δ , называемое его *псевдонасыщением*.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Каждому ЛВП X можно поставить в соответствие морфизм $\Delta_X: X^\Delta \rightarrow X$ из некоторого псевдонасыщенного ЛВП X^Δ так, чтобы выполнялись следующие условия:

- (i) X псевдонасыщенно тогда и только тогда, когда $\Delta_X: X^\Delta \rightarrow X$ — изоморфизм;
- (ii) для любого морфизма ЛВП $\varphi: Y \rightarrow X$ найдется единственный морфизм ЛВП $\varphi^\Delta: Y^\Delta \rightarrow X^\Delta$, замыкающий диаграмму

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xleftarrow{\Delta_X} & X^\Delta \\
 \varphi \uparrow & & \uparrow \varphi^\Delta \\
 Y & \xleftarrow{\Delta_Y} & Y^\Delta
 \end{array}$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Если X псевдонасыщенно, то псевдополнение X^∇ также псевдонасыщенно, а если X псевдополно, то псевдонасыщение X^Δ также псевдополно.

2. Стереотипные пространства. Для произвольного ЛВП X над $\mathbb{C}$ обозначим символом X^* пространство линейных непрерывных функционалов $f: X \rightarrow \mathbb{C}$, наделенное топологией равномерной сходимости на вполне ограниченных множествах в X . Как уже отмечалось в работе [5], для ЛВП X следующие условия эквивалентны:

- (i) пространство X псевдополно и псевдонасыщенно;
- (ii) естественная инъекция $i_X: X \rightarrow X^{**}$ является изоморфизмом ЛВП.

Пространства X , удовлетворяющие этим условиям, мы называем *стереотипными*. Класс $\mathfrak{S}$ стереотипных пространств весьма широк, поскольку, как отмечалось в [5], включает в себя все квазиполные бочечные пространства. Он образует категорию с линейными непрерывными отображениями в качестве морфизмов. Эта категория предабелева и допускает любые индуктивные и проективные пределы.

Если X и Y — два стереотипных пространства, то пусть символ $Y \otimes X$ обозначает псевдонасыщение пространства морфизмов $\varphi: X \rightarrow Y$, наделенного топологией равномерной сходимости на вполне ограниченных множествах. Пространство $Y \otimes X$ стереотипно, и мы называем его (*внутренним*) *пространством морфизмов из X в Y* . Переход к сопряженному отображению

устанавливает изоморфизм стереотипных пространств

$$Y \odot X \cong X^* \odot Y^*.$$

Определим *проективное стереотипное тензорное произведение* $X \otimes Y$ и *инъективное стереотипное тензорное произведение* $X \odot Y$ стереотипных пространств X и Y формулами

$$X \otimes Y = (X^* \odot Y)^*, \quad X \odot Y = Y \otimes X^*.$$

Можно проверить, что для пространств Фреше $X \otimes Y$ есть обычное проективное тензорное произведение, а если, кроме того, X обладает (классической) аппроксимацией, то $X \odot Y$ совпадает с обычным инъективным тензорным произведением (в смысле [7]). Для любых $x \in X$ и $y \in Y$ элементарный тензор $x \otimes y \in X \otimes Y$ и элементарный оператор $x \odot y \in X \odot Y$ определяются равенствами

$$(x \otimes y)(\varphi) = \varphi(y)(x), \quad (x \odot y)(f) = f(x)y, \quad \varphi \in X^* \odot Y, \quad f \in X^*.$$

В категории $\mathfrak{S}$ справедливы тождества

$$\begin{aligned} \mathbb{C} \otimes X &\cong X \cong X \otimes \mathbb{C}, & \mathbb{C} \odot X &\cong X \cong X \odot \mathbb{C}, \\ (X \otimes Y) \otimes Z &\cong X \otimes (Y \otimes Z), & (X \odot Y) \odot Z &\cong X \odot (Y \odot Z), \\ X \otimes Y &\cong Y \otimes X, & X \odot Y &\cong Y \odot X, \\ (X \otimes Y)^* &\cong Y^* \odot X^*, & (X \odot Y)^* &\cong Y^* \otimes X^*, \\ X \odot (Y \otimes Z) &\cong (X \odot Y) \odot Z, & (X \odot Y) \odot Z &\cong X \odot (Y \odot Z), \end{aligned}$$

из которых, в частности, следует

ТЕОРЕМА 4. *Категория $\mathfrak{S}$ стереотипных пространств является моноидальной категорией (в смысле [8, 9]) относительно каждой из операций $\otimes$ и $\odot$, причем $\otimes$ задает на $\mathfrak{S}$ структуру замкнутой моноидальной категории с внутренним гом-функтором $\text{Hom}(X, Y) = Y \odot X$.*

3. Отображение Гротендика $@: X \otimes Y \rightarrow X \odot Y$ и свойство стереотипной аппроксимации.

ТЕОРЕМА 5. *Для любых стереотипных пространств X и Y существует единственный морфизм стереотипных пространств*

$$@: X \otimes Y \rightarrow X \odot Y,$$

называемый отображением Гротендика, который удовлетворяет тождеству

$$@ (x \otimes y) = x \odot y.$$

Пусть символ $\mathcal{L}(X)$ обозначает внутреннее пространство эндоморфизмов: $\mathcal{L}(X) = X \odot X$. Очевидно, что

$$\mathcal{L}(X) = X^* \odot X, \quad \mathcal{L}(X)^* = X^* \otimes X.$$

Условимся говорить, что стереотипное пространство X обладает *стереотипной аппроксимацией*, если единичный оператор 1_X приближается конечномерными в пространстве $\mathcal{L}(X)$. Это означает, что множество $\mathcal{F}(X)$ конечномерных операторов плотно в $\mathcal{L}(X)$, т.е. выполняется равенство $\overline{\mathcal{F}(X)} = \mathcal{L}(X)$. Понятно, что стереотипная аппроксимация влечет за собой обычную

аппроксимацию. Отсюда следует, что существуют пространства без стереотипной аппроксимации. С другой стороны, нетрудно предъявить простейшие достаточные условия для стереотипной аппроксимации. Таким условием будет существование базиса в пространстве X (см. п. 5 ниже).

ТЕОРЕМА 6. *Для стереотипного пространства X следующие условия эквивалентны:*

- (i) X обладает стереотипной аппроксимацией;
- (ii) X^* обладает стереотипной аппроксимацией;
- (iii) отображение Гротендика $@: \mathcal{L}(X)^* = X^* \otimes X \rightarrow X^* \odot X = \mathcal{L}(X)$ является мономорфизмом;
- (iv) отображение Гротендика $@: \mathcal{L}(X)^* = X^* \otimes X \rightarrow X^* \odot X = \mathcal{L}(X)$ является эпиморфизмом;
- (v) для всякого стереотипного пространства Y отображение Гротендика $@: Y \otimes X \rightarrow Y \odot X$ является мономорфизмом;
- (vi) для всякого стереотипного пространства Y отображение Гротендика $@: Y \otimes X \rightarrow Y \odot X$ является эпиморфизмом.

Можно проверить, что стереотипная аппроксимация наследуется прямыми произведениями и прямыми суммами. По аналогии с известным контрпримером Шанковского для банаховой теории [10] можно было бы ожидать, что стереотипная аппроксимация не наследуется пространствами операторов. Удивительно, что стереотипная теория в этом смысле оказывается устроенной проще:

ТЕОРЕМА 7. *Пусть X и Y — стереотипные пространства со стереотипной аппроксимацией. Тогда пространства $X \odot Y$, $X \otimes Y$, $X \odot Y$ также обладают стереотипной аппроксимацией.*

4. Проблема однозначности следа. Определим на тензорном произведении $X^* \otimes X = \mathcal{L}(X)^*$ функционал свертки формулой

$$\text{cont}: \mathcal{L}(X)^* \rightarrow \mathbb{C}, \quad \text{cont}(\alpha) = \alpha(1_X).$$

Поскольку на элементарных тензорах он, очевидно, действует по формуле

$$\text{cont}(f \otimes x) = f(x),$$

этот функционал будет (единственным по теореме 11 из [5]) непрерывным продолжением на $X^* \otimes X$ билинейной формы $(f, x) \mapsto f(x)$.

Условимся говорить, что в X корректно определен след, если ядро $\text{Ker } @$ отображения Гротендика $@: \mathcal{L}(X)^* \rightarrow \mathcal{L}(X)$ содержится в ядре $\text{Ker}(\text{cont})$ функционала свертки

$$\text{Ker } @ \subseteq \text{Ker}(\text{cont}).$$

Ясно, что в этом случае свертка, рассматриваемая как функционал на конечномерных операторах, однозначно продолжается до функционала следа tr на всех операторах, являющихся образами тензоров из $X^* \otimes X$ при отображении Гротендика.

ТЕОРЕМА 8. *Для стереотипного пространства X следующие условия эквивалентны:*

- (i) X обладает стереотипной аппроксимацией;
- (ii) в X корректно определен след.

5. Пространства с базисом. Пусть I — произвольное множество индексов и 2_I — система всех его конечных подмножеств. Определим на 2_I частичный порядок теоретико-множественным включением $A \subseteq B$. Назовем *правилom суммирования* на множестве I произвольную конфинальную подсистему $\mathcal{J} \subseteq 2_I$ (для любого $A \in 2_I$ существует $F \in \mathcal{J}$, такое, что $A \subseteq F$). Семейство $\{x_i; i \in I\}$ элементов ЛВП X условимся называть *суммируемым по правилу $\mathcal{J}$* , если существует элемент $x \in X$, такой, что для любой окрестности нуля $U \subseteq X$ существует $C \in \mathcal{J}$, такое, что для любого $F \in \mathcal{J}$ включение $C \subseteq F$ влечет за собой включение $\sum_{i \in F} x_i - x \in U$. При этом x будет называться *суммой семейства $\{x_i; i \in I\}$ по правилу $\mathcal{J}$* и обозначаться $x = \sum_{i \in I} x_i$ ($\mathcal{J}$).

Семейство пар $\{(e_i, e'_i); i \in I\}$, $e_i \in X$, $e'_i \in X^*$, назовем *базисом* стереотипного пространства X относительно $\mathcal{J}$, если оно удовлетворяет условиям

$$\langle e_i, e'_j \rangle = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ 1, & i = j, \end{cases} \quad \sum_{i \in I} e'_i \odot e_i = 1_X \quad (\mathcal{J}).$$

При подходящем выборе правила суммирования $\mathcal{J} \subseteq 2_I$ наше определение становится эквивалентным классическим определениям базиса. Например, если $I = \mathbb{N}$, а $\mathcal{J}$ состоит из множеств вида $F = \{1, \dots, n\}$, $n \in \mathbb{N}$, то для бочечных пространств понятие базиса относительно $\mathcal{J}$ совпадает с понятием базиса Шаудера [11]. Если же $I = \mathbb{N}$ и $\mathcal{J} = 2_I$, то мы получаем определение безусловного базиса [11]. Примерами пространств с несчетными базисами (при $\mathcal{J} = 2_I$) являются пространства $\mathbb{C}^I$ и $\mathbb{C}_I$ (рассматривавшиеся автором в [12], с точностью до замены $\mathbb{C}$ на $\mathbb{R}$). Как уже говорилось, *существование базиса (относительно произвольного правила суммирования) является достаточным условием для стереотипной аппроксимации*. Отметим, что X обладает базисом тогда и только тогда, когда X^* обладает базисом. Из очевидной формулы $\text{cont}(u) = \sum_{i \in I} e'_i(u(e_i))$, $u \in \mathcal{L}(X)^*$, следует, что на пространстве с базисом след, определенный выше, совпадает с матричным следом (т.е. является суммой диагональных элементов).

Правило суммирования $\mathcal{J}$ назовем *замкнутым*, если $F \cup G \in \mathcal{J}$ для любых $F, G \in \mathcal{J}$. Как и в случае со свойством аппроксимации, *свойство иметь базис относительно замкнутого правила суммирования наследуется прямыми произведениями и прямыми суммами*. Кроме того, справедлива

ТЕОРЕМА 9. *Если стереотипные пространства X и Y обладают базисами относительно замкнутых правил суммирования, то пространства $Y \odot X$, $X \otimes Y$, $X \odot Y$ тоже обладают базисами.*

В частности, в противоположность результату Шанковского [10], *если X — стереотипное пространство с базисом относительно замкнутого правила суммирования (например, гильбертово), то $\mathcal{L}(X)$ — тоже стереотипное пространство с базисом.*

ЛИТЕРАТУРА

1. Grothendieck A. Mem. Amer. Math. Soc., **16**, 1955.
2. Литвинов Г. Л. В кн.: Теория функций, функциональный анализ и их приложения, т. 39, 1983, с. 73–87; англ. вариант: Selecta Mathematica Sovietica, **11**, No. 1, 25–40 (1992).
3. Литвинов Г. Л., Ломоносов В. И. В кн.: Труды семинара по векторному и тензорному анализу, т. 20, 1981, с. 210–227; англ. вариант: Selecta Mathematica Sovietica, **8**, No. 4, 323–339 (1989).

4. Литвинов Г. Л. В кн.: Труды семинара по векторному и тензорному анализу, т. 19, 263–272 (1979); англ. вариант: *Selecta Mathematica Sovietica*, **8**, No. 3, 203–212 (1989). 5. Акбаров С. С. Матем. заметки, **57**, №3, 463–466 (1995). 6. Акбаров С. С. Функци. анализ и его прил., **29**, вып. 4, 68–72 (1995). 7. Jarchow H. *Locally convex spaces*. B. G. Teubner, Stuttgart, 1981. 8. MacLane S. *Categories for working mathematician*. Springer, N. Y., 1971. 9. Артамонов В. А., Салий В. Н., Скорняков Л. А., Шеврин Л. Н., Шульгейфер Е. Г. *Общая алгебра*. Наука, М., 1991. 10. Szpankowski A. *Acta Math.*, **147**, 89–108 (1981). 11. Шефер Х. *Топологические векторные пространства*. Мир, М., 1971. 12. Акбаров С. С. *Известия РАН*. **59**, №1, 3–48 (1995).

Московский государственный
технический университет им. Н. Э. Баумана
e-mail: serge@mx.bmstu.ru

Поступило в редакцию
9 декабря 1997 г.

УДК 517.982.27

Кратные ряды Радемахера в симметричных пространствах

© 1999. С. В. Асташкин

Пусть

$$r_k(t) = \text{sign} \sin 2^{k-1} \pi t \quad (k = 1, 2, \dots)$$

— система функций Радемахера на $I = [0, 1]$. Рассмотрим множество функций $x(t)$, представимых в виде

$$x(t) = \sum_{i \neq j} a_{i,j} r_i(t) r_j(t) \quad (t \in I). \quad (1)$$

Как и в случае рядов по системе Радемахера (см., например, [1, с. 148–150]), ряд (1) сходится почти всюду на I (т. е. существует предел его прямоугольных частичных сумм) тогда и только тогда, когда последовательность коэффициентов $a = (a_{i,j})_{i \neq j}$ принадлежит l_2 .

Ортонормированная на I система $\{r_i r_j\}_{i \neq j}$, в отличие от системы Радемахера, состоит из функций, не являющихся независимыми. Тем не менее ее свойства во многих отношениях напоминают свойства семейств независимых и равномерно ограниченных функций. Так, например, условие $\sum_{i \neq j} a_{i,j}^2 < \infty$ влечет за собой суммируемость функции $\exp(\alpha |x(t)|)$ для любого $\alpha > 0$ [2, р. 105]. В то же время есть и существенные отличия. Например, кратная система $\{r_i r_j\}_{i \neq j}$ не является системой Сидона [3]. Для более полного изучения ее свойств (в частности, вопроса о возможности усиления утверждения об экспоненциальной суммируемости) целесообразно перейти к общим симметричным пространствам.

Напомним, что банахово пространство X измеримых по Лебегу на I функций $x = x(t)$ называется симметричным пространством (СП), если из неравенства $x^*(t) \leq y^*(t)$ ($z^*(t)$ — невозрастающая перестановка функции $|z(u)|$ [4, с. 83]) и того, что $y \in X$, следует, что $x \in X$ и $\|x\| \leq \|y\|$.

Кроме пространств L_p ($1 \leq p \leq \infty$), важными примерами СП являются пространства Орлича и Марцинкевича.