Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Г. Баскаков, Об абстрактном аналоге преобразования Крылова–Боголюбова в теории возмущенных линейных операторов, *Функци. анализ и его прил.*, 1999, том 33, выпуск 2, 76–80

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa357>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.149

26 апреля 2023 г., 07:26:06

последовательностей E , интерполяционного между l_1 и l_2 , найдется функциональное СП X на I , такое, что

$$\left\| \sum_{j=1}^{\infty} c_j r_j \right\|_X \asymp \|(c_j)\|_E.$$

Основная идея доказательств теорем 1–4 состоит в «разделении» переменных, т. е. переходе от функций вида (1) к функциям вида

$$y(s, t) = \sum_{i \neq j} b_{i,j} r_i(s) r_j(t) \quad (s \in I, t \in I). \quad (2)$$

Для множества функций вида (2) и СП $X(I \times I)$ на квадрате $I \times I$ справедливы утверждения, аналогичные приведенным.

ЛИТЕРАТУРА

1. Качмаж С., Штейнгауз Г. Теория ортогональных рядов. Физматгиз, М., 1958.
2. Ledoux M., Talagrand M. Probability in Banach spaces. Springer-Verlag, 1991.
3. Plichko A. M., Popov M. M. Symmetric function spaces on atomless probability spaces. Diss. Math. Warszawa, 1990.
4. Крейн С. Г., Петунин Ю. И., Семенов Е. М. Интерполяция линейных операторов. Наука, М., 1978.
5. Rodin V. A., Semyonov E. M. Anal. Math., **1**, No. 3, 207–222 (1975).
6. Красносельский М. А., Рутецкий Я. Б. Выпуклые функции и пространства Орлича. Физматгиз, М., 1958.
7. Родин В. А., Семенов Е. М. Функциональный анализ и его прил., **13**, вып. 2, 91–92 (1979).
8. Lindenstrauss J., Tzafriri L. Classical Banach spaces 2. Springer-Verlag, Berlin, 1979.
9. Асташкин С. В. Изв. РАЕН, сер. МММИУ, **1**, № 1, 18–35 (1997).

Самарский государственный университет

Поступило в редакцию
10 ноября 1997 г.

УДК 517.9

Об абстрактном аналоге преобразования Крылова–Боголюбова в теории возмущенных линейных операторов*

© 1999. А. Г. Баскаков

Пусть $\mathcal{X}$ — банахово пространство над полем $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ и $B(a, \rho)$ — открытый шар в $\mathcal{X}$ с центром в точке $a \in \mathcal{X}$ и радиусом $\rho > 0$. Символом $\text{Lip}^k(\mathcal{X}, a, \rho)$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, обозначим банахово пространство непрерывных на замкнутом шаре $\overline{B}(a, \rho) = \overline{B}(a, \rho)$ отображений (операторов), принимающих значения в $\mathcal{X}$ и k раз дифференцируемых на $B(a, \rho)$, причем k -я производная удовлетворяет условию Липшица. Положим $\text{Lip}(\mathcal{X}, a, \rho) = \text{Lip}^0(\mathcal{X}, a, \rho)$.

Пусть $\mathcal{A}: D(\mathcal{A}) \subset \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ — замкнутый линейный оператор с плотной областью определения $D(\mathcal{A})$ (ему отводится роль невозмущенного оператора). В данной заметке рассматривается возмущенное отображение вида $\mathcal{L} = \mathcal{A} - \varepsilon \mathcal{F}: D(\mathcal{A}) \cap \overline{B}(0, \rho) \subset \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$, где $\mathcal{F} \in \text{Lip}^1(\mathcal{X}, 0, \rho)$, $\rho > 0$ и

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект 98–01–01035.

$\varepsilon \in K$ — малый параметр. При определенных условиях на $\mathcal{A}$ и возмущение $\varepsilon \mathcal{F}$ отображение $\mathcal{L}$ преобразуется в отображение более «простой» структуры. Осуществляемое преобразование является абстрактным аналогом преобразования Крылова–Боголюбова [1–3], используемого при обосновании метода усреднения (на бесконечном промежутке) для обыкновенных дифференциальных уравнений (см. пример ниже). Если $\mathcal{F}$ принадлежит банаховой алгебре $\text{End } \mathcal{X}$ линейных ограниченных операторов, действующих в $\mathcal{X}$, то мы приходим к методу подобных операторов [4, 5].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2 \in \text{Lip}(\mathcal{X}, a, \rho)$. Будем говорить, что отображение $\mathcal{A} - \mathcal{F}_1: D(\mathcal{A}) \cap \overline{B}(a, \rho) \subset \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ эквивалентно отображению $\mathcal{A} - \mathcal{F}_2: D(\mathcal{A}) \cap \overline{B}(a, \rho) \subset \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ на шаре $\overline{B}(a, \rho_0)$, $\rho_0 \leq \rho$, если существует отображение $\mathcal{U} \in \text{Lip}^1(\mathcal{X}, a, \rho_0)$, такое, что линейные операторы $\mathcal{U}'(x) \in \text{End } \mathcal{X}$, $x \in \overline{B}(a, \rho_0)$, обратимы, $\sup_{x \in \overline{B}(a, \rho_0)} \|\mathcal{U}'(x)^{-1}\| < \infty$, $\mathcal{U}(x) \in D(\mathcal{A}) \cap \overline{B}(a, \rho_0)$ для любого $x \in D(\mathcal{A}) \cap \overline{B}(a, \rho_0)$ и имеют место равенства

$$(\mathcal{A} - \mathcal{F}_1)(\mathcal{U}(x)) = \mathcal{U}'(x)(\mathcal{A} - \mathcal{F}_2)(x), \quad x \in \overline{B}(a, \rho_0) \cap D(\mathcal{A}).$$

Отображение $\mathcal{U}$ назовем оператором преобразования (отображения $\mathcal{A} - \mathcal{F}_1$ в отображение $\mathcal{A} - \mathcal{F}_2$).

Если $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2 \in \text{End } \mathcal{X}$, то оператор преобразования $\mathcal{U}$ считается принадлежащим алгебре $\text{End } \mathcal{X}$. Таким образом, в этом случае эквивалентность операторов $\mathcal{A} - \mathcal{F}_1$ и $\mathcal{A} - \mathcal{F}_2$ означает их подобие.

Далее используется линейный оператор

$$\text{ad}_{\mathcal{A}}: D(\text{ad}_{\mathcal{A}}) \subset \text{Lip}^1(\mathcal{X}, 0, \rho) \rightarrow \text{Lip}^1(\mathcal{X}, 0, \rho)$$

с областью определения $D(\text{ad}_{\mathcal{A}})$, которая состоит из таких отображений $X \in \text{Lip}^1(\mathcal{X}, 0, \rho)$, что $X(x) \in D(\mathcal{A})$ для всех $x \in D(\mathcal{A}) \cap \overline{B}(0, \rho)$ и отображение

$$Y_0(x) = \mathcal{A}X(x) - X'(x)\mathcal{A}x, \quad x \in D(\mathcal{A}) \cap \overline{B}(0, \rho),$$

определенное на $D(\mathcal{A}) \cap \overline{B}(0, \rho)$, допускает расширение до некоторого отображения $Y \in \text{Lip}^1(\mathcal{X}, 0, \rho)$ на $\overline{B}(0, \rho)$. При этом полагаем $\text{ad}_{\mathcal{A}}X = Y$. В частности, сужение оператора $\text{ad}_{\mathcal{A}}$ на $\text{End } \mathcal{X}$ является оператором коммутирования с $\mathcal{A}$ ($\text{ad}_{\mathcal{A}}X = \mathcal{A}X - X\mathcal{A}$, если $X \in \text{End } \mathcal{X} \cap D(\text{ad}_{\mathcal{A}})$).

Далее используются следующие предположения.

ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ 1. Существуют отображение $\mathcal{F}_0 \in \text{Lip}^1(\mathcal{X}, 0, \rho)$ и сходящаяся к нулю последовательность (ε_n) из K , обладающие следующими свойствами: отображение $\mathcal{F} - \mathcal{F}_0$ представимо в виде $(\text{ad}_{\mathcal{A}} - \varepsilon_n I)X_n$, где $X_n \in D(\text{ad}_{\mathcal{A}}) \subset \text{Lip}^1(\mathcal{X}, 0, \rho)$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} |\varepsilon_n| \|X_n\| = 0$.

ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ 2. Существует вектор $x_0 \in B(0, \rho) \cap D(\mathcal{A})$, такой, что $\mathcal{A}x_0 = \mathcal{F}_0(x_0) = 0$.

ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ 3. Последовательность $\mathcal{A}_n = \mathcal{A} - \varepsilon_n \mathcal{F}_0'(x_0): D(\mathcal{A}) \subset \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$, $n \geq 1$, состоит из обратимых линейных операторов и

$$\sup_{n \geq 1} \|\varepsilon_n \mathcal{A}_n^{-1}\|_{\text{End } \mathcal{X}} < \infty.$$

В связи с предположением 3 отметим, что, как правило, интересен случай, когда $\mathcal{A}$ — необратимый оператор. Отображения $\overline{\mathcal{A}}_n(x) = \mathcal{A}x - \varepsilon_n \mathcal{F}_0(x)$, $x \in B(0, \rho)$, $n \geq 1$, назовем усредненными отображениями.

Имеют место равенства

$$(\mathcal{A} - \varepsilon_n \mathcal{F})(x + \varepsilon_n X_n(x)) = (I + \varepsilon X'_n(x))(\mathcal{A}x - \varepsilon_n \mathcal{F}_0(x) - \varepsilon_n \Phi_n(x)), \quad n \geq 1, \quad (1)$$

где $\Phi_n \in \text{Lip}^1(\mathcal{X}, 0, \rho)$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\Phi_n\| = 0$. Из этих равенств и теоремы о сжимающих отображениях получаем следующие два утверждения.

ТЕОРЕМА 1. Пусть для оператора $\mathcal{A}$ и отображения $\mathcal{F} \in \text{Lip}^1(\mathcal{X}, 0, \rho)$ выполнены предположения 1–3. Тогда существуют числа $r_0 \in (0, \rho - \|x_0\|)$, $n_0 \in \mathbb{N}$, такие, что для любого $n > n_0$ уравнение $\mathcal{A}x = \varepsilon_n \mathcal{F}(x)$ имеет единственное решение $x_n^0 \in B(x_0, r_0)$, причем $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n^0 - x_0\| = 0$.

ТЕОРЕМА 2. Если для линейного оператора $\mathcal{F} \in \text{End } \mathcal{X}$ выполнены предположения 1 и 3 (где $\mathcal{F}_0, X_n \in \text{End } \mathcal{X}$, $n \geq 1$, $\mathcal{F}'_0(x_0) = \mathcal{F}_0$, $x_0 = 0$), то существует такое число $n_0 \in \mathbb{N}$, что все линейные операторы $\overline{\mathcal{A}_n} = \mathcal{A} - \varepsilon_n \mathcal{F}: D(\mathcal{A}) \subset \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$, $n > n_0$, обратимы и $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\overline{\mathcal{A}_n}^{-1} - \mathcal{A}_n^{-1}\| = 0$.

Конкретизируем условия проверки предположений 1–3 в случае, если невозмущенный оператор $\mathcal{A}: D(\mathcal{A}) \subset \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$, действующий в комплексном банаховом пространстве $\mathcal{X}$, является самосопряженным в смысле следующего определения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Линейный оператор $\mathcal{A}: D(\mathcal{A}) \subset \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ назовем *самосопряженным*, если $i\mathcal{A}$ является производящим оператором некоторой сильно непрерывной изометрической группы операторов $\{T_{\mathcal{A}}(t); t \in \mathbb{R}\}$ из алгебры $\text{End } \mathcal{X}$.

Ясно, что любой самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве является самосопряженным в смысле определения 2.

По самосопряженному оператору $\mathcal{A}: D(\mathcal{A}) \subset \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ (с $T_{\mathcal{A}}(t) = \exp it\mathcal{A}$, $t \in \mathbb{R}$) построим группу $\{\tilde{T}_{\mathcal{A}}(t); t \in \mathbb{R}\}$ изометрических операторов из алгебры $\text{End Lip}^1(\mathcal{X}, 0, \rho)$ вида

$$(\tilde{T}_{\mathcal{A}}(t)\mathcal{F})(x) = T_{\mathcal{A}}(t)\mathcal{F}(T_{\mathcal{A}}(-t)x), \quad t \in \mathbb{R}, \quad x \in \overline{B}(0, \rho), \quad \mathcal{F} \in \text{Lip}^1(\mathcal{X}, 0, \rho).$$

ЛЕММА 1. Линейный оператор $i \text{ad}_{\mathcal{A}}$ является производящим оператором группы $\{\tilde{T}_{\mathcal{A}}(t); t \in \mathbb{R}\}$, спектр $\sigma(\text{ad}_{\mathcal{A}})$ оператора $\text{ad}_{\mathcal{A}}$ веществен и имеют место оценки

$$\|\varepsilon(i\varepsilon I - \text{ad}_{\mathcal{A}})^{-1}\| \leq 1, \quad \varepsilon > 0.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Отображение $\mathcal{F} \in \text{Lip}^1(\mathcal{X}, 0, \rho)$ назовем *почти периодическим* (периодическим периода $\omega > 0$), если функция $t \mapsto \tilde{T}_{\mathcal{A}}(t)\mathcal{F}: \mathbb{R} \rightarrow \text{Lip}^1(\mathcal{X}, 0, \rho)$ является непрерывной почти периодической (ω -периодической) функцией.

ЛЕММА 2. Спектр сужения оператора $\text{ad}_{\mathcal{A}}$ на подпространство почти периодических отображений из $\text{Lip}(\mathcal{X}, 0, \rho)$ содержится в замыкании множества $\{\lambda - k\mu; \lambda, \mu \in \sigma(\mathcal{A}), k \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{R}$. Спектр сужения оператора $\text{ad}_{\mathcal{A}}$ на $\text{End } \mathcal{X}$ совпадает с замыканием множества $\{\lambda - \mu; \lambda, \mu \in \sigma(\mathcal{A})\} \subset \mathbb{R}$.

ЛЕММА 3. Если $\mathcal{F} \in \text{Lip}^1(\mathcal{X}, 0, \rho)$ — почти периодическое отображение, то существует

$$\lim_{0 < \varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon \int_0^{\varepsilon^{-1}} \tilde{T}_{\mathcal{A}}(t)\mathcal{F} dt = \lim_{0 < \varepsilon \rightarrow 0} i\varepsilon(i\varepsilon I - \text{ad}_{\mathcal{A}})^{-1}\mathcal{F} = \mathcal{F}_0, \quad (2)$$

где отображение $\mathcal{F}_0 \in \text{Lip}^1(\mathcal{X}, 0, \rho)$ удовлетворяет условиям

$$\tilde{T}_{\mathcal{A}}(t)\mathcal{F}_0 = \mathcal{F}_0, \quad t \in \mathbb{R}, \quad \text{ad}_{\mathcal{A}}\mathcal{F}_0 = 0. \quad (3)$$

Если уравнение $\mathcal{F}_0(x) = 0$ имеет единственное решение x_0 в шаре $B(0, \rho)$, то $\mathcal{A}x_0 = 0$.

Из равенств (2) и (3) следует, что $\mathcal{F} - \mathcal{F}_0 = (i\varepsilon I - \text{ad}_{\mathcal{A}})X_\varepsilon$, $\varepsilon > 0$, где $X_\varepsilon = (i\varepsilon)^{-1}(i\varepsilon(i\varepsilon I - \text{ad}_{\mathcal{A}})^{-1}\mathcal{F} - \mathcal{F}_0)$, т.е. выполнено предположение 1.

ПРИМЕР. Оператор $\mathcal{A}_0 = d/dt: C_{\mathcal{U}}^1 \subset C_{\mathcal{U}} \rightarrow C_{\mathcal{U}} = C_{\mathcal{U}}(\mathbb{R}, \mathcal{Y})$, где $C_{\mathcal{U}}(\mathbb{R}, \mathcal{Y})$ — банахово пространство равномерно непрерывных и ограниченных на $\mathbb{R}$ функций, принимающих значения в комплексном банаховом пространстве $\mathcal{Y}$, и $C_{\mathcal{U}}^1$ — подпространство непрерывно дифференцируемых функций с ограниченной равномерно непрерывной производной, является производящим оператором группы сдвигов функций из $C_{\mathcal{U}}$. Поэтому самосопряженным является оператор $\mathcal{A} = i^{-1}\mathcal{A}_0$. Рассмотрим оператор суперпозиции

$$(\mathcal{F}x)(t) = f(t, x(t)), \quad x \in C_{\mathcal{U}}, \quad t \in \mathbb{R},$$

где $f: \mathbb{R} \times B(0, \rho) \rightarrow \mathcal{Y}$ — непрерывно дифференцируемая функция первого аргумента, такая, что f и f'_t удовлетворяют условию Липшица по второму аргументу, причем функции

$$t \mapsto f(t, \cdot), t \mapsto f'_t(t, \cdot): \mathbb{R} \rightarrow \text{Lip}(\mathcal{Y}, 0, \rho)$$

принадлежат пространству $C_{\mathcal{U}}(\mathbb{R}, \text{Lip}(\mathcal{Y}, 0, \rho))$. Тогда

$$\mathcal{F} \in D(\text{ad}_{\mathcal{A}}) \quad \text{и} \quad ((\text{ad}_{\mathcal{A}}\mathcal{F})(x))(t) = f'_t(t, x(t)).$$

Отображение $\mathcal{F} \in \text{Lip}^1(C_{\mathcal{U}}, 0, \rho)$ является почти периодическим, если почти периодична функция $t \mapsto f(t, \cdot): \mathbb{R} \rightarrow \text{Lip}^1(\mathcal{Y}, 0, \rho)$. В этом случае определяемое формулой (2) отображение $\mathcal{F}_0$ имеет вид $(\mathcal{F}_0(x))(t) = f_0(x(t))$, $t \in \mathbb{R}$, $x \in C_{\mathcal{U}}$, где $f_0 \in \text{Lip}(\mathcal{Y}, 0, \rho)$. При условии, что уравнение $f_0(y) = 0$ однозначно разрешимо в $C_{\mathcal{U}}$, получаем, что его решение $x_0(t) \equiv y_0$ — постоянная функция и поэтому $\mathcal{A}x_0 = i^{-1}x'_0 = 0$. Дифференциальное уравнение

$$dx/dt = \varepsilon_n f(t, x), \quad 0 < \varepsilon_n \rightarrow 0,$$

преобразуется, согласно равенствам (1), в дифференциальное уравнение

$$dy/dt = \varepsilon_n f_0(y) + \varepsilon_n \tilde{f}_n(t, y),$$

где $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{t \in \mathbb{R}} \|\tilde{f}(t, \cdot)\|_{\text{Lip}(\mathcal{Y}, 0, \rho)} = 0$, с помощью замены Крылова–Боголюбова (см. [2, с. 457])

$$x = y - \varepsilon_n v(t, x, \varepsilon),$$

где $v(t, x, \varepsilon) = \int_0^\infty V(s + t, x)e^{-\varepsilon n s} ds$ — преобразование Лапласа функции $V(t, x) = f(t, y_0 + x) - f_0(y_0 + x)$. Эта замена в точности соответствует оператору преобразования $I + \varepsilon_n X_n$ из равенств (1), который естественно назвать преобразованием Крылова–Боголюбова.

Если не выполнено предположение 3, то при некоторых дополнительных условиях можно к операторам $\mathcal{A} - \varepsilon_n \mathcal{F}_0 - \varepsilon_n \Phi_n$, $n \geq 1$, из равенств (1) повторно применить преобразование Крылова–Боголюбова, считая невозмущенным оператор $\mathcal{A} - \varepsilon_n \mathcal{F}'_0(x_0)$. Аксиоматизация многократного использования

таких преобразований приводит к методу подобных операторов в теории возмущений линейных операторов [4–6]. Приведем один из результатов, которые можно получить таким образом.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $\mathcal{A}$ — самосопряженный оператор со счетным спектром $\sigma(\mathcal{A}) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots\}$, удовлетворяющим условию $d_0 = \inf_{n \geq 1} d_n > 0$, где $d_n = \text{dist}(\{\lambda_n\}, \sigma(\mathcal{A}) \setminus \{\lambda_n\})$, и $P_n = P(\{\lambda_n\}, \mathcal{A})$, $n \geq 1$, — проекторы Рисса, построенные по одноточечным множествам $\{\lambda_n\}$ ($\mathcal{A}P_n = \lambda_n P_n$). Пусть $\mathcal{B} \in \text{End } \mathcal{X}$ и выполнено одно из следующих условий:

- (1) $2\pi\|\mathcal{B}\| < d_0$;
- (2) $\lim_{n \rightarrow \infty} d_n = \infty$;
- (3) $\mathcal{B}$ — компактный оператор.

Тогда существует такое натуральное число N , что оператор $\mathcal{A} - \mathcal{B}$ подобен оператору вида

$$\mathcal{A} - \sum_{n > N} P_n \mathcal{B}_0 P_n - Q_N \mathcal{B}_0 Q_N,$$

где $\mathcal{B}_0$ — некоторый оператор из $\text{End } \mathcal{X}$ и $Q_N = P_1 + \dots + P_N$. Если выполнено условие 1, то можно положить $N = 1$.

Если собственные значения оператора $\mathcal{A}$ просты и $\mathcal{X}$ — гильбертово пространство, то из теоремы 3 следует спектральность (по Данфорду) возмущенного оператора $\mathcal{A} - \mathcal{B}$. Соответствующий результат, приводимый в монографии [6, гл. 19, §2, теорема 7], получен при дополнительном условии $\sum_{n \geq 1} d_n^{-2} < \infty$.

Отметим, что абстрактный аналог преобразования Крылова–Боголюбова был предложен автором в статьях [7, 8], где налагалось дополнительное ограничение на спектр оператора $\text{ad}_{\mathcal{A}}$ (требовалось, чтобы нуль не являлся внутренней точкой спектра), что существенно сужает класс рассматриваемых операторов. Теорема 3 усиливает теорему 5 статьи [7]; при ее доказательстве важную роль играет абстрактный вариант оценок Бора интеграла от периодической функции [9]. Такие оценки позволяют, в частности, указать оценки числа N из теоремы 3. В статье [5] метод подобных операторов развивается для возмущенных неограниченными операторами неквазианалитических и спектральных операторов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Митропольский Ю. А. Метод усреднения в нелинейной механике. Научно-ва думка, Киев, 1971.
2. Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. Наука, М., 1970.
3. Арнольд В. И. Дополнительные главы обыкновенных дифференциальных уравнений. Наука, М., 1979.
4. Фридрихс К. О. Возмущение спектра в гильбертовом пространстве. Мир, М., 1969.
5. Баскаков А. Г. Изв. АН, сер. матем., **58**, № 4, 3–32 (1994).
6. Данфорд Н., Шварц Дж. Т. Линейные операторы. Спектральные операторы. Мир, М., 1974.
7. Баскаков А. Г. В кн.: Труды IX Международной конференции по нелинейным колебаниям. Т. 1. Аналитические методы теории нелинейных колебаний, 1984, с. 75–79.
8. Баскаков А. Г. Укр. матем. ж., **36**, № 5, 606–611 (1984).
9. Ахиезер Н. И. Лекции по теории аппроксимации. Наука, М., 1965.