Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Д. Кошманенко, Сингулярные возмущения с бесконечной константой связи, *Функци. анализ и его прил.*, 1999, том 33, выпуск 2, 81–84

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa358>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.157.27.8

26 апреля 2023 г., 10:10:10

УДК 517.9

Сингулярные возмущения с бесконечной константой связи

© 1999. В. Д. КОШМАНЕНКО

1. Пусть $A \geq 1$ — самосопряженный оператор в комплексном сепарабельном гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ с нормой $\|\cdot\|$ и скалярным произведением $(\cdot, \cdot)$. Рассмотрим часть A -шкалы гильбертовых пространств $\mathcal{H}_{-2} \supset \mathcal{H}_{-1} \supset \mathcal{H} \supset \mathcal{H}_1 \supset \mathcal{H}_2$, где пространство $\mathcal{H}_2$ с нормой $\|\varphi\|_2 := \|A\varphi\|$ совпадает с областью определения $\mathcal{D}(A)$ оператора A , $\mathcal{H}_1 = \mathcal{D}(A^{1/2})$ с нормой $\|\varphi\|_1 := \|A^{1/2}\varphi\|$, а $\mathcal{H}_{-2}$, $\mathcal{H}_{-1}$ обозначают сопряженные к ним пространства. Очевидно, что оператор A действует унитарно из $\mathcal{H}_2$ в $\mathcal{H}$ и изометрично из $\mathcal{H}_1$ в $\mathcal{H}_{-1}$. Поэтому его замыкание $\mathbf{A}: \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_{-1}$ — унитарный оператор и справедливы равенства $(\omega, \mathbf{A}\varphi)_{-1} = (\omega, \varphi) = (\mathbf{A}^{-1}\omega, \varphi)_1$, $\omega \in \mathcal{H}_{-1}$, $\varphi \in \mathcal{H}_1$, а также $\langle f, \varphi \rangle = (f, \varphi)$, $f \in \mathcal{H}$, $\varphi \in \mathcal{H}_1$, где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — дуальное скалярное произведение между $\mathcal{H}_1$ и $\mathcal{H}_{-1}$ (см. [1]).

Пусть оператор $V \neq 0$ с областью определения $\mathcal{D}(V) = \mathcal{H}_1$ и областью значений $\mathcal{R}(V) \subset \mathcal{H}_{-1}$ ограничен и самосопряжен в том смысле, что $\langle V\varphi, \psi \rangle = \langle \varphi, V\psi \rangle$, $\varphi, \psi \in \mathcal{H}_1$. Оператор V называется [2] (ср. [3]) *сингулярным возмущением* $\mathcal{H}_{-1}(A)$ -класса (иначе говоря, V принадлежит $\mathcal{H}_{-1}$ -классу), если множество $\mathcal{D} := (\text{Ker } V) \cap \mathcal{D}(A)$ плотно в $\mathcal{H}$. Заметим (см. [4, Theorem A.1]), что условие $(\mathcal{R}(V))^{\text{cl}, -1} \cap \mathcal{H} = \{0\}$ ($\text{cl}, -1$ означает замыкание в $\mathcal{H}_{-1}$) является необходимым и достаточным для того, чтобы множество $\text{Ker } V$ было плотным в $\mathcal{H}$.

Пусть V принадлежит $\mathcal{H}_{-1}$ -классу. Определим, следуя [5–7], обобщенную сумму $A \dot{+} V$ операторов A и V как «сужение» обычной суммы $\mathbf{A} + V: \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_{-1}$ на $\mathcal{H}$, т. е. $\mathcal{D}(A \dot{+} V) = \{\varphi \in \mathcal{H}_1 \mid \mathbf{A}\varphi + V\varphi \in \mathcal{H}\}$, $(A \dot{+} V)\varphi = \mathbf{A}\varphi + V\varphi$.

ЛЕММА 1 [7]. *Предположим, что оператор $(I + \mathbf{A}^{-1}V)^{-1}$ существует и ограничен в $\mathcal{H}_1$ (I — тождественное преобразование). Тогда обобщенная сумма $A \dot{+} V$ является самосопряженным оператором в $\mathcal{H}$.*

В частности, если V положителен, $\langle V\varphi, \varphi \rangle \geq 0$, $\varphi \in \mathcal{H}_1$, то оператор $A_\alpha = A \dot{+} \alpha V$ самосопряжен в $\mathcal{H}$ для всех $\alpha > 0$. При этом, очевидно, операторы A , A_α совпадают на $\mathcal{D}$ и, следовательно, являются различными самосопряженными расширениями симметрического оператора $\dot{A} = A|_{\mathcal{D}} = A_\alpha|_{\mathcal{D}}$.

Пусть A_∞ обозначает фридрихсово расширение оператора $\dot{A}$. Отметим, что $A_\infty \neq A$, так как из условия, что $V \neq 0$ принадлежит $\mathcal{H}_{-1}$ -классу, следует, что множество $\mathcal{D} = \mathcal{D}(\dot{A})$ плотно лишь в $\mathcal{H}$, но не в $\mathcal{H}_1$.

В [8, 9] (см. также [6]) доказано, что в случае сингулярного возмущения ранга один $V = \langle \cdot, \omega \rangle \omega$, $\omega \in \mathcal{H}_{-1} \setminus \mathcal{H}$, для оператора $A_\alpha = A \dot{+} \alpha V$ справедлив следующий факт: в сильном резольвентном смысле $\lim_{\alpha \rightarrow \infty} A_\alpha = A_\infty$. Здесь этот результат обобщается на сингулярные возмущения произвольного ранга.

ТЕОРЕМА. *Пусть $V: \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_{-1}$ — сингулярное возмущение $\mathcal{H}_{-1}$ -класса, причем оператор V положителен, если его ранг бесконечен. Предположим, что операторы A и A_∞ взаимно просты [10]. Тогда обобщенная сумма $A_\alpha =$*

$A + \alpha V$, $\alpha > 0$, — самосопряженный оператор в $\mathcal{H}$ и в сильном резольвентном смысле $\lim_{\alpha \rightarrow \infty} A_\alpha = A_\infty$.

Напомним (см. [10, 11]), что условие взаимной простоты для пары A и A_∞ означает, что симметрический оператор $\dot{A} = A|_{\mathcal{D}} = A_\infty|_{\mathcal{D}}$ является их максимальной общей частью. Это условие выполняется автоматически в случае возмущения ранга один. Отметим, что в случае, когда оператор V положителен, существование сильного резольвентного предела следует из монотонного возрастания A_α при $\alpha \rightarrow \infty$ и операторного неравенства $A_\alpha < A_\infty$.

Доказательство теоремы использует частный случай (см. ниже соотношение (1)) формулы Крейна для резольвент [10–13], а также обобщенный аналог (соотношение (2)) резольвентного тождества для возмущенного оператора [7, 14].

2. Пусть $\mathcal{M}_2$ обозначает замкнутое в $\mathcal{H}_2 = \mathcal{D}(A)$ подпространство $\mathcal{H}_2 \cap \text{Ker } V$, т.е. множество $\mathcal{D}$. Оно плотно в $\mathcal{H}$, поскольку V принадлежит $\mathcal{H}_{-1}$ -классу. Пусть $\mathcal{M}_1$ обозначает замыкание подпространства $\mathcal{M}_2$ в $\mathcal{H}_1$. Заметим, что $\mathcal{M}_2 \neq \mathcal{H}_2$, а также $\mathcal{M}_1 \neq \mathcal{H}_1$, поскольку $V \neq 0$. Таким образом, в смысле ортогонального разложения имеем $\mathcal{H}_2 = \mathcal{M}_2 \oplus \mathcal{N}_2$ и $\mathcal{H}_1 = \mathcal{M}_1 \oplus \mathcal{N}_1$. Пусть $\mathcal{M}_0 = \mathcal{R}(\dot{A})$ обозначает область значений симметрического оператора $\dot{A}$, а $\mathcal{N}_0 := \text{Ker}(\dot{A})^*$ — его дефектное подпространство. Тогда пространство $\mathcal{H}$ также представимо в виде ортогональной суммы: $\mathcal{H} = \mathcal{M}_0 \oplus \mathcal{N}_0$. Далее, так как по построению $\mathcal{M}_2 \subset \mathcal{M}_1$ и $\mathcal{N}_1 \perp \mathcal{M}_1$ в $\mathcal{H}_1$, то для любых $\eta_1 \in \mathcal{N}_1$, $\mu_2 \in \mathcal{M}_2$ и $\mu_0 = A\mu_2 \in \mathcal{M}_0$ имеем $(\eta_1, \mu_0) = (\eta_1, A\mu_2) = (\eta_1, \mu_2)_1 = 0$. Это означает, что $\mathcal{N}_1 \subset \mathcal{N}_0$. Этот факт, а также условие взаимной простоты пары A и A_∞ гарантируют корректность определения и обратимость оператора B в $\mathcal{N}_0$, задаваемого следующим образом. Пусть $P_{\mathcal{N}_i}$ обозначает ортогональный проектор на подпространство $\mathcal{N}_i \subset \mathcal{H}_i$, $i = -1, 0, 1$. Положим

$$B\eta = A\varphi, \quad \mathcal{D}(B) := \{\eta \in \mathcal{N}_1 \mid \eta = P_{\mathcal{N}_1}\varphi, \varphi \in \mathcal{N}_2 \subset \mathcal{D}(A)\}.$$

ЛЕММА 2 [2]. *Справедливо равенство*

$$A^{-1} = A_\infty^{-1} + B^{-1}P_{\mathcal{N}_0}. \quad (1)$$

Равенство (1) — частный случай формулы Крейна для резольвент (см. [10–13]). Поясним, что, поскольку оператор A является одним из самосопряженных расширений симметрического оператора $\dot{A}$, для его резольвенты справедливо представление $(A - zI)^{-1} = (A_\infty - zI)^{-1} + B_z^{-1}P_{\mathcal{N}_z}$, где $P_{\mathcal{N}_z}$ — ортогональный проектор на подпространство $\mathcal{N}_z = \text{Ker}(\dot{A}^* - \bar{z}I)$, а B_z служит операторным параметром, фиксирующим расширение оператора A . Нетривиальный факт (см. [2]) состоит в том, что $B_{z=0} = B$.

Из (1) получаем описание оператора A_∞ : $\mathcal{D}(A_\infty) = \{\psi \in \mathcal{H}_1 \mid \psi = \varphi - B^{-1}P_{\mathcal{N}_0}A\varphi = \varphi - P_{\mathcal{N}_1}\varphi, \varphi \in \mathcal{D}(A)\}$, $A_\infty\psi = A\varphi$.

Пусть $\mathbf{A}_z = A - zI$, $\mathbf{A}_{\alpha,z} = A + \alpha V - zI$, $\alpha > 0$, $z \in \rho = \rho(A) \cap \rho(A_\alpha)$, где $\rho(\cdot)$ — резольвентное множество. В [7] показано, что области значений операторов $\mathbf{A}_z$, $\mathbf{A}_{\alpha,z}$ совпадают со всем пространством $\mathcal{H}_{-1}$ и, более того, обратные операторы $\mathbf{R}_z := \mathbf{A}_z^{-1}$, $\mathbf{R}_z^\alpha := \mathbf{A}_{\alpha,z}^{-1}$ — ограниченные биекции из $\mathcal{H}_{-1}$ в $\mathcal{H}_1$. При этом очевидно, что их сужения на $\mathcal{H}$ совпадают с резольвентами $R_z = (A - zI)^{-1}$, $R_z^\alpha = (A_\alpha - zI)^{-1}$ операторов A и A_α .

ЛЕММА 3 [7]. На $\mathcal{H}_{-1}$ справедливо обобщенное резольвентное тождество

$$\mathbf{R}_z^\alpha - \mathbf{R}_z = -\alpha \mathbf{R}_z^\alpha V \mathbf{R}_z = -\alpha (I + \alpha \mathbf{R}_z V)^{-1} \mathbf{R}_z V \mathbf{R}_z, \quad z \in \rho, \quad (2)$$

где $(I + \alpha \mathbf{R}_z V)^{-1}: \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_1$ — ограниченная биекция.

3. Приведем кратко доказательство теоремы. Из (2) следует, что на $\mathcal{H}$ выполняется обычное резольвентное тождество [14]

$$R_z^\alpha - R_z = -\mathbf{R}_z^\alpha V R_z = -\alpha (I + \alpha \mathbf{R}_z V)^{-1} \mathbf{R}_z V R_z.$$

Далее значение константы связи α предполагается достаточно большим и таким, что $0 \in \rho$. Это возможно, так как оператор V либо положителен, либо имеет конечный ранг. Теперь из резольвентного тождества следует, что

$$A_\alpha^{-1} - A^{-1} = -\alpha \mathbf{A}_\alpha^{-1} V A^{-1} = -\alpha (I + \alpha \mathbf{A}^{-1} V)^{-1} \mathbf{A}^{-1} V A^{-1}, \quad (3)$$

где $(I + \alpha \mathbf{A}^{-1} V)^{-1}: \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_1$ — ограниченный оператор.

Рассмотрим оператор $\mathbf{A}^{-1} V \mathbf{A}^{-1}: \mathcal{H}_{-1} \rightarrow \mathcal{H}_1$. Он действует нетривиально только из $\mathcal{N}_{-1} := \mathbf{A} \mathcal{M}_1$ в $\mathcal{M}_1$, так как $\mathcal{M}_1 = \text{Ker } V$. Поэтому его сужение на $\mathcal{H}$ представимо в виде

$$\mathbf{A}^{-1} V A^{-1} = \mathbf{A}^{-1} V A^{-1} P_{\mathcal{N}_0} = P_{\mathcal{N}_1} \mathbf{A}^{-1} P_{\mathcal{N}_{-1}} V P_{\mathcal{N}_1} A^{-1} P_{\mathcal{N}_0} = \check{\mathbf{A}}^{-1} \check{V} B^{-1} P_{\mathcal{N}_0},$$

где введены обозначения $\check{\mathbf{A}} = P_{\mathcal{N}_{-1}} \mathbf{A} P_{\mathcal{N}_1}$, $\check{V} = P_{\mathcal{N}_{-1}} V P_{\mathcal{N}_1}$ и учтено равенство нулю оператора $V A^{-1}$ на подпространстве $\mathcal{M}_0$ ($A^{-1} \mathcal{M}_0 = \mathcal{M}_2 \subset \mathcal{M}_1 = \text{Ker } V$), а также то, что для любого $\eta_2 \in \mathcal{N}_2$ ($\mathcal{N}_2 = A^{-1} \mathcal{N}_0$) выполняется равенство $V \eta_2 = V P_{\mathcal{N}_1} \eta_2$. Таким образом, рассматриваемое сужение действует нетривиально только из $\mathcal{N}_0$ в $\mathcal{M}_1 \subset \mathcal{N}_0$ и как оператор в $\mathcal{N}_0$ имеет вид $\check{\mathbf{A}}^{-1} \check{V} B^{-1}$, поскольку $\mathcal{D}(B^{-1}) = \mathcal{N}_0$. Этот оператор, очевидно, обратим, $(\check{\mathbf{A}}^{-1} \check{V} B^{-1})^{-1} = B \check{V}^{-1} \check{\mathbf{A}}$, и действует из $\mathcal{N}_1 \subset \mathcal{N}_0$ в $\mathcal{N}_0$. Далее, сужение оператора $(I + \alpha \mathbf{A}^{-1} V)^{-1}$ на подпространство $\mathcal{N}_1$ в принятых обозначениях представимо в виде $(I_{\mathcal{N}_1} + \alpha \check{\mathbf{A}}^{-1} \check{V})^{-1}$, где $I_{\mathcal{N}_1}$ — тождественное преобразование в подпространстве $\mathcal{N}_1$.

Теперь, благодаря совпадению операторов A_α^{-1} и A^{-1} на подпространстве $\mathcal{M}_0$, соотношение (3) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} A_\alpha^{-1} - A^{-1} &= -((\alpha \check{\mathbf{A}}^{-1} \check{V} B^{-1})^{-1} (I_{\mathcal{N}_1} + \alpha \check{\mathbf{A}}^{-1} \check{V}))^{-1} P_{\mathcal{N}_0} \\ &= -(\alpha^{-1} B \check{V}^{-1} \check{\mathbf{A}} (I_{\mathcal{N}_1} + \alpha \check{\mathbf{A}}^{-1} \check{V}))^{-1} P_{\mathcal{N}_0} \\ &= -(\alpha^{-1} B \check{V}^{-1} \check{\mathbf{A}} + B)^{-1} P_{\mathcal{N}_0}. \end{aligned}$$

Из последнего равенства видно, что $A_\alpha^{-1} - A^{-1} \rightarrow -B^{-1} P_{\mathcal{N}_0}$ при $\alpha \rightarrow \infty$ в сильном смысле, так как $\alpha^{-1} B \check{V}^{-1} \check{\mathbf{A}} \rightarrow 0$. Следовательно, благодаря (1), $A_\alpha^{-1} \rightarrow A_\infty^{-1}$ при $\alpha \rightarrow \infty$, что эквивалентно сильной резольвентной сходимости A_α к A_∞ .

В заключение отметим, что теорема справедлива и в случае, когда V допускает разложение в сумму положительного оператора и оператора конечного ранга.

Автор признателен Ю. М. Березанскому за ряд полезных замечаний.

ЛИТЕРАТУРА

1. Березанский Ю. М., Ус Г. Ф., Шефтель З. Г. Функциональный анализ. Вып. школа, Киев, 1990.
2. *Albeverio S., Koshmanenko V.* Form-sum approximations of singular perturbations of self-adjoint operators. BiBoS Preprint Nr. 771/4/97, 1997.
3. Кошманенко В. Д. Сингулярные билинейные формы в теории возмущений самосопряженных операторов. Наукова думка, Киев, 1993.
4. *Albeverio S., Karwowski W., Koshmanenko V.* Math. Nachr., **173**, 5–24 (1995).
5. Березанский Ю. М. В кн.: Спектральный анализ дифференциальных операторов. Институт математики, Киев, 1980, с. 83–106.
6. Крейн М. Г., Яврян В. А. J. Operator Theory, **6**, 155–191 (1981).
7. *Albeverio S., Koshmanenko V.* On the problem of the right Hamiltonian under singular form-sum perturbations. SFB 237 Preprint, Nr. 375, Institute für Mathematik Ruhr-Universität-Bochum, 1997.
8. *Gesztesy F., Simon B.* J. Funct. Anal., **128**, 245–252 (1995).
9. *Albeverio S., Koshmanenko V.* Some remarks on the Gesztesy-Simon version of rank-one perturbations. BiBoS Preprint, Nr. 727/5/96, 1996.
10. Ахуезер Н. И., Глазман И. М. Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. М., 1966.
11. Крейн М. Г. Матем. сб., **20**, № 3, 431–495 (1947).
12. Бирман М. Ш. Матем. сб., **38** (80), № 4, 431–450 (1956).
13. *Alonso A., Simon B.* J. Operator Theory, **4**, 251–270 (1980).
14. Яфаев Д. Р. Математическая теория рассеяния. Санкт-Петербургский университет, С.-Петербург, 1994.

Институт математики НАН Украины, Киев
e-mail: kosh@imath.kiev.ua

Поступило в редакцию
15 января 1998 г.

УДК 517.984

Спектральные свойства разностного трехчастичного оператора Шрёдингера*

© 1999. С. Н. ЛАКАЕВ, Ж. И. АБДУЛЛАЕВ

1. Введение. В спектральном анализе трехчастичного непрерывного оператора Шрёдингера имеется следующий замечательный результат: если в системе трех частиц, взаимодействующих с помощью парных короткодействующих потенциалов, ни одна из трех двухчастичных подсистем не имеет связанных состояний с отрицательной энергией, но по меньшей мере две из них имеют резонанс с энергией в нуле, то у этой трехчастичной системы существует бесконечное число трехчастичных связанных состояний с отрицательной энергией, накапливающихся к нулю. Этот эффект впервые был обнаружен Ефимовым [1]. Строгое математическое доказательство существования эффекта Ефимова было проведено впервые в работе Яфаева [2].

В моделях физики твердого тела [3], а также решетчатой теории поля [4] возникают так называемые дискретные операторы Шрёдингера, являющиеся решетчатым аналогом обычного трехчастичного оператора Шрёдингера в непрерывном пространстве.

Хотя дискретный оператор Шрёдингера ограничен и возмущение в парной задаче — компактный оператор, спектр дискретного оператора для системы трех квантовых решетчатых частиц имеет более сложный характер по сравнению с непрерывным случаем.

*Работа финансируется Фондом фундаментальных исследований ГКНТ РУз.