Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. М. Вершик, М. И. Граев, Коммутативная модель представления группы $O(n, 1)^X$ и обобщенная лебегова мера в пространстве распределений, *Функци. анализ и его прил.*, 2005, том 39, выпуск 2, 1–12

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa36>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.73.141

26 апреля 2023 г., 14:05:02

УДК 517.5

Коммутативная модель представления группы $O(n, 1)^X$ и обобщенная лебегова мера в пространстве распределений*

© 2005. А. М. ВЕРШИК, М. И. ГРАЕВ

§1. Введение

Группой токов G^X , где X — гладкое многообразие с конечной непрерывной мерой m , а G — группа Ли, называется совокупность ограниченных кусочно-непрерывных или, более общо, борелевских функций на X со значениями в группе G . Групповая операция — поточечное умножение.

Эта работа продолжает серию статей [2–6, 8], в которых для некоторых простых групп Ли G были построены неприводимые унитарные представления групп токов G^X , инвариантные относительно любых сохраняющих меру m преобразований пространства X : для случая $G = SL(2, \mathbb{R})$ это было сделано в исходной работе [3] этого цикла, а в [2, 6] — для серий групп $G = SO(n, 1)$ и $G = SU(n, 1)$. Мы назвали их основными представлениями групп G^X и описали несколько их моделей. Отметим, что основные представления однозначно определяются своими сферическими функциями, названными в [3] каноническими состояниями, см. [6].

Как показано в [2] (см. также [9, 10]), сериями $G = SO(n, 1)$ и $G = SU(n, 1)$ исчерпываются все простые группы Ли G , для которых существуют такие представления групп токов (иначе говоря, группы с нетривиальными первыми гомологиями с коэффициентами в некотором неприводимом унитарном представлении). Каноническое состояние для близкой группы — группы автоморфизмов бесконечного однородного дерева — рассмотрено в [11]. См. также [12], где рассмотрены канонические состояния на группе $U(\infty)$.

В данной работе подробно изучается так называемая коммутативная модель основного представления группы G^X для серии $G = O(n, 1)$. Ко второй серии мы вернемся в другом месте. Ради удобства группы $SO(n, 1)$ мы заменили группами $O(n, 1)$.

Среди различных реализаций одного и того же унитарного представления π произвольной метризуемой топологической группы G заслуживают интереса коммутативные модели. А именно, пусть $G_0 \subset G$ — коммутативная подгруппа, такая, что ограничение представления π на подгруппу G_0 циклично. Тогда изометрическим оператором можно привести операторы $\pi(a)$, $a \in G_0$, к диагональному виду, т.е. реализовать гильбертово пространство представления π как L^2 -пространство измеримых функций по спектральной мере представления $\pi|_{G_0}$. Затем надо явно описать представление π всей группы G в этой реализации. Такую реализацию мы называем коммутативной моделью представления π

*Работа первого автора поддержана грантами НШ 2251.2003.1 и RUMI-2662-ST-04. Работа второго автора поддержана РФФИ, грант 04-01-00363.

относительно подгруппы G_0 . Хорошо известны коммутативные модели неприводимых унитарных представлений группы $SL(2, \mathbb{R})$ относительно ее коммутативных подгрупп — ортогональной, унипотентной и диагональной, см., например, [1].

В статье построена коммутативная модель основного представления вещественной группы $O(n, 1)^X$ относительно подгруппы Z^X , где $Z \subset O(n, 1)$ — максимальная унипотентная подгруппа. Подгруппа Z коммутативна (в отличие от максимальной унипотентной подгруппы в $U(n, 1)$) и изоморфна аддитивной группе $\mathbb{R}^{n-1}$. Случай $n = 2$, точнее, случай группы $SL(2, \mathbb{R})$, был ранее рассмотрен в [4, 8].

Интерес к этой реализации представления связан не только с самим представлением группы токов, но и с тем, что диагонализация операторов, отвечающих выбранной коммутативной подгруппе, приводит к замечательным бесконечным σ -конечным мерам ν в пространстве обобщенных функций, обладающим большой группой линейных симметрий. В случае $SL(2, \mathbb{R})$ эта мера ν оказалась связанной с известным гамма-процессом, см. [4] и, более детально, [8]. Более точно, это сигма-конечная мера, эквивалентная мере гамма-процесса и инвариантная относительно умножения реализаций процесса на функции с нулевым интегралом от модуля логарифма (аналог линейного преобразования, отвечающего диагональной матрице с определителем 1), что позволяет назвать ее лебеговой мерой в бесконечномерном пространстве.

В рассматриваемом здесь общем случае групп $G = O(n, 1)$ эта мера ν сосредоточена уже на векторных распределениях, и дополнительно к указанному свойству она инвариантна также относительно поточечного действия группы $O(n-1)^X$. Во всех случаях мера ν сосредоточена на распределениях типа линейных комбинаций дельта-функций.

С точки зрения теории представлений построенная здесь модель предпочтительна тем, что операторы представления описываются явно, в отличие от модели представления в фоковском пространстве (см. [6]). Кроме того, косвенным образом эта модель указывает на некоторые преимущества аналогичной реализации унитарных представлений самой группы Ли $O(n, 1)$.

Подробные доказательства результатов этой статьи будут опубликованы в *Indag. Math. (N.S.)*, **16**, No. 4 (2005).

§2. Обозначения и соглашения

Группа $O(n, 1)$ реализована здесь как группа линейных преобразований в $\mathbb{R}^{n+1}$, сохраняющих квадратичную форму $2x_1x_{n+1} + x_2^2 + \dots + x_n^2$. Ее элементы g мы представляем в форме клеточных матриц

$$g = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{vmatrix},$$

где диагональные клетки — квадратные матрицы порядков 1, $n-1$ и 1 соответственно. В такой реализации максимальная унипотентная подгруппа Z состоит

из матриц вида

$$z = z(\gamma) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\gamma^* & e & 0 \\ -\frac{|\gamma|^2}{2} & \gamma & 1 \end{vmatrix}, \quad \gamma \in \mathbb{R}^{n-1},$$

где $|\gamma| = (\sum_{i=1}^{n-1} \gamma_i^2)^{1/2}$, e — единичная матрица порядка $n-1$, а $*$ обозначает транспонирование. Элементы $z \in Z$ мы отождествляем с векторами $\gamma \in \mathbb{R}^{n-1}$ и пишем $z(\gamma)$ или просто γ вместо z . Через D обозначается подгруппа клеточно-диагональных матриц и через B — подгруппа всех нижних треугольных клеточных матриц. Элементами подгруппы D являются матрицы вида

$$d = \text{diag}(\epsilon^{-1}, u, \epsilon), \quad \epsilon \in \mathbb{R} \setminus 0, u \in O(n-1).$$

Группа B является полупрямым произведением, $B = Z \ltimes D$.

В соответствии с общим определением мы называем группой токов G^X , где $G = O(n, 1)$, группу относительно поточечного умножения всех ограниченных борелевских функций на X со значениями в группе G .

Через Z^X , D^X и B^X обозначаются подгруппы функций $g(x) \in G^X$ со значениями в подгруппах Z , D и B соответственно. Отметим, что группа Z^X изоморфна аддитивной группе $(\mathbb{R}^{n-1})^X$ функций на X со значениями в $\mathbb{R}^{n-1}$, а группа B^X является полупрямым произведением, $B^X = Z^X \ltimes D^X$.

Сферическая функция основного представления группы $O(n, 1)^X$ имеет в выбранной реализации группы $O(n, 1)$ следующий вид:

$$\Psi(g(\cdot)) = \exp \left(-\frac{1}{2} \int_X \log \left| \frac{g_{11}(x) + g_{33}(x) - g_{13}(x) - g_{31}(x)}{2} \right| dm(x) \right). \quad (1)$$

Ее ограничение на бесконечномерную коммутативную группу токов Z^X задается формулой

$$\Psi(\gamma(\cdot)) = \exp \left(-\frac{1}{2} \int_X \log \left(1 + \frac{|\gamma(x)|^2}{4} \right) dm(x) \right). \quad (2)$$

Коммутативную модель основного представления группы $O(n, 1)^X$ относительно подгруппы Z^X мы реализуем в гильбертовом пространстве $L^2(\nu)$ функций на пространстве векторных распределений, квадратично интегрируемых по построенной здесь мере ν . В силу свойств этой меры на $L^2(\nu)$ естественно определено унитарное представление U_g клеточно-треугольной подгруппы B^X , где элементам $z \in Z^X$ отвечают диагональные операторы. Искомая коммутативная модель основного представления группы G^X получается продолжением этого представления с подгруппы B^X на всю группу $O(n, 1)^X$.

Мера ν задается своей плотностью относительно другой меры, μ , введенной в этой статье. По определению μ есть конечная мера на пространстве векторных распределений, преобразование Фурье которой — функционал $\Psi(\gamma(\cdot))$, заданный равенством (2).

Отметим, что мера μ есть мера (закон) процесса Леви, построенного каноническим способом по безгранично делимой мере α на аддитивной группе $\mathbb{R}^{n-1}$, преобразование Фурье которой есть $(1 + |\gamma|^2/4)^{1-n}$, $\gamma \in \mathbb{R}^{n-1}$. Плотность этой

меры α относительно стандартной лебеговой меры задается с точностью до множителя формулой

$$\tilde{\psi}(\xi) = |\xi|^{(n-1)/2} K_{(n-1)/2}(2|\xi|),$$

где $K_\nu(x)$ — функция Бесселя, см. [13]. В частности, $\tilde{\psi}(\xi) = e^{-2|\xi|}$ в случае $n = 2$. Мера α $O(n-1)$ -инвариантна и является многомерным обобщением симметризованного гамма-распределения.

§3. Коммутативная модель представлений дополнительной серии группы $O(n, 1)$ относительно подгруппы Z

Каждое представление дополнительной серии группы $O(n, 1)$ задается числом λ из интервала $0 < \lambda < n - 1$ и может быть реализовано в гильбертовом пространстве вещественных функций на $Z \cong \mathbb{R}^{n-1}$ со скалярным произведением

$$\langle f_1, f_2 \rangle = \int_{\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}^{n-1}} |\gamma' - \gamma''|^{-\lambda} f_1(\gamma') f_2(\gamma'') d\gamma' d\gamma''. \quad (3)$$

Операторы представления задаются формулой

$$T_g^\lambda f(\gamma) = f(\gamma \bar{g}) \beta^{1-n+\lambda/2}(\gamma, g), \quad (4)$$

где

$$\gamma \bar{g} = \left(-\frac{|\gamma|^2}{2} g_{13} + \gamma g_{23} + g_{33} \right)^{-1} \left(-\frac{|\gamma|^2}{2} g_{12} + \gamma g_{22} + g_{32} \right), \quad (5)$$

$$\beta(\gamma, g) = \left| -\frac{|\gamma|^2}{2} g_{13} + \gamma g_{23} + g_{33} \right|. \quad (6)$$

В частности,

$$T_{z_0}^\lambda f(\gamma) = f(\gamma + \gamma_0) \quad \text{при } z = z(\gamma_0) \in Z,$$

где $\gamma_0 \in \mathbb{R}^{n-1}$ — элемент клеточной матрицы z ,

$$T_d^\lambda f(\gamma) = |\epsilon|^{1-n+\lambda/2} f(\epsilon^{-1} \gamma u) \quad \text{при } d = \text{diag}(\epsilon^{-1}, u, \epsilon),$$

$$T_s^\lambda f(\gamma) = f\left(-\frac{2\gamma}{|\gamma|^2}\right) \left(\frac{|\gamma|^2}{2}\right)^{1-n+\lambda/2} \quad \text{при } s = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & e & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Коммутативная модель этих представлений получается переходом от функций $f(\gamma)$ к их преобразованию Фурье.

ТЕОРЕМА 1. В коммутативной модели представление T^λ дополнительной серии реализуется в гильбертовом пространстве L_λ комплекснозначных функций на $\mathbb{R}^{n-1}$ с нормой

$$\|\varphi\|^2 = \frac{2^{-\lambda} \Gamma((n-1-\lambda)/2)}{\Gamma(\lambda/2)} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} |\xi|^{1-n+\lambda} |\varphi(\xi)|^2 d\xi, \quad |\xi| = \langle \xi, \xi \rangle^{1/2}, \quad (7)$$

удовлетворяющих условию

$$\overline{\varphi(\xi)} = \varphi(-\xi). \quad (8)$$

Операторы представления задаются формулой

$$T_g^\lambda \varphi(\xi) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} K^\lambda(\xi, \xi', g) \varphi(\xi') d\xi', \quad (9)$$

зде

$$K^\lambda(\xi, \xi', g) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{i(\langle \xi, \gamma \rangle - \langle \xi', \gamma \bar{g} \rangle)} \beta^{1-n+\lambda/2}(\gamma, g) d\gamma. \quad (10)$$

В частности,

$$\begin{aligned} T_z^\lambda \varphi(\xi) &= e^{-i\langle \xi, \gamma_0 \rangle} \varphi(\xi) \quad \text{при } z = z(\gamma_0) \in Z, \\ T_d^\lambda \varphi(\xi) &= |\epsilon|^{\lambda/2} \varphi(\epsilon \xi u) \quad \text{при } d = \text{diag}(\epsilon^{-1}, u, \epsilon). \end{aligned}$$

Заметим, что для описания представления достаточно, кроме операторов T_z^λ и T_d^λ , задать лишь оператор T_s^λ . Выражение для ядра этого оператора приводится к следующему виду:

$$K^\lambda(\xi, \xi', s) = c_n 2^{-\lambda/2} \int_0^\infty r^{\lambda-n} |r\xi + 2r^{-1}\xi'|^{-(n-3)/2} J_{(n-3)/2}(|r\xi + 2r^{-1}\xi'|) dr, \quad (11)$$

где $J_{(n-3)/2}$ — функция Бесселя.

Коммутативная модель особого представления группы $O(n, 1)$, приклеенного к единичному представлению, получается предельным переходом при $\lambda \rightarrow 0$. Операторы представления действуют в пространстве функций с нормой

$$\|\varphi\|^2 = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} |\xi|^{1-n} |\varphi(\xi)|^2 d\xi.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Для любых вещественных положительных чисел $\lambda_1, \dots, \lambda_m$, $\sum \lambda_i < n - 1$, существует изометрическое вложение

$$\tau: L_\lambda \rightarrow \bigotimes_{i=1}^m L_{\lambda_i}, \quad \lambda = \sum \lambda_i,$$

коммутирующее с действием группы G ; а именно,

$$\tau\varphi(\xi_1, \dots, \xi_m) = \varphi(\xi_1 + \dots + \xi_m). \quad (12)$$

§4. Мера μ

Для построения коммутативной модели основного представления группы G^X введем две замечательные меры на пространстве векторных распределений на X .

Обозначим через F пространство ограниченных гладких вещественных функций на X и через Φ двойственное ему пространство с обычной топологией (пространство распределений на X). Условимся символом $\langle \cdot, \cdot \rangle$ обозначать спаривание элементов из F и Φ .

Введем пространство F^{n-1} ограниченных вещественных гладких вектор-функций $\gamma(x) = (\gamma_1(x), \dots, \gamma_{n-1}(x))$, $\gamma_i \in F$, и обозначим через Φ^{n-1} двойственное к нему пространство. Элементы из Φ^{n-1} реализуются как вектор-распределения $\xi(x) = (\xi_1(x), \dots, \xi_{n-1}(x))$, $\xi_i \in \Phi$, со спариванием

$$\langle \xi, \gamma \rangle = \sum_{k=1}^{n-1} \langle \xi_k, \gamma_k \rangle.$$

Например, если $\xi = c \delta_{x_0}$, где $c = (c_1, \dots, c_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$, а δ_{x_0} — дельта-функция на X , то $\langle \xi, \gamma \rangle = \sum_{k=1}^{n-1} c_k \gamma_k(x_0)$.

В дальнейшем для краткости индекс $n-1$ в обозначении пространств F^{n-1} и Φ^{n-1} будем опускать.

Определим на F функционал $L(\gamma(\cdot))$ по формуле

$$L(\gamma(\cdot)) = \exp \left(-\frac{1}{2} \int_X \log \left(1 + \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{n-1} \gamma_i^2(x) \right) dm(x) \right). \quad (13)$$

Отметим, что $L(\gamma(\cdot)) = \Psi(\gamma(\cdot))$, где $\Psi(\gamma(\cdot))$ — ограничение сферической функции основного представления группы G^X на подгруппу Z^X , см. формулу (2). Этот функционал положительно определен и непрерывен (см. [7]), а потому по теореме Минлоса о мерах на пространстве распределений [7] он является преобразованием Фурье конечной нормированной меры μ на Φ , т. е.

$$L(\gamma(\cdot)) = \int_{\Phi} e^{i\langle \xi, \gamma \rangle} d\mu(\xi). \quad (14)$$

Из определения следует, что мера μ инвариантна относительно преобразований $\xi \rightarrow \xi u$, $u \in O(n-1)^X$.

ТЕОРЕМА 2. *Мера μ сосредоточена на множестве $\Phi_0 \subset \Phi$ распределений вида*

$$\xi = \sum c^i \delta_{x_i}, \quad c^i = (c_1^i, \dots, c_{n-1}^i) \in \mathbb{R}^{n-1}, \quad \text{где} \quad \sum |c^i| < \infty. \quad (15)$$

Этот факт следует считать известным обобщением того, что скалярный гамма-процесс сосредоточен на линейных комбинациях дельта-мер с конечной суммой зарядов, см. [14, гл. 4]. Фактически мы строим векторный гамма-процесс, мера в пространстве траекторий которого имеет свойство, дополнительное к свойствам симметризованного гамма-процесса: она инвариантна относительно поточечных ортогональных преобразований.

Обозначим через $\mathcal{F}$ пространство вещественных ограниченных борелевских вектор-функций на X . Поскольку почти всякое распределение $\xi \in \Phi$ относительно меры μ имеет вид (15), то каждой функции $\gamma \in \mathcal{F}$ соответствует линейный измеримый функционал $\langle \xi, \gamma \rangle$ на Φ , определенный почти всюду на Φ относительно меры μ .

Отметим, что на $\mathcal{F}$ естественно определены поточечное действие $\gamma \rightarrow \gamma u$ группы $O(n-1)^X$ и умножение $\gamma \rightarrow \epsilon \gamma$ на борелевские функции $\epsilon(x)$.

Опишем проекции меры μ на конечномерные факторпространства пространства Φ . Будем рассматривать всевозможные конечные разбиения пространства X , такие, что $\text{mes } X_i < n-1$ для всех элементов разбиения. Свяжем с каждым разбиением $\alpha: X = \bigcup_{i=1}^m X_i$, где $\text{mes } X_i < n-1$, подпространство $\mathcal{F}_\alpha \cong (\mathbb{R}^{n-1})^m$ вектор-функций $\gamma(x) \in \mathcal{F}$, постоянных на элементах разбиения α , и двойственное ему пространство $\Phi_\alpha \cong (\mathbb{R}^{n-1})^m$, реализованное как факторпространство пространства Φ .

Обозначим через μ_α проекцию меры μ на факторпространство Φ_α .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Мера μ_α на $\Phi_\alpha \cong (\mathbb{R}^{n-1})^m$ имеет вид*

$$d\mu_\alpha(\xi_1, \dots, \xi_m) = \prod_{k=1}^m \left(\frac{2}{\Gamma(\lambda_k/2)} |\xi_k|^{(\lambda_k - n + 1)/2} K_{(n-1-\lambda_k)/2}(2|\xi_k|) d\xi_k \right), \quad (16)$$

где $\xi_i \in \mathbb{R}^{n-1}$, $d\xi_i$ — лебегова мера на $\mathbb{R}^{n-1}$, $\lambda_k = \text{mes } X_k$ и K_ν — модифицированная функция Бесселя 3-го рода (или функция Бассе), см. [13].

Функция $K_\nu(2z)$ задается равенством

$$K_\nu(2z) = \frac{\pi}{2 \sin(\pi\nu)} (I_{-\nu}(2z) - I_\nu(2z)), \quad (17)$$

где

$$I_\nu(2z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{z^{2m+\nu}}{m! \Gamma(m + \nu + 1)}. \quad (18)$$

§5. Мера ν

Перейдем к построению новой бесконечной σ -конечной меры ν на Φ . Для этого введем следующую функцию на полупрямой $0 \leq x < \infty$:

$$V_\nu(x) = \left(\frac{2}{\Gamma(\nu)} x^\nu K_\nu(2x) \right)^{-1}, \quad \nu > 0. \quad (19)$$

Эта функция непрерывна, строго положительна на полупрямой и

$$V_\nu(0) = 1. \quad (20)$$

В частности, $V_{1/2}(x) = e^{2x}$.

Зададим на пространствах Φ_α меры $d\nu_\alpha$ с плотностью

$$\frac{d\nu_\alpha(\xi_1, \dots, \xi_m)}{d\mu_\alpha(\xi_1, \dots, \xi_m)} = 2^{-\text{mes } X} \prod_{k=1}^m V_{(n-1-\lambda_k)/2}(|\xi_k|).$$

(Согласно условию на разбиения α , $n - 1 - \lambda_k > 0$ для всех k .)

Из явной формулы для $d\mu_\alpha(\xi_1, \dots, \xi_m)$ следует

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Мера ν_α на $\Phi_\alpha \cong (\mathbb{R}^{n-1})^m$ имеет вид

$$d\nu_\alpha(\xi_1, \dots, \xi_m) = \prod_{i=1}^m \frac{2^{-\lambda_i} \Gamma((n-1-\lambda_i)/2)}{\Gamma(\lambda_i/2)} |\xi_i|^{\lambda_i-n+1} d\xi_i, \quad (21)$$

$\xi_i \in \mathbb{R}^{n-1}$, $\lambda_i = \text{mes } X_i$.

Условимся писать $\beta \geq \alpha$, если β — подразбиение разбиения α . При $\beta \geq \alpha$ имеют место естественные вложение $\mathcal{F}_\alpha \rightarrow \mathcal{F}_\beta$ и эпиморфизм $\Phi_\beta \rightarrow \Phi_\alpha$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Меры ν_α на факторпространствах Φ_α согласованы между собой, т. е. при эпиморфизме $\Phi_\beta \rightarrow \Phi_\alpha$, $\beta \geq \alpha$, мера ν_β на Φ_β переходит в ν_α .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Определим бесконечную σ -конечную меру ν на Φ как слабый предел согласованных между собой мер ν_α .

ТЕОРЕМА 3. 1) Мера ν абсолютно непрерывна по мере μ ; ее плотность $v(\xi) = d\nu(\xi)/d\mu(\xi)$ почти всюду по мере μ положительна и имеет вид

$$v\left(\sum c^i \delta_{x_i}\right) = \prod V_{(n-1)/2}(|c^i|), \quad c^i \in \mathbb{R}^{n-1}, \quad (22)$$

где $V_\nu(x)$ задается равенством (19). В частности,

$$v\left(\sum c^i \delta_{x_i}\right) = \exp\left(2 \sum |c^i|\right), \quad c^i \in \mathbb{R}, \quad \text{в случае } n = 2.$$

2) Преобразование Фурье меры ν имеет вид

$$\int e^{i\langle \xi, \gamma \rangle} d\nu(\xi) = \exp \left(- \int_X \log |\gamma(x)| dm(x) \right). \quad (23)$$

(Это преобразование Фурье определено там, где конечен интеграл в правой части равенства.)

ЗАМЕЧАНИЕ. Каждое из свойств 1) и 2) меры ν можно принять в качестве ее определения.

Из свойства 2) меры ν непосредственно следует

ТЕОРЕМА 4. Мера ν инвариантна относительно действия группы $O(n-1)^X$ и проективно инвариантна относительно умножения на ограниченные борелевские функции $\epsilon(x) \in (\mathbb{R}^*)^X$, для которых сходится интеграл $\int_X \log |\epsilon(x)| dm(x)$. А именно,

$$d\nu(\xi u) = d\nu(\xi) \quad \text{для любого } u(x) \in O(n-1)^X, \quad (24)$$

$$d\nu(\epsilon \xi) = e^{\int_X \log |\epsilon(x)| dm(x)} d\nu(\xi). \quad (25)$$

В частности, мера ν инвариантна относительно подгруппы умножений на функции $\epsilon(x)$, удовлетворяющие соотношению $\int_X \log |\epsilon(x)| dm(x) = 0$.

§6. Конструкция коммутативной модели основного представления группы токов G^X , $G = O(n, 1)$

Коммутативная модель основного представления группы токов G^X , $G = O(n, 1)$, реализуется в гильбертовом пространстве $L^2(\nu)$ всех функций на Φ , квадратично интегрируемых по введенной выше мере ν .

Опишем вначале представление подгруппы $B^X = Z^X \ltimes D^X$ клеточно-треугольных матриц, элементы которой мы записываем в виде троек

$$g(x) = (\epsilon, u, \gamma), \quad \epsilon \in (\mathbb{R}^*)^X, \quad u(x) \in O(n-1)^X, \quad \gamma \in (\mathbb{R}^{n-1})^X.$$

Поставим в соответствие элементам подгруппы B^X следующие операторы U_g в пространстве функций $f(\xi)$ на Φ :

$$U_{\epsilon, u, \gamma} f(\xi) = e^{\frac{1}{2} \int_X \log |\epsilon(x)| dm(x) + i\langle \xi, \gamma \rangle} f(\epsilon \xi u). \quad (26)$$

В частности, элементам $z = z(\gamma) \in Z^X$ отвечают операторы

$$U_z f(\xi) = e^{i\langle \xi, \gamma \rangle} f(\xi),$$

где $\gamma \in (\mathbb{R}^{n-1})^X$ — матричный элемент клеточной матрицы z , а элементам $d = \text{diag}(\epsilon^{-1}, u, \epsilon) \in D^X$ — операторы

$$U_d f(\xi) = e^{\frac{1}{2} \int_X \log |\epsilon(x)| dm(x)} f(\epsilon \xi u).$$

Заметим, что интеграл $\int_X \log |\epsilon(x)| dm(x)$ сходится, поскольку элементы $\epsilon(x)$ и $\epsilon^{-1}(x)$ матрицы d — ограниченные функции на X .

ТЕОРЕМА 5. Операторы U_g унитарны относительно нормы в $L^2(\nu)$ и образуют неприводимое представление группы B^X в пространстве $L^2(\nu)$.

Корректность определения этого представления следует из построения и свойств (24), (25) меры ν , а неприводимость — из эргодичности меры ν относительно действия группы Z^X и известных условий неприводимости.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. На $L^2(\nu)$ для элементов $z = z(\gamma) \in Z^X$ имеет место равенство

$$\langle U_z v^{-1/2}, v^{-1/2} \rangle = \Psi(\gamma(\cdot)),$$

где $v(\xi)$ — плотность меры ν относительно μ , а $\Psi(\gamma(\cdot))$ — ограничение сферической функции основного представления группы G^X на подгруппу Z^X , заданное равенством (2).

Отсюда следует, что представление U_g группы B^X эквивалентно ограничению основного представления группы G^X на эту подгруппу.

Перейдем теперь к описанию представления U_g всей группы токов G^X в пространстве $L^2(\nu)$. Для этого воспользуемся следующей очевидной леммой.

ЛЕММА. Группа $O(n, 1)^X$ алгебраически порождена подгруппой B^X и единственным элементом $g(x) \equiv s$.

Например, любой элемент g верхней клеточно-треугольной матрицы представим в виде $g = sg^*s$, где $g^* \in B^X$.

В силу этой леммы все операторы U_g , $g \in G^X$, представимы как произведения описанных уже операторов подгруппы B^X и оператора U_s , а потому для описания представления всей группы G^X достаточно описать только оператор U_s .

Мы называем U_s оператором инволюции в пространстве $L^2(\nu)$ и обозначаем через I .

Оператор $I = U_s$ связан с операторами U_g , $g \in B^X$, следующими соотношениями:

$$IU_d = U_{sds}I \quad \text{для любого } d \in D^X, \quad (27)$$

$$U_{z(\gamma)}I = U_dIU_{z(-\gamma)}IU_{z(j\gamma)} \quad \text{для любого } z(\gamma) \in Z^X, \quad (28)$$

где $j\gamma = -2\gamma/|\gamma|^2$ (инволюция) и

$$d = \text{diag} \left(-\frac{2}{|\gamma|^2}, u_\gamma, -\frac{|\gamma|^2}{2} \right), \quad u_\gamma = e - \frac{2\gamma^*\gamma}{|\gamma|^2}.$$

Отметим, что при каждом $x \in X$ матрица $u_\gamma(x)$ задает отражение в $\mathbb{R}^{n-1}$ относительно гиперплоскости, ортогональной вектору $\gamma(x)$.

Эти соотношения следуют из аналогичных соотношений в группе $O(n, 1)$.

Соотношениями (27) и (28) оператор I однозначно определен, однако из них нельзя получить явное выражение для этого оператора.

Явное описание оператора I следует из описания оператора T_s в коммутативных моделях представлений дополнительной серии группы $O(n, 1)$. А именно, свяжем с каждым разбиением $\alpha: X = \bigcup_{i=1}^m X_i$ гильбертово пространство $L^2(\nu_\alpha) \subset L^2(\nu)$ функций на Φ_α , квадратично интегрируемых по мере ν_α . Пространства $L^2(\nu_\alpha)$ инвариантны относительно I , и для описания оператора I на всем пространстве $L^2(\nu)$ достаточно описать его действие на каждом из этих подпространств. Согласно построению, каждое пространство $L^2(\nu_\alpha)$ изоморфно тензорному произведению конечного числа пространств, на которых действует коммутативная модель представления группы $O(n, 1)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. На каждом подпространстве $L^2(\nu_\alpha)$ оператор инволюции I совпадает с оператором T_s представления группы $O(n, 1)$ в этом подпространстве.

Исходя из формул для операторов T_s в коммутативных моделях представлений дополнительной серии группы $O(n, 1)$, получаем следующий результат.

ТЕОРЕМА 6. *Для каждого разбиения $\alpha: X = \bigcup_{i=1}^m X_i$ оператор I на подпространстве $L^2(\nu_\alpha)$ задается формулой*

$$If(\xi_1, \dots, \xi_m) = \int_{(\mathbb{R}^{n-1})^m} f(\xi'_1, \dots, \xi'_m) \prod_{i=1}^m K^{\lambda_i}(\xi_i, \xi'_i) d\xi_i, \quad \xi_i \in \mathbb{R}^{n-1}, \quad \lambda_i = \text{mes } X_i,$$

где

$$K^\lambda(\xi, \xi') = c_n 2^{-\lambda/2} \int_0^\infty r^{\lambda-n} |r\xi + 2r^{-1}\xi'|^{-(n-3)/2} J_{(n-3)/2}(|r\xi + 2r^{-1}\xi'|) dr.$$

Тем самым оператор I корректно определен на всем пространстве $L^2(\nu)$, так как он унитарен на всех подпространствах $L^2(\nu_\alpha)$ и удовлетворяет на них нужным соотношениям.

Итак, неприводимое унитарное представление группы G^X в пространстве $L^2(\nu)$ полностью построено. Его изоморфизм с основным представлением группы G^X следует из совпадения сферических функций этих представлений.

§ 7. Добавление 1. Аппроксимативная конструкция коммутативной модели

Приведем другую, независимую от прежней, конструкцию коммутативной модели основного представления группы G^X . Свяжем с каждым конечным разбиением $\alpha: X = \bigcup_{i=1}^m X_i$ пространства X введенное ранее гильбертово пространство $L^2(\nu_\alpha)$ функций на Φ_α и подгруппу $G_\alpha^X \subset G^X$ функций, постоянных на элементах разбиения α .

При $\beta \geq \alpha$ имеются естественное вложение групп $G_\alpha^X \rightarrow G_\beta^X$ и изометрическое вложение пространств $L^2(\nu_\alpha) \rightarrow L^2(\nu_\beta)$. Обозначим через L_0 индуктивный предел подпространств $L^2(\nu_\alpha)$ и через G_0^X индуктивный предел подгрупп G_α^X . Отметим, что группа G_0^X всюду плотна в группе G^X .

Унитарное представление U_g группы G^X задается на пополнении L пространства L_0 по норме пространства L_0 . Для его определения достаточно описать действие операторов U_g , $g \in G_0^X$, на подпространстве L_0 .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7. *Пространство $L^2(\nu_\alpha)$ является тензорным произведением $\mathcal{M}$,*

$$L^2(\nu_\alpha) = \bigotimes_{i=1}^m L_{\lambda_i}, \quad \lambda_i = \text{mes } X_i, \quad (29)$$

где L_{λ_i} — гильбертовы пространства, введенные в теореме 1.

Определим, исходя из разложения (29), унитарное представление U_g группы G_α^X на $L^2(\nu_\alpha)$ по формуле

$$U_{g(x)} = T_{g_1}^{\lambda_1} \otimes \dots \otimes T_{g_m}^{\lambda_m}, \quad g_i = g(x)|_{X_i}, \quad (30)$$

где T^{λ_i} — операторы представлений дополнительной серии группы $G = O(n, 1)$ в пространствах L_{λ_i} , определенные в теореме 1.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8. *При $\beta \geq \alpha$ вложение пространств $L^2(\nu_\alpha) \rightarrow L^2(\nu_\beta)$ коммутирует с представлениями $\tilde{U}_g$ групп G_α^X и G_β^X в этих пространствах.*

СЛЕДСТВИЕ. Унитарные представления U_g групп G_α^X в пространствах $L^2(\nu_\alpha)$ согласованы между собой, а потому порождают унитарное представление группы G_0^X в L_0 .

ТЕОРЕМА 7. Построенное представление U_g группы G^X неприводимо и эквивалентно основному представлению этой группы, определенному в [2, 6].

§8. Добавление 2. Двойственное описание представления U_g

Введем оператор преобразования Фурье функций $f(\xi)$ на Φ в функции $\varphi(\gamma)$ на $\mathcal{F}$:

$$\mathcal{R}f(\gamma) = \int_{\Phi} f(\xi) e^{i\langle \xi, \gamma \rangle} d\nu(\xi), \quad \gamma \in \mathcal{F}.$$

Этот оператор определен на всюду плотном подмножестве функций $f \in L^2(\nu)$; в частности, если интеграл $\int_{\Phi} |f(\xi)| d\nu(\xi)$ сходится, то функция $\mathcal{R}f(\gamma)$ определена на всем пространстве $\mathcal{F}$.

ТЕОРЕМА 8. Пусть $f_1 \in L^2(\nu)$, $g \in G^X$ и $f_2 = U_g f_1$. Тогда на подмножестве тех $\gamma \in \mathcal{F}$, где функции $\mathcal{R}f_1$ и $\mathcal{R}f_2$ определены, эти функции связаны соотношением

$$\mathcal{R}f_2(\gamma) = \mathcal{R}f_1(\gamma \bar{g}) e^{-\frac{1}{2} \int_X \log \beta(\gamma(x), g(x)) dm(x)}, \quad (31)$$

где, в соответствии с формулами (5) и (6) для группы $g = O(n, 1)$,

$$\begin{aligned} \gamma(x) \overline{g(x)} &= \left(-\frac{|\gamma(x)|^2}{2} g_{13}(x) + \gamma(x) g_{23}(x) + g_{33}(x) \right)^{-1} \\ &\quad \times \left(-\frac{|\gamma(x)|^2}{2} g_{12}(x) + \gamma(x) g_{22}(x) + g_{32}(x) \right), \\ \beta(\gamma(x), g(x)) &= \left| -\frac{|\gamma(x)|^2}{2} g_{12}(x) + \gamma(x) g_{22}(x) + g_{32}(x) \right|. \end{aligned}$$

В частности,

$$\mathcal{R}f_2(\gamma) = \begin{cases} \mathcal{R}f_1(\gamma + \gamma_0) & \text{при } g = z(\gamma_0) \in Z^X, \\ \mathcal{R}f_1(\epsilon^{-1} \gamma u) e^{-\frac{1}{2} \int_X \log |\epsilon(x)| dm(x)} & \text{при } g = \text{diag}(\epsilon^{-1}, u, \epsilon) \in D^X, \\ 2^{\frac{1}{2} \text{mes } X} \mathcal{R}f_1(-2\gamma/|\gamma|^2) e^{-\int_X \log |\gamma(x)| dm(x)} & \text{при } g(x) \equiv s. \end{cases} \quad (32)$$

СЛЕДСТВИЕ. На множестве всех $\gamma \in \mathcal{F}$, где функции $\mathcal{R}f$ и $\mathcal{R}If$, $f \in L^2(\nu)$, определены, эти функции связаны соотношением

$$\mathcal{R}If(\gamma) = 2^{\frac{1}{2} \text{mes } X} \mathcal{R}f \left(-\frac{2\gamma}{|\gamma|^2} \right) e^{-\int_X \log |\gamma(x)| dm(x)} \quad \text{при } g(x) \equiv s. \quad (33)$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Гельфанд И. М., Граев М. И., Пятецкий-Шапиро И. И. Теория представлений и автоморфные функции. Наука, М., 1966.
2. Вершик А. М., Гельфанд И. М., Граев М. И. Неприводимые представления группы G^X и когомологии. Функц. анализ и его прил., **8**, вып. 2, 67–69 (1974).
3. Вершик А. М., Гельфанд И. М., Граев М. И. Представления группы $SL(2, R)$, где R — кольцо функций. УМН, **28**, вып. 5, 83–128 (1973).
4. Вершик А. М., Гельфанд И. М., Граев М. И. Коммутативная модель основного представления группы $GL(2, \mathbb{R})^X$ относительно унитарной подгруппы. В сб.: Теоретико-групповые методы в физике. Т. 2. Наука, М., 1983, с. 472–487.
5. Вершик А. М., Гельфанд И. М., Граев М. И. Коммутативная модель представления группы токов $SL(2, \mathbb{R})^X$, связанная с унитарной подгруппой. Функц. анализ и его прил., **17**, вып. 2, 70–72 (1983).
6. Gelfand I. M., Graev M. I., Vershik A. M. Models of representations of current groups. In: Representations of Lie groups and Lie algebras (Budapest, 1971), Akad. Kiadó, Budapest, 1985, pp. 121–179.
7. Гельфанд И. М., Вилленкин Н. Я. Некоторые применения гармонического анализа. Обобщенные гильбертовы пространства. Физматгиз, М., 1951.
8. Tsilevich N., Vershik A., Yor M. An infinite-dimensional analogue of the Lebesgue measure and distinguished properties of the gamma process. J. Funct. Anal., **185**, No. 1, 274–296 (2001).
9. Вершик А. М., Карпушев С. И. Когомологии групп в унитарных представлениях, окрестность единицы и условно положительно определенные функции. Матем. сб., **119**, вып. 4, 521–533 (1982).
10. Shalom Y. Rigidity, unitary representation of semisimple groups and fundamental groups of manifold with rank one transformation group. Ann. of Math (2), **152**, 113–182 (2000).
11. Kuhn G., Vershik A. Canonical semigroups of states and cocycles for the group of automorphisms of a homogeneous tree. Algebr. Represent. Theory, **6**, No. 3, 333–352 (2003).
12. Ольшанский Г. И. Сферические функции и характеры на группе $U(\infty)$. УМН, **17**, вып. 2, 217–218 (1982).
13. Бейтмен Г., Эрдейи Л. Высшие трансцендентные функции. Т. 2. Физматгиз, М., 1974.
14. Гизман И. И., Скороход А. В. Теория случайных процессов. Т. 2. Наука, М., 1973.

С.-Петербургское отделение Математического
института им. В. А. Стеклова
Международный институт Э. Шрёдингера
e-mail: vershik@pdmi.ras.ru

Институт системных исследований РАН, Москва
e-mail: graev_36@mtu-net.ru

Поступило в редакцию
17 января 2005 г.