Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Б. А. Пламеневский, В. Н. Сеничкин, Псевдо-
дифференциальные операторы на многообразиях
с особенностями, *Функци. анализ и его прил.*, 1999,
том 33, выпуск 2, 88–91

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa360>

Использование Общероссийского математического портала Math-
Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользователь-
ским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.205.19.152

26 апреля 2023 г., 16:04:53

361–379 (1986). 4. *Мальшиев В. А., Минлос Р. А.* Труды семинара им. И. Г. Петровского, вып. 9, 63–80 (1983). 5. *Лакаев С. Н.* Функциональный анализ и его прил., **27**, вып. 3, 15–28 (1993).

Самаркандский государственный университет

Поступило в редакцию
10 ноября 1997 г.

УДК 517.98

Псевдодифференциальные операторы на многообразиях с особенностями

© 1999. Б. А. ПЛАМЕНЕВСКИЙ, В. Н. СЕНИЧКИН

В заметке определяются ПДО на многообразиях с «пересекающимися ребрами»; перечисляются неприводимые представления C^* -алгебры, порожденной ПДО (нулевого порядка).

1. Стратифицированные многообразия. Компактное метрическое пространство $\mathcal{M}$ назовем *стратифицированным многообразием*, если: 1) $\mathcal{M}$ есть конечное объединение непересекающихся связных топологических многообразий (*стратов*); 2) граница $\partial T = \overline{T} \setminus T$ каждого страта T есть объединение некоторого (возможно, пустого) множества стратов меньших размерностей. По определению $\dim \mathcal{M}$ есть наибольшая из размерностей стратов. Множество всех стратов, границы которых содержат страт T , называется *звездой* $\text{st } T$ страта T . Последовательность $T_0, T_1, \dots, T_p$ стратов называется *цепочкой*, если $T_k \in \text{st } T_j$ при $k > j$. Определим дифференциальную структуру класса $\mathfrak{D}_n$. Через $\mathfrak{D}_0$ обозначим множество конечных наборов точек с дискретной топологией. Пусть определены $\mathfrak{D}_k$, $0 \leq k \leq n-1$. Многообразие $\mathcal{M}$ класса $\mathfrak{D}_n$ ($n = \dim \mathcal{M}$) подчиняется следующему условию: для любого страта T , $\dim T = q$, и всякой точки $x \in T$ существуют окрестность $\mathcal{O}$ точки x в $\mathcal{M}$ и гомеоморфизм $\kappa: \mathcal{O} \rightarrow \kappa(\mathcal{O})$, такой, что $\kappa(\mathcal{O})$ — открытое подмножество произведения $\mathbb{R}^q \times K(\mathcal{M}')$, где $K(\mathcal{M}')$ — замкнутый конус в некотором пространстве $\mathbb{R}^N$ с направляющим многообразием $\mathcal{M}' \in \mathfrak{D}_{n-q-1}$. При этом $\kappa(T \cap \mathcal{O}) \subset \mathbb{R}^q \times 0$, 0 — вершина конуса $K(\mathcal{M}')$, и если $R \in \text{st } T$, $\dim R = r$, то $\kappa(R \cap \mathcal{O}) \subset \mathbb{R}^q \times K(R')$, где R' есть $(q-r-1)$ -мерный страт многообразия $\mathcal{M}'$. (Будем говорить, что R' отвечает страту R .) Предположим, что $c_1 r(a_1, a_2) \leq \text{dist}(a_1, a_2) \leq c_2 r(a_1, a_2)$ для всех $a_1, a_2 \in \mathcal{O}$, где r — расстояние на $\mathcal{M}$, dist — расстояние в $\mathbb{R}^{q+N}$ и c_1, c_2 — положительные постоянные. В окрестности $\mathcal{O}$ введем «цилиндрические» координаты $(\zeta_1, \rho_1, \omega_1)$ при $\zeta_1 \in \mathbb{R}^q$, $\rho_1 > 0$, $\omega_1 \in \mathcal{M}'$. Полагая $q_1 = q$ и «расшифровывая» ω_1 по индукции, получаем координатную окрестность U с цилиндрическими координатами $(\zeta_1, \rho_1, \dots, \zeta_k, \rho_k, \zeta_{k+1})$, где $\zeta_j \in \mathbb{R}^{q_j}$, $\rho_j > 0$; не исключается случай $q_j = 0$ (тогда ζ_j отсутствует). Введем вектор $(\zeta_1, \rho_1, \rho_1 \zeta_2, \rho_1 \rho_2, \rho_1 \rho_2 \zeta_3, \rho_1 \rho_2 \rho_3, \dots, \rho_1 \dots \rho_{k-1} \zeta_k, \rho_1 \dots \rho_{k-1} \rho_k, \rho_1 \dots \rho_k \zeta_{k+1})$ и перепишем его как числовую строку $(x_1, \dots, x_n)$; она играет роль декартовых координат. Будем считать, что цилиндрические координаты в пересекающихся окрестностях связаны гладким преобразованием (в том числе и при нулевых значениях координат ρ_j). Предположим, что из окрестностей типа окрестности U составлен конечный атлас $\{U_i, \kappa_i\}$. Атлас с перечисленными

свойствами назовем *допустимым*. Пусть, кроме того, χ_i — разбиение единицы, подчиненное покрытию $\{U_i\}$, и $\chi_i \eta_i = \chi_i$, $\text{supp } \eta_i \subset U_i$. Пусть $\mathcal{S}$ — объединение стратов размерностей $\leq \dim \mathcal{M} - 1$ и $d(x)$ — регуляризованное расстояние от x до $\mathcal{S}$. (Эквивалентность расстояний r и dist позволяет определить регуляризованное расстояние d на $\mathcal{M}$ с помощью разбиения единицы и регуляризованного расстояния в евклидовом пространстве; по поводу последнего понятия см. [1].) Считаем, что d , χ_i , η_i гладко зависят от цилиндрических координат.

Оператор $A: C_c^\infty(\mathcal{M} \setminus \mathcal{S}) \rightarrow C^\infty(\mathcal{M} \setminus \mathcal{S})$ называется ПДО (нулевого порядка), если: 1) оператор $\eta_i A \chi_i$ в декартовых координатах совпадает с оператором $(\eta_i \circ \kappa_i^{-1}) A_i (\chi_i \circ \kappa_i^{-1})$, где $(A_i u)(x) = F_{\xi \rightarrow x}^{-1} a_i(x, (d \circ \kappa_i^{-1})(x) \xi) F_{y \rightarrow \xi} u(y)$, F — преобразование Фурье, а функция $a_i(x, \xi)$ гладко зависит от *цилиндрических* координат точки x и декартовых координат точки ξ , все ее производные ограничены и существует конечный предел $a_i^0(x, \xi) = \lim_{t \rightarrow \infty} a_i(x, t\xi)$; 2) оператор $B = (1 - \eta_i) A \chi_i$ сглаживает в том смысле, что $d(x)^{|\alpha|} \partial_x^\alpha B u \in L^2(\mathcal{M})$ для $u \in L^2(\mathcal{M})$ и всех α . (Норма в $L^2(\mathcal{M})$ склеивается из локальных L^2 -норм в декартовых координатах.) По координатным представителям a_i^0 определяется функция a^0 на косферическом расслоении $\mathbb{S}^*(\mathcal{M} \setminus \mathcal{S})$; она называется *главным символом* оператора A . Модификация определения ПДО при замене $\mathcal{M}$ клином $\mathcal{W}_0 = \mathbb{R}^q \times K(M')$ очевидна.

Указанные конструкции по существу не зависят от случайных элементов построения. А именно, при переходе к эквивалентному атласу и другому разбиению единицы регуляризованное расстояние заменяется эквивалентным; класс всех ПДО сохраняется. (Два допустимых атласа называются эквивалентными, если их объединение — допустимый атлас.)

Поясним роль функции d в определении ПДО. При замене координат и в символическом исчислении возникают выражения вида $\partial_x^\alpha \partial_\xi^\alpha a(x, d(x)\xi)$. Символы a имеют особенности по переменной x . При дифференцировании по x порядок особенности увеличивается, а при дифференцировании по ξ возникает компенсирующий множитель $d(x)$.

2. Представления алгебры ПДО. Пусть $z_0 \in T_0$, где T_0 — некоторый q -мерный страт, $q < \dim \mathcal{M}$, и пусть $\kappa(z_0) = 0$. Обозначим через $\eta A_\kappa \chi$ оператор в $L^2(\mathcal{W}_0)$, полученный из A с помощью κ ; здесь η, χ — срезки, равные 1 вблизи точки 0. В клине $\mathcal{W}_0$ введем оператор $(V_t f)(x) = f(tx)$, $t > 0$. Существует сильный предел $A(z_0) = \text{s-lim}_{t \rightarrow 0} V_t \eta A_\kappa \chi V_t^{-1}$. Оператор $A(z_0)$ является ПДО в клине $\mathcal{W}_0$, инвариантным относительно сдвигов вдоль ребра. Пусть $\mathbf{F}_{z \rightarrow \zeta}$ — преобразование Фурье вдоль ребра клина. Тогда композиция $\mathbf{F} A \mathbf{F}^{-1}$ есть функция $A(z_0; \zeta)$ параметра $\zeta \in \mathbb{R}^q$ со значениями в алгебре $\mathcal{BL}^2(K(\mathcal{M}'))$ ограниченных операторов в конусе $K(\mathcal{M}')$. Обозначим через $\mathbf{M}_{\rho \rightarrow \lambda}$ преобразование Меллина вдоль образующих этого конуса. Оператор $A(z_0; 0)$ инвариантен относительно растяжений, и композиция $\mathbf{M} A(z_0; 0) \mathbf{M}^{-1}$ есть функция $\lambda \mapsto \mathfrak{A}(z_0; \lambda) \in \mathcal{BL}^2(\mathcal{M}')$ на прямой $\text{Im } \lambda = (\dim \mathcal{M} - q)/2$. Пусть $T_1 \in \text{st } T_0$ и T'_1 — страт в $\mathcal{M}'$, отвечающий T_1 . Для точки z_1 на страте $\mathbb{R}^{\dim T_0} \times K(T'_1)$ клина $\mathcal{W}_0$ можно определить оператор $A(z_0, z_1)$ в новом клине $\mathcal{W}_1$, а затем и операторы $A(z_0, z_1; \zeta_1)$ и $\mathfrak{A}(z_0, z_1; \lambda_1)$. Продолжая этот процесс, для цепочки стратов $T_0, T_1, \dots, T_p$ введем операторы $A(z_0, \dots, z_p; \zeta_p)$ и $\mathfrak{A}(z_0, \dots, z_p; \lambda_p)$; здесь $\zeta_p \in \mathbb{R}^{\delta_p}$, $\delta_p = \dim T_p$ и $\text{Im } \lambda_p = (\dim \mathcal{M} - \dim T_p)/2$.

Пусть $\mathcal{A}$ есть C^* -алгебра, порожденная операторами A нулевого порядка в $L^2(\mathcal{M})$, $\text{com } \mathcal{A}$ — идеал в $\mathcal{A}$, натянутый на коммутаторы элементов из $\mathcal{A}$ и $(\mathcal{A}/\text{com } \mathcal{A})^\wedge$ — пространство максимальных идеалов факторалгебры $\mathcal{A}/\text{com } \mathcal{A}$. Справедливо включение $\mathbb{S}^*(\mathcal{M} \setminus \mathcal{S}) \subset (\mathcal{A}/\text{com } \mathcal{A})^\wedge$. Главные символы ПДО по непрерывности задаются на $(\mathcal{A}/\text{com } \mathcal{A})^\wedge$.

ТЕОРЕМА. *Отображения $A \mapsto A(z_0, \dots, z_p; \zeta_p)$ и $A \mapsto \mathfrak{A}(z_0, \dots, z_p; \lambda_p)$ при $|\zeta_p| = 1$ и $\text{Im } \lambda_p = (\dim \mathcal{M} - \dim T_p)/2$ продолжаются до неприводимых представлений алгебры $\mathcal{A}$. Эти представления попарно неэквивалентны. Всякое одномерное неприводимое представление алгебры $\mathcal{A}$ эквивалентно либо одному из указанных для некоторой цепочки стратов, либо тождественному представлению. Одномерные представления реализуются как значения главных символов. Алгебра $\mathcal{A}$ является алгеброй типа I.*

Описание отображений, порождающих представления, было дано с помощью координатных окрестностей. Поясним, как сделать определение представлений «инвариантным». Рассмотрим пример: многообразие $\mathcal{M}$ с единственным $(n - d)$ -мерным ребром (стратом) s . Этот пример показателен потому, что соответствующая алгебра имеет три серии представлений: одномерные, « ζ -вые» представления операторами $A(z; \zeta)$ и « λ -вые» представления операторами $\mathfrak{A}(z; \lambda)$; в общей ситуации возникают представления только аналогичных серий. Пусть $\{\mathcal{O}_i\}$ — набор окрестностей в $\mathcal{M}$, покрывающий страт s , и $\kappa_i: \mathcal{O}_i \rightarrow \kappa_i(\mathcal{O}_i)$ — гомеоморфизм на открытое подмножество произведения $\Pi = K \times \mathbb{R}^{n-d}$, где K — замкнутая d -мерная коническая поверхность. Пусть $z \in s \cap \mathcal{O}_i \cap \mathcal{O}_j$; считаем, что $\kappa_i(z) = \kappa_j(z) = 0$. Отображение $\kappa_{ij} = \kappa_j \circ \kappa_i^{-1}$ запишем в виде $(\kappa_{ij}^{(1)}, \kappa_{ij}^{(2)})$, где $\kappa_{ij}^{(1)}$ и $\kappa_{ij}^{(2)}$ действуют из Π в K и $\mathbb{R}^{n-d}$ соответственно. Для $x^1 \in K$, $x^2 \in \mathbb{R}^{n-d}$ положим $k_{ij}^{(1)}(x^1) = \lim t^{-1} \kappa_{ij}^{(1)}(tx^1, 0)$, $k_{ij}^{(2)}(x^2) = \lim t^{-1} \kappa_{ij}^{(2)}(0, tx^2)$ при $t \rightarrow +0$. Тогда $k_{ij}^{(1)}$ — однородное (первой степени) отображение $K \rightarrow K$, а $k_{ij}^{(2)}$ — линейный изоморфизм $\mathbb{R}^{n-d} \rightarrow \mathbb{R}^{n-d}$. Построим расслоение $K(s)$ с базой s и слоем K , взяв отображения $(\text{Id}_{ij}, k_{ij}^{(1)}): (\mathcal{O}_i \cap \mathcal{O}_j \cap s) \times K \rightarrow (\mathcal{O}_i \cap \mathcal{O}_j \cap s) \times K$ в качестве функций перехода. Пусть $h_i: (\mathcal{O}_i \cap s) \times K \rightarrow K(s)|(\mathcal{O}_i \cap s)$ — естественная тривиализация, а $\{\sigma_i\}$ — разбиение единицы на s , $\text{supp } \sigma_i \subset \mathcal{O}_i \cap s$. Учитывая, что для точек на одной образующей конуса определены сложение и умножение на неотрицательные числа, введем отображение $\tau: s \times K \rightarrow K(s): (z, x) \mapsto \sum \sigma_i(z) h_i(z, x)$. Оно является изоморфизмом расслоений, так что расслоение $K(s)$ тривиально. На каждом слое $K_z(s)$ определим меру μ_z как образ евклидовой меры на K при отображении $\tau(z) = \tau[\{z\} \times K$. Для $z \in \mathcal{O}_i \cap \mathcal{O}_j \cap s$ через $A^{(i)}(z)$ обозначим ПДО в клине (см. начало разд. 2, $\eta = \eta_i$ и т. п.), а через $A^{(i)}(z; \zeta)$ — оператор в конусе; тогда $A^{(j)}(z; (k_{ij}^{(2)})^{-1} \zeta) = (k_{ji}^{(1)})^* A^{(i)}(z; \zeta) (k_{ij}^{(1)})^*$. Пусть l_i — линейное отображение $T_z(s) \rightarrow \mathbb{R}^{n-d}$, касательное для $\kappa_i|_s$ в точке z . Поскольку $k_{ij}^{(2)} = l_j l_i^{-1}$, формулой $A(z; \zeta) = (h_i^{-1})^* A^{(i)}(z; l_i^{-1} \zeta) h_i^*$ задан оператор в пространстве $L^2(K_z(s), \mu_z)$. Оператор $\mathfrak{A}(z; \lambda)$ (связанный с $A(z; 0)$ преобразованием Меллина) действует в пространстве $L^2(D_z(s), \nu_z)$, где $D_z(s)$ — направляющая конуса $K_z(s)$, а ν_z — мера на D_z .

В нашем примере спектр алгебры $\mathcal{A}$ параметризуется точками множества $\Xi = \Xi_0 \cup \Xi_1 \cup \Xi_2 \cup \Xi_3$; здесь Ξ_0 состоит из одной точки (тождественное

представление), $\Xi_1 = \mathbb{S}^*(s)$ (косферическое расслоение над s) перечисляет представления $\pi(z; \zeta): A \mapsto A(z; \zeta)$ в $L^2(K_z(s), \mu_z)$, $\zeta \in \mathbb{S}_z^*(s)$, $\Xi_2 = s \times \{\lambda : \operatorname{Im} \lambda = d/2\}$ отвечает представлениям $\pi(z; \lambda): A \mapsto \mathfrak{A}(z; \lambda)$ в $L^2(D_z(s), \nu_z)$, а Ξ_3 — пространство максимальных идеалов алгебры $\mathcal{A}/\operatorname{com} \mathcal{A}$.

Прототипом наших ПДО служат дифференциальные операторы на стратифицированных многообразиях из [2]; конические точки рассматривались ранее Кондратьевым, Мазьей, Пламеневским и др. (см., например, [3]). ПДО для конических точек изучались в [4]. В этом случае такие операторы и b -ПДО Мельроуза [5] по существу совпадают. Для ребер положительной размерности ПДО и b -ПДО — разные типы операторов (примерами ПДО и b -ПДО являются соответственно операторы $\Delta_y + \Delta_z$ и $\Delta_y + |y|^{-2} \Delta_z$, где Δ — лапласиан, z — переменные на ребре, а y — в нормальной к ребру плоскости). Ребра приносят для ПДО значительно больше осложнений, чем для b -ПДО. Алгебры ПДО с разрывными символами на гладких многообразиях исследовались в [6]; случаю гладких замкнутых ребер посвящена статья [7]. С другой точки зрения ПДО с особенностями обсуждались в [8].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Стейн И.* Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций. Мир, М., 1973.
2. *Мазья В. Г., Пламеневский Б. А.* Пробл. матем. анализа. Изд-во Ленингр. ун-та, Л., №6, 85–142 (1977).
3. *Назаров С. А., Пламеневский Б. А.* Эллиптические задачи в областях с кусочно гладкой границей. Наука, М., 1991.
4. *Пламеневский Б. А.* Алгебры псевдодифференциальных операторов. Наука, М., 1986.
5. *Melrose R. B.* The Atiyah–Patodi–Singer Index Theorem. Research Notes Math., Vol. 4, 1993.
6. *Пламеневский Б. А., Сеничкин В. Н.* Изв. АН СССР, сер. матем., **53**, №1, 147–177 (1989).
7. *Сеничкин В. Н.* Алгебра и анализ, **8**, №6, 105–147 (1996).
8. *Schulze B. W.* Pseudodifferential Operators on Manifolds with Singularities. North-Holland, 1991.

Санкт-Петербургский государственный университет, физический факультет

Поступило в редакцию
24 ноября 1997 г.
В переработанном виде
28 декабря 1998 г.

УДК 515.164.15

Стратификации по орбитам симплектической группы на флаговых многообразиях*

© 1999. А. С. ШМЕЛЕВ

В заметке изучаются диаграммы примыканий и локальные особенности стратификации по орбитам группы линейных симплектических преобразований $Sp(2n, \mathbb{R})$, естественно действующей на флаговых многообразиях $F(2n; n_1, \dots, n_k) = \{V^{n_1} \subset \dots \subset V^{n_k} \subset \mathbb{R}^{2n}\}$. Аналогичная задача рассматривалась в [1] в связи с изучением примыканий клеток Шуберта на многообразии полных флагов.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Орбита v_1 примыкает к орбите v_2 , если она содержится в замыкании орбиты v_2 .

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант 96-01-01104, а также INTAS-96-0713.