Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. С. Шмелев, Стратификации по орбитам симплектической группы на флаговых многообразиях, *Функц. анализ и его прил.*, 1999, том 33, выпуск 2, 91–94

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa361>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.183.62

26 апреля 2023 г., 16:49:36

представление), $\Xi_1 = \mathbb{S}^*(s)$ (косферическое расслоение над s) перечисляет представления $\pi(z; \zeta): A \mapsto A(z; \zeta)$ в $L^2(K_z(s), \mu_z)$, $\zeta \in \mathbb{S}_z^*(s)$, $\Xi_2 = s \times \{\lambda : \text{Im } \lambda = d/2\}$ отвечает представлениям $\pi(z; \lambda): A \mapsto \mathfrak{A}(z; \lambda)$ в $L^2(D_z(s), \nu_z)$, а Ξ_3 — пространство максимальных идеалов алгебры $\mathcal{A}/\text{com } \mathcal{A}$.

Прототипом наших ПДО служат дифференциальные операторы на стратифицированных многообразиях из [2]; конические точки рассматривались ранее Кондратьевым, Мазьей, Пламеневским и др. (см., например, [3]). ПДО для конических точек изучались в [4]. В этом случае такие операторы и b -ПДО Мельроуза [5] по существу совпадают. Для ребер положительной размерности ПДО и b -ПДО — разные типы операторов (примерами ПДО и b -ПДО являются соответственно операторы $\Delta_y + \Delta_z$ и $\Delta_y + |y|^{-2} \Delta_z$, где Δ — лапласиан, z — переменные на ребре, а y — в нормальной к ребру плоскости). Ребра приносят для ПДО значительно больше осложнений, чем для b -ПДО. Алгебры ПДО с разрывными символами на гладких многообразиях исследовались в [6]; случаю гладких замкнутых ребер посвящена статья [7]. С другой точки зрения ПДО с особенностями обсуждались в [8].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Стейн И.* Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций. Мир, М., 1973.
2. *Мазья В. Г., Пламеневский Б. А.* Пробл. матем. анализа. Изд-во Ленингр. ун-та, Л., №6, 85–142 (1977).
3. *Назаров С. А., Пламеневский Б. А.* Эллиптические задачи в областях с кусочно гладкой границей. Наука, М., 1991.
4. *Пламеневский Б. А.* Алгебры псевдодифференциальных операторов. Наука, М., 1986.
5. *Melrose R. B.* The Atiyah–Patodi–Singer Index Theorem. Research Notes Math., Vol. 4, 1993.
6. *Пламеневский Б. А., Сеничкин В. Н.* Изв. АН СССР, сер. матем., **53**, №1, 147–177 (1989).
7. *Сеничкин В. Н.* Алгебра и анализ, **8**, №6, 105–147 (1996).
8. *Schulze B. W.* Pseudodifferential Operators on Manifolds with Singularities. North-Holland, 1991.

Санкт-Петербургский государственный университет, физический факультет

Поступило в редакцию
24 ноября 1997 г.
В переработанном виде
28 декабря 1998 г.

УДК 515.164.15

Стратификации по орбитам симплектической группы на флаговых многообразиях*

© 1999. А. С. ШМЕЛЕВ

В заметке изучаются диаграммы примыканий и локальные особенности стратификации по орбитам группы линейных симплектических преобразований $Sp(2n, \mathbb{R})$, естественно действующей на флаговых многообразиях $F(2n; n_1, \dots, n_k) = \{V^{n_1} \subset \dots \subset V^{n_k} \subset \mathbb{R}^{2n}\}$. Аналогичная задача рассматривалась в [1] в связи с изучением примыканий клеток Шуберта на многообразии полных флагов.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Орбита v_1 примыкает к орбите v_2 , если она содержится в замыкании орбиты v_2 .

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант 96-01-01104, а также INTAS-96-0713.

Отношение примыкания есть отношение частичного порядка на множестве V всех орбит: $v_1 \leq v_2$, если v_1 примыкает к v_2 .

В случае полных флагов диаграмму примыканий орбит можно описать в терминах дуговых диаграмм [2]. Отметим на координатной прямой точки $1, \dots, 2n$, разобьем их произвольным образом на пары и соединим каждую пару точек дугой. Полученная система из n дуг называется дуговой диаграммой. Множество V_n дуговых диаграмм из n дуг состоит из $(2n - 1)!!$ элементов. Симметрическая группа S_{2n} действует на V_n переставляя концы дуг.

Для установления взаимно однозначного соответствия между множеством V $Sp(2n, \mathbb{R})$ -орбит на многообразии полных флагов и множеством V_n дуговых диаграмм рассмотрим множество W $B(2n, \mathbb{R})$ -орбит на пространстве невырожденных кососимметрических 2-форм в $\mathbb{R}^{2n}$, где $B(2n, \mathbb{R})$ есть группа линейных преобразований, сохраняющих полный флаг. Стратификации по орбитам этих двух действий устроены одинаково. В самом деле, для исследования взаимного расположения флага и симплектической формы можно фиксировать форму и приводить флаг к нормальному виду при помощи $Sp(2n, \mathbb{R})$, сохраняя эту форму, или, наоборот, фиксировать флаг и приводить форму к нормальному виду при помощи $B(2n, \mathbb{R})$, сохраняя флаг. При фиксации базиса в каждой $B(2n, \mathbb{R})$ -орбите найдется единственная форма, кососимметрическая матрица которой имеет по одной $+1$ или -1 в каждом столбце и каждой строке, причем над диагональю расположены $+1$, а под диагональю симметричные им -1 , а остальные элементы — нули [2]. Для каждой симметричной пары $+1$ и -1 соединим дугой столбцы, в которых они расположены. Это определяет биекцию между W и V_n .

На множестве дуговых диаграмм можно ввести естественное отношение частичного порядка (порядок Брюа), такое, что граф Кэли будет совпадать с диаграммой примыканий $Sp(2n, \mathbb{R})$ -орбит на многообразии полных флагов $F_{2n} = F(2n; n_1, \dots, n_k)$.

Каждой паре дуг данной дуговой диаграммы сопоставим одно из следующих чисел: 0, если эти дуги не пересекаются, 1, если они пересекаются, и 2, если одна из них накрывается другой.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Числом пересечения d_v дуговой диаграммы v называется сумма этих чисел по всем парам дуг.

Определим порядок Брюа на множестве V_n . Пусть $v_1, v_2 \in V_n$ и $v_2 = \sigma v_1$, где $\sigma \in S_{2n}$ есть некоторая транспозиция, причем для чисел пересечения выполнено неравенство $d_{v_1} > d_{v_2}$. Тогда положим $v_1 < v_2$.

Каждой $Sp(2n, \mathbb{R})$ -орбите на многообразии $F(2n; n_1, \dots, n_k)$ соответствует некоторое подмножество дуговых диаграмм. Для того чтобы описать эти подмножества, рассмотрим разбиение множества $\{1, \dots, 2n\}$ на подмножества вида

$$\{1, \dots, n_1\}, \{n_1 + 1, \dots, n_2\}, \dots, \{n_k + 1, \dots, 2n\}$$

и рассмотрим подгруппу $S_{n_1, \dots, n_k} \subset S_{2n}$ перестановок, сохраняющих эти подмножества. Она изоморфна прямому произведению $S_{n_1} \times S_{n_2 - n_1} \times \dots \times S_{2n - n_k}$. Обозначим через $V_{n_1, \dots, n_k}$ множество орбит группы $S_{n_1, \dots, n_k}$ на V_n . В случае полных флагов множество $V_{1, \dots, 2n-1}$ отождествляется с V_n .

ЛЕММА 1. В каждой $S_{n_1, \dots, n_k}$ -орбите на V_n существует единственный максимальный элемент (т. е. такой элемент v , что если $v \leq w$ для некоторого элемента w из данной орбиты, то $w = v$).

Обозначим через $v \in V_n$ единственный максимальный элемент орбиты $[v] \in V_{n_1, \dots, n_k}$. Определим на множестве $V_{n_1, \dots, n_k}$ частичный порядок: $[v_1] \leq [v_2]$, если и только если $v_1 \leq v_2$.

ТЕОРЕМА 1. *Множество V орбит группы $Sp(2n, \mathbb{R})$ на многообразии $F(2n; n_1, \dots, n_k)$ изоморфно как частично упорядоченное множество множеству $V_{n_1, \dots, n_k}$. Коразмерность $Sp(2n, \mathbb{R})$ -орбиты равна минимуму числа пересечения по всем дуговым диаграммам, входящим в соответствующую этой орбите $S_{n_1, \dots, n_k}$ -орбиту в V_n .*

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Две дуговые диаграммы называются сопряженными, если одна получается из другой перенумерацией точек в обратном порядке:

Это определяет автоморфизм $\varphi: V_n \rightarrow V_n$.

Косоортогональное дополнение определяет диффеоморфизм

$$f_{n_1, \dots, n_k}: F(2n; n_1, \dots, n_k) \rightarrow F(2n; 2n - n_k, \dots, 2n - n_1),$$

коммутирующий с действием группы $Sp(2n, \mathbb{R})$. Следовательно, автоморфизм $\varphi: V_n \rightarrow V_n$ переводит действие группы $S_{n_1, \dots, n_k}$ в действие группы $S_{2n - n_k, \dots, 2n - n_1}$ и определяет изоморфизм $\varphi_{n_1, \dots, n_k}: V_{n_1, \dots, n_k} \rightarrow V_{2n - n_k, \dots, 2n - n_1}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Орбиты, соответствующие друг другу при изоморфизме $\varphi_{n_1, \dots, n_k}$, называются сопряженными.

Теорема 1 полностью описывает диаграммы примыканий $Sp(2n, \mathbb{R})$ -орбит на $F(2n; n_1, \dots, n_k)$ для любых наборов $n_1, \dots, n_k$. Это есть ориентированный граф, получающийся из описанного выше графа Кэли факторизацией по действию подгруппы $S_{n_1, \dots, n_k} \subset S_{2n}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Орбита $[v] \in V_{n_1, \dots, n_k}$ называется неприводимой, если ни одна из диаграмм этой орбиты не содержит поддиаграмм, состоящих из l дуг, $l < n$, с концами в последовательных точках $\{n_i + 1, \dots, n_j\}$ для некоторых i и j , где $n_j - n_i = 2l$, для которых не существует дуги с концами в точках a и b , где $a \leq n_i$, $b \geq n_j + 1$ (считаем, что $n_0 = 0$, $n_{k+1} = 2n$).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Элементарной орбитой назовем множество V_l всех дуговых диаграмм, т. е. орбиту действия всей группы S_{2l} на V_l .

Элементарная орбита, очевидно, является неприводимой. Максимальная дуговая диаграмма элементарной орбиты есть объединение l дуг, каждая из которых соединяет пару соседних точек.

На множестве орбит можно определить операцию объединения. Пусть $[v_1] \in V_{n_1, \dots, n_k}$, $[v_2] \in V_{m_1, \dots, m_s}$. Тогда $[v_1][v_2] = [v_1 \cup v_2] \in V_{n_1, \dots, n_k, 2n, 2n + m_1, \dots, 2n + m_s}$, где $V_{n_1, \dots, n_k}$ — множество орбит на V_n , $V_{m_1, \dots, m_s}$ — множество орбит на V_m , а $v_1 \cup v_2$ — дуговая диаграмма, полученная соединением правого конца диаграммы v_1 с левым концом диаграммы v_2 . При этом $[v_1][v_2] \neq [v_2][v_1]$, и каждая орбита, очевидно, однозначно разлагается в объединение неприводимых орбит.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7. Две орбиты называются эквивалентными, если в их разложениях в объединение неприводимых орбит орбиты одного разложения взаимно однозначно соответствуют орбитам другого разложения, кроме, быть может, некоторого числа элементарных орбит, причем соответствующие друг другу неприводимые орбиты либо совпадают, либо сопряжены.

Например, орбиты $[v_1][v_2]$ и $[v_2][v_1]$ эквивалентны.

ТЕОРЕМА 2. *В окрестности двух точек*

$$x \in F(2n; n_1, \dots, n_k), \quad y \in F(2m; m_1, \dots, m_s),$$

принадлежащих Sp -орбитам симплектической группы, которым соответствуют эквивалентные орбиты $[v_1] \in V_{n_1, \dots, n_k}$, $[v_2] \in V_{m_1, \dots, m_s}$, стратификации по орбитам стабильно диффеоморфны, причем эта локальная стратификация стабильно диффеоморфна прямому произведению стратификаций по орбитам в окрестностях орбит, соответствующих неприводимым орбитам в разложении орбиты $[v_1]$.

Теорема 2 вытекает из следующих лемм (для простоты будем обозначать Sp -орбиту в $F(2n; n_1, \dots, n_k)$, соответствующую орбите $[v] \in V_{n_1, \dots, n_k}$, также через $[v]$).

ЛЕММА 2. *В окрестностях точек орбит, соответствующих взаимно сопряженным орбитам, стратификации по орбитам диффеоморфны.*

ЛЕММА 3. *Стратификация по орбитам в окрестности точки орбиты $[v_1][v_2]$ стабильно диффеоморфна прямому произведению стратификаций по орбитам в окрестностях точек орбит $[v_1]$ и $[v_2]$.*

ЛЕММА 4. *Пусть $[w]$ — элементарная орбита. Тогда стратификация по орбитам в окрестности точки орбиты $[v][w]$ стабильно диффеоморфна стратификации по орбитам в окрестности точки орбиты $[v]$.*

СЛЕДСТВИЕ. *Существует лишь конечное число недиффеоморфных между собой, с точностью до умножения на линейное пространство, локальных особенностей стратификаций по орбитам вблизи точек орбит данной размерности k .*

ЗАМЕЧАНИЕ. Локальные особенности стратификаций по орбитам на многообразиях полных флагов F_{2n} устроены как некоторые объединения координатных плоскостей в линейном пространстве [2]. Это не так в случае неполных флагов. Действительно, на многообразии $F(8; 4) = Gr_4(\mathbb{R}^8)$ имеем три орбиты: $v_1 = \Lambda(4)$ — орбита коразмерности 6, состоящая из лагранжевых подпространств, v_2 — орбита коразмерности 1, состоящая из 4-мерных подпространств с ограничением симплектической формы, имеющим ранг 2, v_3 — орбита коразмерности 0, состоящая из 4-мерных симплектических подпространств. Трансверсаль к орбите v_1 можно отождествить с пространством кососимметрических 2-форм $\Lambda^2(\mathbb{R}^4)$. Замыкание орбиты v_2 в окрестности v_1 стабильно диффеоморфно конусу сигнатуры $(+, +, +, -, -, -)$ (подпространство вырожденных 2-форм).

ЛИТЕРАТУРА

1. Казарян М. Э. УМН, **46**, № 5, 79–120 (1991).
2. Шмелев А. С. Изв. РАН, сер. матем., **58**, № 1, 144–166 (1994).

Математический колледж
Независимого московского университета

Поступило в редакцию
18 сентября 1997 г.
В переработанном виде
18 декабря 1998 г.