Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. Звонкин, С. К. Ландо, О кратностях отображения Ляшко–Лойенги на стратах дискриминанта, *Функц. анализ и его прил.*, 1999, том 33, выпуск 3, 21–34

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa363>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.166.219.16

26 апреля 2023 г., 14:02:43

УДК 515.16+519.1

О кратностях отображения Ляшко–Лойенги на стратах дискриминанта*

© 1999. Д. Звонкин, С. К. Ландо

§ 1. Введение

1.1. Отображение Ляшко–Лойенги. Пусть M — (комплексное) многообразие и $F: M \rightarrow \mathbb{CP}^1$ — аналитическая функция. Предположим, что множество критических точек функции F конечно и кратность каждой критической точки тоже конечна. Последнее требование означает, что всякая функция $F_1: M \rightarrow \mathbb{CP}^1$, близкая к F , также имеет конечный набор критических точек. Тогда *отображение Ляшко–Лойенги* (ниже — отображение ЛЛ в тексте и LL в формулах) сопоставляет функции F унимодальный (т.е. со старшим коэффициентом 1) многочлен от одной переменной t , корнями которого являются конечные критические значения функции F :

$$\text{LL}: F \mapsto (t - t_1)^{l_1} \cdots (t - t_k)^{l_k},$$

причем кратность каждого корня равна сумме кратностей всех его прообразов.

Мы будем рассматривать отображение ЛЛ в первую очередь для случая, когда F является многочленом или семейством многочленов от одной переменной. Отображение ЛЛ переводит многочлен P степени $n+1$ в многочлен степени n , так как число критических значений многочлена P (с учетом кратностей) равно числу корней его производной, т.е. равно n .

Основная цель настоящей статьи состоит в изучении отображения ЛЛ на пространстве $\mathcal{P}$ многочленов

$$P(x) = x^{n+1} + p_2 x^{n-1} + \cdots + p_{n+1}. \quad (1)$$

Это семейство представляет собой версальную деформацию особенности серии A_n (см. [8]). На него можно также смотреть как на семейство рациональных отображений $P: \mathbb{CP}^1 \rightarrow \mathbb{CP}^1$ с единственным полюсом порядка $n+1$, рассматриваемых с точностью до дробно-линейных преобразований координаты в прообразе. Действительно, любое такое отображение можно привести к виду (1).

Отображение ЛЛ сопоставляет многочлену вида (1) унимодальный многочлен

$$D(t) = t^n + d_1 t^{n-1} + \cdots + d_n, \quad (2)$$

корнями которого являются критические значения многочлена P . Таким образом, отображение ЛЛ можно рассматривать как отображение из пространства

*Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 95-01-008 46а), проекта русско-французского сотрудничества PECO/CEI-5376 и INTAS (проект 4373).

$\mathcal{P} \cong \mathbb{C}^n$ с координатами $p_2, \dots, p_{n+1}$, состоящего из многочленов P , в пространство $\mathcal{D} \cong \mathbb{C}^n$ с координатами $d_1, \dots, d_n$, состоящее из многочленов D .

1.2. Дискриминант и стратификация пространства многочленов. Отображение ЛЛ полиномиально и *конечно* (см. [1, 8]), т.е. число прообразов произвольной точки в образе конечно. *Кратность*, т.е. число прообразов общей точки $D \in \mathcal{D}$, отображения ЛЛ равна $(n+1)^{n-1}$.

Необщая точка имеет меньше прообразов, чем общая. Все прообразы необщих точек образуют *дискриминант* $\Sigma \subset \mathcal{P}$ отображения ЛЛ в пространстве-прообразе $\mathcal{P}$. Дискриминант состоит из многочленов с кратными критическими значениями. Такие многочлены образуют гиперповерхность в пространстве $\mathcal{P}$. Пространство многочленов $\mathcal{P}$ допускает естественную стратификацию, которая будет описана ниже. В этой стратификации дискриминант является объединением всех стратов, коразмерность которых не меньше 1, а дополнение к нему, состоящее из точек общего положения, — единственным стратом коразмерности 0.

В [8] доказано, что в дополнении к дискриминанту отображение ЛЛ невырожденно. Обобщая это утверждение, мы доказываем, что и ограничение ЛЛ на каждый страт дискриминанта также оказывается невырожденным отображением.

Сопоставим каждому критическому значению $t = \bar{t}$ многочлена P следующее разбиение кратности его вырождения. Предположим, что уравнение $P(x) = \bar{t}$ имеет k_0 простых корней, k_1 корней кратности 2, $\dots$, k_n корней кратности $n+1$. *Разбиение, ассоциированное с критическим значением $\bar{t}$* , — это разбиение $X(\bar{t}) = 1^{k_1} 2^{k_2} \dots n^{k_n}$, где k_i — число вхождений числа i . Другими словами, критическое значение $\bar{t}$ достигается в k_1 простых критических точках, $\dots$, k_n критических точках кратности n . Если, например, $\bar{t}$ — общее критическое значение ($\bar{t}$ достигается в единственной критической точке, и ее кратность равна единице), то $X(\bar{t}) = 1^1$. *Вырожденность* значения $\bar{t}$ равна

$$A(X(\bar{t})) = 1 \cdot k_1 + 2 \cdot k_2 + \dots + n \cdot k_n.$$

Группа автоморфизмов $\text{Aut}(X)$ разбиения $X = 1^{k_1} \dots n^{k_n}$ состоит из перестановок частей этого разбиения, сохраняющих их величину. Она содержит

$$\#\text{Aut}(X) = k_1! \dots k_n!$$

элементов.

Конечный (неупорядоченный) набор разбиений, соответствующих всем критическим значениям многочлена P , мы называем, следуя [7], *паспортом* этого многочлена. Паспорт общего многочлена состоит из n копий разбиения 1^1 . Из формулы Римана–Гурвица вытекает, что если набор разбиений $\mathbf{X} = \{X_1, \dots, X_c\}$ является паспортом некоторого многочлена, то $A(X_1) + \dots + A(X_c) = n$. Можно показать (см., например, [9]), что верно и обратное.

Группа автоморфизмов $\text{Aut}(\mathbf{X})$ паспорта $\mathbf{X} = \{X_1, \dots, X_c\}$ состоит из всех перестановок σ разбиений X_i , сохраняющих их тип (т.е. таких, что разбиение $\sigma(X_i)$ совпадает с X_i для всех $i = 1, \dots, c$). Число элементов этой группы будет обозначаться через $\#\text{Aut}(\mathbf{X})$.

С каждым набором $\mathbf{X} = \{X_1, \dots, X_c\}$ разбиений мы связываем *страт* $\Sigma_{\mathbf{X}} \subset \mathcal{P}$. Этот страт состоит из всех многочленов, паспорт которых совпадает с $\mathbf{X}$. Каждый страт является цилиндром с одномерной образующей: изменение свободного члена не меняет паспорта многочлена. Множество общих многочленов пространства $\mathcal{P}$ — это «несобственный страт».

1.3. Формулировка основной теоремы. Сопоставим каждому паспорту $\mathbf{X} = \{X_1, \dots, X_c\}$ разбиение

$$T = T(\mathbf{X}) = (A(X_1), \dots, A(X_c)) = 1^{m_1} \dots n^{m_n}$$

числа n , где $m_i = \#\{X_j \in \mathbf{X}, A(X_j) = i\}$, т.е. разбиение, определяемое вырожденностями всех критических значений. Группа автоморфизмов такого разбиения состоит из

$$\#\text{Aut}(T) = m_1! \dots m_n!$$

элементов.

ТЕОРЕМА 1.1. *Кратность $\mu_{\mathbf{X}}$ ограничения отображения ЛЛ на страт $\Sigma_{\mathbf{X}}$, определенный паспортом $\mathbf{X} = \{X_1, \dots, X_c\}$, выражается формулой*

$$\mu_{\mathbf{X}} = (n+1)^{c-1} \frac{\#\text{Aut}(T(\mathbf{X}))}{\#\text{Aut}(\mathbf{X}) \prod_{i=1}^c \#\text{Aut}(X_i)} \cdot \prod_{i=1}^c \frac{(n - A(X_i))!}{s(X_i)!},$$

где $s(X_i)$ — число некритических прообразов у критического значения с разбиением X_i .

Заметим, что число $s(X)$ определяется по разбиению X равенством

$$s(X) = n + 1 - A(X) - l(X),$$

где $l(X)$ — число элементов в разбиении $X = 1^{k_1} \dots n^{k_n}$, т.е. $l(X) = k_1 + \dots + k_n$.

Паспорт общего многочлена состоит из n копий разбиения 1^1 , и теорема дает для кратности отображения ЛЛ в общей точке значение $\mu(\text{LL}) = (n+1)^{n-1}$.

1.4. История вопроса. Отображение Ляшко–Лойенги введено Ляшко в 1973 г. (не опубликовано) и, независимо, Лойенгой в [8]. Они доказали, что для некоторых семейств функций оно представляет собой разветвленное конечнократное накрытие, и вычислили его кратность для так называемых версальных деформаций простых особенностей (формулировка основной теоремы Ляшко, совпадающей с основной теоремой Лойенги, приведена в [2]). Кроме того, Лойенга установил соответствие между общими полиномиальными накрытиями комплексной сферы и деревьями с нумерованными ребрами, получив тем самым новое доказательство теоремы Кэли о перечислении деревьев.

Развивая их метод, Арнольд в [1] предложил способ перечисления некоторых классов графов, ассоциированных с рациональными, а не полиномиальными накрытиями комплексной сферы. Близкие перечислительные формулы появляются в другом контексте в статьях Гульдена и Джексона [5, 6]. Д. Звонкин показал в [10], что формулы из [6] можно интерпретировать как выражения для кратностей отображения Ляшко–Лойенги, ограниченного на страты дискриминанта в пространстве полиномиальных накрытий. Приводимое ниже доказательство теоремы 1.1 дает независимый вывод формул Гульдена–Джексона, основанный на идеях Ляшко, Лойенги и Арнольда.

Статья имеет следующую структуру. В разд. 2 мы даем краткое описание связи между кратностями ограничений отображения Ляшко–Лойенги на страты и перечислением кактусов и наборов перестановок, обладающих определенными свойствами. Раздел 3 посвящен вычислению кратности отображения ЛЛ на некоторых специальных стратах с помощью техники квазиоднородных отображений. Раздел 4 содержит доказательство основной теоремы, базирующееся на изучении геометрии стратов. Здесь мы поднимаем отображение ЛЛ на пространство упорядоченных наборов критических точек многочленов и доказываем невырожденность ограничения поднятого отображения на «стандартные» плоскости. Последнее утверждение является обобщением утверждения о невырожденности отображения ЛЛ в дополнении к дискриминанту на произвольные страты.

Работа выполнена во время пребывания второго автора во Франции по приглашению Лаборатории по исследованиям в области информатики, Университет Бордо I, Бордо, в мае–июне 1997 г. Авторы благодарны В. И. Арнольду за формулировку задачи и участникам семинаров Арнольда в Москве и Париже за полезные обсуждения. Особую благодарность мы хотели бы принести А. Г. Хованскому, беседы с которым привели к существенному прояснению доказательств, А. Димке за помощь в доказательстве леммы 4.4, а также В. Грюнову, А. К. Звонкину, Д. Панову и Б. Шапиро.

§2. Кратности, кактусы и перестановки

Задачи классификации конечных разветвленных накрытий комплексной сферы обычно можно свести к чисто комбинаторным задачам о перечислении вложенных графов; принципы такого сведения хорошо известны. Ниже мы приводим краткое описание подобного сведения для случая вырожденных полиномиальных накрытий. При этом устанавливается соответствие (введенное впервые в [9]) между такими накрытиями и графами специального вида, называемыми кактусами, а также наборами перестановок, удовлетворяющими определенным условиям. Более подробное изложение можно найти в [4].

Все вложения графов в плоскость рассматриваются, как и обычно, с точностью до плоской изотопии.

2.1. Кактус многочлена. Рассмотрим многочлен $P: \mathbb{CP}^1 \rightarrow \mathbb{CP}^1$ вида (1) с критическими значениями $t_1, \dots, t_c$. Выберем произвольное некритическое значение $t_0 \in \mathbb{C}$. Соединим точку t_0 со всеми критическими значениями гладкими непересекающимися и несамопересекающимися отрезками кривых таким образом, чтобы циклический порядок отрезков, задаваемый вращением против часовой стрелки в точке t_0 , совпадал с циклическим порядком, определяемым нумерацией критических значений. Полученная в результате картинка называется *c-звездой на множестве $t_1, \dots, t_c$* . Вершины $t_1, \dots, t_c$ звезды будут называться *черными*, а вершина t_0 — *белой*.

Прообраз звезды при отображении P представляет собой граф, вложенный в исходную сферу $\mathbb{CP}^1$; вершинами этого графа являются прообразы точек t_i ($0 \leq i \leq c$), а ребрами — прообразы лучей звезды. Прообразы точки t_0 являются белыми вершинами графа, а прообразы остальных точек t_i — его черными вершинами; прообразы точки t_i помечены номером i . Этот граф составлен из $n + 1$ звезд, склеенных некоторым образом по черным вершинам. Можно доказать, что полученный граф всегда является деревом.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. *c -кактусом* называется плоское дерево с вершинами, окрашенными в черный и белый цвета, полученное склейкой нескольких c -звезд по черным вершинам с одинаковыми метками.

Таким образом, многочлен P определяет некоторый кактус. Обратное утверждение составляет заключение следующей теоремы.

ТЕОРЕМА 2.2. *Рассмотрим c точек $t_1, \dots, t_c \in \mathbb{C}$, c -звезду на этих точках и c -кактус, склеенный из $n+1$ звезд. Тогда существует многочлен P степени $n+1$, единственный с точностью до линейной замены переменной $P(x) \mapsto P(ax+b)$ ($a, b \in \mathbb{C}, a \neq 0$), такой, что $t_1, \dots, t_c$ являются его критическими значениями и прообраз рассматриваемой звезды относительно отображения P изотопен исходному кактусу.*

Эта теорема является непосредственным следствием из теоремы существования Римана. Число различных многочленов, отвечающих данному кактусу, равно числу $n+1$, поделенному на число автоморфизмов кактуса. Последнее утверждение вытекает из того, что если многочлен P имеет вид (1), то единственными многочленами вида (1), которые можно получить из P преобразованиями вида $P(x) \mapsto P(ax+b)$, являются многочлены $P_i = P(\varepsilon^i x)$, $i = 0, \dots, n$, где ε есть корень из единицы степени $n+1$.

Для $1 \leq i \leq c$ набор валентностей, уменьшенных на единицу, черных вершин кактуса, помеченных меткой i , представляет собой разбиение. Упорядоченный список таких разбиений называется *паспортом кактуса*. Паспорт многочлена, реализующего данный кактус, получается из паспорта кактуса забыванием порядка разбиений.

В качестве следствия из теоремы 2.2 мы получаем следующее утверждение, доказанное впервые в [6].

СЛЕДСТВИЕ 2.3. *Число различных кактусов с выделенной звездой, имеющих паспорт $\mathbf{X} = [X_1, \dots, X_c]$, равно*

$$(n+1)^{c-1} \frac{1}{\prod_{i=1}^c \#\text{Aut}(X_i)} \prod_{i=1}^c \frac{(n - A(X_i))!}{s(X_i)!}.$$

Валентности всех черных вершин кактуса, отвечающего морсовскому многочлену P , равны 1 или 2. В этом случае перечисление кактусов сводится к перечислению деревьев с нумерованными ребрами (см. [8, 1]).

2.2. Перестановки, связанные с кактусами. Рассмотрим кактус с *выделенной звездой* и предположим, что его белые вершины занумерованы от 1 до $n+1$. Пусть P — многочлен, реализующий данный кактус; рассмотрим звезду на его критических значениях $t_1, \dots, t_c$.

Рассмотрим на сфере-образе замкнутый путь, который начинается в некритическом значении $t_0 \in \mathbb{CP}^1$, проходит вдоль i -го луча звезды, затем обходит i -е критическое значение t_i по маленькой окружности в положительном направлении и возвращается назад в t_0 вдоль того же луча. Такой путь задает перестановку σ_i на множестве белых вершин кактуса, состоящем из $n+1$ элементов.

Эта перестановка определяется следующим образом. Возьмем одну из белых вершин. Она лежит в прообразе некритического значения t_0 . При движении точки вдоль выбранного пути в сфере-образе выбранный прообраз движется

непрерывно в сфере-прообразе, переходя в конце пути снова в белую вершину (отличную, вообще говоря, от исходной). Номер новой белой вершины является образом номера исходной при отображении σ_i . Это отображение является на самом деле перестановкой, так как оно обратимо.

Перестановку σ_i можно также описать как «поворот в кактусе вокруг черных вершин с меткой i »: она осуществляет циклическую перестановку белых вершин, соединенных с i -й черной вершиной, в соответствии с имеющимся на них циклическим порядком. В частности, перестановка σ_i зависит только от кактуса (и от нумерации его белых вершин), но не от реализующего этот кактус многочлена.

Набор уменьшенных на единицу длин циклов перестановки σ_i задает разбиение — *тип* перестановки. Из предыдущего замечания следует, что список таких разбиений для $1 \leq i \leq c$ совпадает с паспортом кактуса.

Произведение $\sigma_c \circ \dots \circ \sigma_1$ перестановок σ_i , записанных в указанном порядке, является циклической перестановкой. Действительно, этому произведению соответствует путь в сфере-образе, обходящий вокруг всех критических значений; другими словами, это путь вокруг точки ветвления на бесконечности. На бесконечности многочлен P имеет точку ветвления порядка $n + 1$, и поэтому соответствующая перестановка представляет собой просто циклическую перестановку.

Для определенности будем считать, что белая вершина выделенной звезды помечена числом 1 и что перестановка $\sigma_c \circ \dots \circ \sigma_1$ представляет собой цикл $(1, \dots, n + 1)$.

Тогда справедлива следующая теорема (см. [6]).

ТЕОРЕМА 2.4. *Существует естественное взаимно однозначное соответствие между множеством c -кактусов с выделенной звездой, склеенных из $n + 1$ звезд и имеющих паспорт $[X_1, \dots, X_c]$, и множеством наборов из c перестановок $\sigma_1, \dots, \sigma_c$ на множестве из $n + 1$ элементов, таких, что тип перестановки σ_i совпадает с X_i для всех i и $\sigma_c \circ \dots \circ \sigma_1 = (1, \dots, n + 1)$.*

Таким образом, перечисление кактусов эквивалентно перечислению наборов из c перестановок, удовлетворяющих предположениям этой теоремы.

§3. Квазиоднородные отображения

3.1. Квазиоднородная теорема Безу. Понятие квазиоднородного отображения обобщает понятие однородного отображения. Пусть $x_1, \dots, x_n$ — координаты в $\mathbb{C}^n$; предположим, что каждой координате x_i сопоставлено натуральное число $w(x_i) = w_i$, ее вес.

Функция $f: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ называется *квазиоднородной* веса $W \in \mathbb{N}$ (относительно набора весов w_i), если для любого $\lambda \in \mathbb{C}$

$$f(\lambda^{w_1} x_1, \dots, \lambda^{w_n} x_n) = \lambda^W f(x_1, \dots, x_n).$$

Основным примером квазиоднородной функции служит одночлен. Вес одночлена $x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$ равен $\alpha_1 w_1 + \dots + \alpha_n w_n$. Сумма одночленов веса W представляет собой многочлен веса W .

В качестве простой иллюстрации к понятию квазиоднородной функции опишем отображение ЛЛ на семействе (1) явной формулой. Дискриминант многочлена $P = P(x) \in \mathcal{P}$ (т.е. произведение $\prod_{i \neq j} (x_i - x_j)$ попарных разностей его

корней) является многочленом от его коэффициентов $p_2, \dots, p_{n+1}$. Пусть t — параметр. Рассмотрим дискриминант многочлена $P(x) - t$ как многочлен от t , коэффициенты которого зависят от параметров $p_2, \dots, p_n$.

ЛЕММА 3.1. *Отображение ЛЛ переводит многочлен $P = P(x)$, с точностью до постоянного множителя, в дискриминант многочлена $P(x) - t$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Значение $t = \bar{t}$ является корнем дискриминанта многочлена $P(x) - t$ тогда и только тогда, когда у многочлена $P(x) - \bar{t}$ есть кратные корни, т.е. $\bar{t}$ является критическим значением многочлена P . Общий многочлен семейства (1) имеет n различных критических значений; поэтому степень по t дискриминанта многочлена $P(x) - t$ не меньше n . Положим вес переменной x равным 1. Тогда, если положить $w(p_i) = i$, многочлен P будет квазиоднородным веса $n + 1$. Чтобы многочлен $P(x) - t$ также был квазиоднородным, необходимо положить $w(t) = n + 1$. Вес дискриминанта равен $n(n + 1)$, так как дискриминант представляет собой произведение $n(n + 1)$ членов веса 1. С другой стороны, вес одночлена t^n равен $n(n + 1)$; поэтому вес коэффициента при t^n в дискриминанте должен равняться нулю, т.е. это постоянная. Лемма доказана.

Предположим, что i -я компонента f_i отображения $F = (f_1, \dots, f_n): \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ является многочленом веса W_i и отображение F конечно. Известно, что квазиоднородное отображение конечно тогда и только тогда, когда единственным прообразом начала координат является начало координат (см., например, [3]).

Следующая теорема обобщает теорему Безу.

ТЕОРЕМА 3.2 (см. [3]). *Кратность конечного квазиоднородного отображения F дается формулой*

$$\mu(F) = \frac{W_1 \cdots W_n}{w_1 \cdots w_n}.$$

Из леммы 3.1 вытекает, что отображение $\text{LL}: \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{D}$ полиномиально и конечно. Если положить $w(d_i) = i(n + 1)$, то оно становится квазиоднородным. Теорема Безу позволяет теперь легко вычислить его кратность в общей точке:

$$\mu(\text{LL}) = \frac{w(d_1) \cdots w(d_n)}{w(p_2) \cdots w(p_{n+1})} = \frac{1(n + 1) \cdots n(n + 1)}{2 \cdots (n + 1)} = (n + 1)^{n-1}.$$

3.2. Примитивные страты. Мы хотим вычислить кратность ограничения отображения ЛЛ на страт, в котором все критические значения, кроме одного, невырождены. Такие страты называются *примитивными*. Простейшим случаем примитивного страта является *страт Максвелла*. Он соответствует случаю двух различных критических точек с общим критическим значением. Паспорт $\mathbf{X}$ страта Максвелла состоит из $n - 1$ разбиений, $\mathbf{X} = \{X_1, \dots, X_{n-1}\}$, где $X_1 = 1^2$, а все остальные разбиения морсовские, $X_i = 1^1$, $i = 2, \dots, n - 1$.

Общий многочлен в страте Максвелла имеет вид

$$P(x) = (x^2 + p_1x + p_2)^2(x^{n-3} + p'_1x^{n-2} + \cdots + p'_{n-3}) + p_{n+1},$$

где $p'_1 + 2p_1 = 0$. Положив веса координат в прообразе равными

$$w(p_i) = i, \quad i = 1, 2, n + 1, \quad w(p'_i) = i, \quad i = 1, \dots, n - 3,$$

мы получим, что полный вес координат в прообразе равен

$$2(n + 1)(n - 3)!.$$

С другой стороны, $T(\mathbf{X}) = 1^{n-2}2^1$ и общий многочлен в образе имеет вид

$$D(t) = (t - t_1)^2 D_1(t),$$

где $t_1 = p_{n+1}$ — кратное критическое значение и

$$D_1(t) = t^{n-2} + d_1 t^{n-1} + d_2 t^{n-2} + \dots + d_{n-2}$$

есть многочлен степени $n - 2$. Это представление диктует следующий выбор весов координат в образе: $w(t_1) = n + 1$, $w(d_i) = i(n + 1)$, $i = 1, \dots, n - 2$, и полный вес координат в образе равен $(n - 2)!(n + 1)^{n-1}$.

Теперь мы можем непосредственно вычислить кратность ограничения отображения ЛЛ на страт Максвелла:

$$\mu = \frac{(n - 2)!(n + 1)^{n-1}}{2(n + 1)(n - 3)!} = \frac{(n - 2)(n + 1)^{n-2}}{2},$$

что совпадает с вычислениями Арнольда [1].

Предыдущее вычисление легко обобщается на произвольный примитивный страт. А именно, предположим, что разбиение, отвечающее первому критическому значению, имеет вид $X_1 = 1^{k_1} \dots n^{k_n}$ и все остальные критические значения морсовские, $X_j = 1^1$, $j = 2, \dots, c$. Тогда $c = n + 1 - A(X_1)$. Общий многочлен с вырожденным критическим уровнем p_{n+1} указанного типа можно представить в виде

$$P(x) = P_0(x)P_1^2(x) \dots P_n^{n+1}(x) + p_{n+1},$$

где $P_i(x) = x^{k_i} + p_{i,1}x^{k_i-1} + \dots + p_{i,k_i}$ есть многочлен степени k_i , $k_0 = s(X_1)$ — число простых корней многочлена P , $k_0 + 2k_1 + \dots + (n + 1)k_n = n + 1$ и $p_{0,1} + 2p_{1,1} + \dots + (n + 1)p_{n,1} = 0$. Другими словами, мы параметризовали замыкание примитивного страта пространством коэффициентов p_{ij} многочленов $P_0, \dots, P_n$.

При выборе весов $w(p_{i,j}) = j$, $w(p_{n+1}) = n + 1$ полный вес координат в прообразе равен

$$(n + 1)s(X_1)!k_1! \dots k_n! = (n + 1)\#\text{Aut}(X_1)s(X_1)!.$$

С другой стороны, $T(\mathbf{X}) = 1^{n-A(X_1)}A(X_1)^1$ и общий многочлен в образе имеет вид

$$D(t) = (t - t_1)^{A(X_1)}D_1(t),$$

где $t_1 = p_{n+1}$ — кратное критическое значение и D_1 — общий многочлен степени $n - A(X_1)$. Поэтому полный вес координат в образе равен

$$(n + 1)^c(n - A(X_1))!,$$

и кратность принимает вид

$$\mu_{\mathbf{X}}(LL) = (n + 1)^{c-1} \frac{1}{\#\text{Aut}(X_1)} \cdot \frac{(n - A(X_1))!}{s(X_1)!}.$$

Отметим, что эта формула полностью согласуется с предсказанием основной теоремы, так как для примитивного страта $\#\text{Aut}(\mathbf{X}) = \#\text{Aut}(T(\mathbf{X})) = (n - A(X_1))!$, $\#\text{Aut}(X_i) = 1$ при $i = 2, \dots, c$ и для невырожденного разбиения $X_i = 1^1$ имеем $A(X_i) = s(X_i) = n - 1$.

Ниже мы воспользуемся этим результатом для доказательства основной теоремы в общем случае.

§ 4. Доказательство основной теоремы

4.1. Вспомогательные отображения. Для доказательства теоремы 1.1 мы заменяем отображение ЛЛ его аналогом, который сопоставляет (упорядоченному) набору критических точек многочлена (упорядоченный) набор его критических значений. А именно, рассмотрим коммутативный квадрат

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{P} & \xrightarrow{\text{LL}} & \mathcal{Q} \\ \alpha \uparrow & & \uparrow \tau \\ \widehat{\mathcal{P}} & \xrightarrow{\widehat{\text{LL}}} & \widehat{\mathcal{Q}} \end{array} \quad (3)$$

Здесь через $\widehat{\mathcal{P}}$ обозначено пространство $\mathbb{C}^n$, отождествляемое с прямым произведением $\mathbb{C}^{n-1} \times \mathbb{C}^1$, в котором первый сомножитель — это гиперплоскость

$$a_1 + \dots + a_n = 0 \quad (4)$$

в n -мерном пространстве упорядоченных наборов критических точек многочленов P , а второй сомножитель — прямая корней степени $n+1$ из свободного члена p_{n+1} многочлена P . Соответственно отображение α задается формулой

$$\alpha: (a_1, \dots, a_n; a) \mapsto (n+1) \int_0^x (\xi - a_1) \cdots (\xi - a_n) d\xi + a^{n+1}. \quad (5)$$

Пространство $\widehat{\mathcal{Q}}$ — это пространство упорядоченных наборов критических значений многочленов P . Отображение τ есть не что иное, как отображение Виета

$$\tau: (t_1, \dots, t_n) \mapsto (t - t_1) \cdots (t - t_n), \quad (6)$$

сопоставляющее набору чисел унимодальный многочлен, корнями которого являются указанные числа.

Отображение $\widehat{\text{LL}}$ сопоставляет точке $A = (a_1, \dots, a_n; a) \in \widehat{\mathcal{P}}$ точку $(t_1, \dots, t_n) \in \widehat{\mathcal{Q}}$, где $t_i = P(a_i)$ — значение многочлена $P = \alpha(A)$ в точке a_i . Очевидно, что отображения α , τ и $\widehat{\text{LL}}$ полиномиальны.

ЛЕММА 4.1. *Отображения α , τ и LL квазиоднородны и конечнократны. Отображение $\widehat{\text{LL}}$ однородно по координатной степени $n+1$ и конечнократно.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (Квази)однородность рассматриваемых отображений означает следующее. Рассмотрим действие группы $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ по умножению на пространстве $\widehat{\mathcal{P}}$ растяжениями, $\lambda: (a_1, \dots, a_n; a) \mapsto (\lambda a_1, \dots, \lambda a_n; \lambda a)$, $\lambda \in \mathbb{C}^*$. Это действие индуцирует действие группы $\mathbb{C}^*$ на пространствах $\mathcal{P}$, $\widehat{\mathcal{Q}}$, $\mathcal{Q}$, перестановочное с отображениями квадрата (3). В частности, на пространстве $\widehat{\mathcal{Q}}$ соответствующее действие задается растяжением $\lambda: (t_1, \dots, t_n) \mapsto (\lambda^{n+1} t_1, \dots, \lambda^{n+1} t_n)$, так как при растяжении критических точек многочлена в λ , а его свободного члена в λ^{n+1} раз критические значения растягиваются в λ^{n+1} раз.

Конечнократность отображений следует из того, что для каждого из них прообраз начала координат состоит только из начала координат.

4.2. Вычисление кратностей. Стратификация пространства $\mathcal{P}$, описанная в разд. 1.2, индуцирует стратификацию остальных пространств в вершинах квадрата (3). Для вычисления кратностей отображения ЛЛ на стратах дискриминанта нам достаточно вычислить кратности ограничений на соответствующие страты отображений α , $\widehat{\text{LL}}$ и τ .

Опишем сначала индуцированные стратификации.

Страты пространства $\mathcal{D}$ нумеруются разбиениями $T = 1^{m_1} \dots n^{m_n}$ числа n , $n = 1 \cdot m_1 + \dots + n \cdot m_n$. Страт $\Delta_T \subset \mathcal{D}$ состоит из многочленов, имеющих m_1 корней кратности 1, $\dots$, m_n корней кратности n .

Зафиксируем для разбиения T числа n разбиение множества индексов $\{1, \dots, n\}$ на непересекающиеся подмножества, такое, что в нем ровно m_1 подмножеств из одного элемента, $\dots$, m_n подмножеств из n элементов. Сопоставим такому разбиению страт $\widehat{\Delta}_T \subset \widehat{\mathcal{D}}$ пространства $\widehat{\mathcal{D}}$, который состоит из всех точек $(t_1, \dots, t_n) \in \widehat{\mathcal{D}}$, таких, что $t_i = t_j$ тогда и только тогда, когда индексы i и j принадлежат одному подмножеству разбиения. (Чтобы упростить обозначение страта, мы опускаем в нем указание на выбранное разбиение множества индексов.)

Аналогично, зафиксируем для паспорта $\mathbf{X} = \{X_1, \dots, X_c\}$ разбиение $\mathbf{I} = \{I_1, \dots, I_c\}$ множества индексов $\{1, \dots, n\}$ на c наборов $I_1, \dots, I_c$ попарно непересекающихся подмножеств, такое, что i -й набор I_i этого разбиения содержит в точности k_{i1} подмножеств из одного элемента, $\dots$, k_{in} подмножеств из n элементов, где $X_i = 1^{k_{i1}} \dots n^{k_{in}}$. Страт $\widehat{\Sigma}_{\mathbf{I}} \subset \widehat{\mathcal{P}}$ состоит из всех точек $A = (a_1, \dots, a_n; a) \in \widehat{\mathcal{P}}$, таких, что $a_i = a_j$ тогда и только тогда, когда индексы i и j принадлежат одному подмножеству разбиения, и значения многочлена $\alpha(A)$ в точках a_i и a_j совпадают тогда и только тогда, когда индексы i и j принадлежат множествам одного набора разбиения.

По разбиению $\mathbf{I}$ множества индексов для паспорта $\mathbf{X}$ однозначно строится *согласованное* с ним разбиение множества индексов $T(\mathbf{I})$: оно получается объединением всех множеств индексов внутри каждого набора.

Ограничения отображений квадрата (3) на соответствующие страты образуют коммутативный квадрат

$$\begin{array}{ccc} \Sigma_{\mathbf{X}} & \xrightarrow{\text{LL}} & \Delta_{T(\mathbf{X})} \\ \alpha \uparrow & & \uparrow \tau \\ \widehat{\Sigma}_{\mathbf{I}} & \xrightarrow{\widehat{\text{LL}}} & \widehat{\Delta}_{T(\mathbf{I})} \end{array} \quad (7)$$

где страты $\widehat{\Sigma}_{\mathbf{I}}$, $\widehat{\Delta}_{T(\mathbf{I})}$ построены по согласованным разбиениям множества индексов $\{1, \dots, n\}$.

Кратности всех отображений в этом квадрате постоянны и не зависят ни от выбора точки в образе, ни от выбора разбиения $\mathbf{I}$. Обозначим эти кратности соответственно через $\mu_{\mathbf{X}}(\text{LL})$, $\mu_{\mathbf{X}}(\alpha)$, $\mu_{\mathbf{X}}(\widehat{\text{LL}})$ и $\mu_{T(\mathbf{X})}(\tau)$. В силу коммутативности квадрата (7) имеем

$$\mu_{\mathbf{X}}(\text{LL}) = \frac{\mu_{\mathbf{X}}(\widehat{\text{LL}}) \cdot \mu_{T(\mathbf{X})}(\tau)}{\mu_{\mathbf{X}}(\alpha)}, \quad (8)$$

и для доказательства теоремы нам достаточно вычислить все кратности, входящие в правую часть формулы.

ЛЕММА 4.2. Пусть $T = 1^{m_1} \dots n^{m_n}$. Тогда

$$\mu_T(\tau) = m_1! \dots m_n! = \#\text{Aut}(T).$$

Действительно, если взять многочлен, принадлежащий страту Σ_T , то (мульти)множество его корней фиксировано. Если зафиксировать также разбиение множества индексов $\{1, \dots, n\}$, отвечающее разбиению T , то у нас остается $m_1!$ способов занумеровать корни кратности $1, \dots, m_n!$ способов занумеровать корни кратности n .

Следующее утверждение также очевидно.

ЛЕММА 4.3. $\mu_{\mathbf{X}}(\alpha) = (n+1)\#\text{Aut}(\mathbf{X}) \prod_{i=1}^c \#\text{Aut}(X_i)$.

Оно доказывается так же, как и в предыдущем случае: у нас есть $\#\text{Aut}(\mathbf{X})$ способов переставить наборы множеств индексов, отвечающих одинаковым разбиениям X_i , и $\#\text{Aut}(X_i)$ способов переставить множества индексов внутри i -го набора. Множитель $n+1$ обязан своим происхождением наличию $n+1$ корней $(n+1)$ -й степени у свободного члена.

Вычислению кратности отображения $\widehat{\text{LL}}$ посвящены следующие два раздела.

4.3. Кратность ограничения проективного отображения. Пусть $f: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$, $f = (f_1, \dots, f_n)$, — однородное отображение постоянной по координатной степени W . Предположим также, что оно конечно.

ЛЕММА 4.4. Пусть $V \subset \mathbb{C}^n$ — однородное аффинное подмногообразие чистой размерности k в прообразе, причем образ $f(V)$ неприводим. Тогда

$$\deg V \cdot W^k = \deg f(V) \cdot \mu_V(f). \quad (9)$$

Если при этом в общей точке многообразия V отображение f невырожденно, то у общей точки образа $f(V)$ ровно $\mu_V(f)$ геометрически различных прообразов.

Здесь $\deg V$, $\deg f(V)$ — степени соответствующих многообразий, а $\mu_V(f)$ — кратность ограничения отображения f на многообразии V .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим проективизацию $\tilde{f}: \mathbb{CP}^{n-1} \rightarrow \mathbb{CP}^{n-1}$ отображения f и соответствующие проективные многообразия $\tilde{V} \subset \mathbb{CP}^{n-1}$, $\tilde{f}(\tilde{V}) = \widetilde{f(V)} \subset \mathbb{CP}^{n-1}$. Сначала мы хотим доказать, что

$$\deg \tilde{V} \cdot W^{k-1} = \deg \tilde{f}(\tilde{V}) \cdot \mu_{\tilde{V}}(\tilde{f}). \quad (10)$$

Равенство (9) следует отсюда, так как $\deg V = \deg \tilde{V}$, $\deg f(V) = \deg \tilde{f}(\tilde{V})$ по определению степени и $\mu_V(f) = W\mu_{\tilde{V}}(\tilde{f})$.

Пусть $\mathbb{CP}^{n-k}$ — общая $(n-k)$ -мерная плоскость в образе. Тогда по определению $\#(\mathbb{CP}^{n-k} \cap \tilde{f}(\tilde{V})) = \deg \tilde{f}(\tilde{V})$. Подсчитаем теперь двумя способами число прообразов $\tilde{f}^{-1}(\mathbb{CP}^{n-k} \cap \tilde{f}(\tilde{V}))$, лежащих в $\tilde{V}$.

Во-первых, это число равно $\deg \tilde{f}(\tilde{V}) \cdot \mu_{\tilde{V}}(\tilde{f})$, так как у каждой точки трансверсального пересечения $\mu_{\tilde{V}}(\tilde{f})$ прообразов в $\tilde{V}$.

С другой стороны, прообраз $\tilde{f}^{-1}(\mathbb{CP}^{n-k})$ $(n-k)$ -мерной плоскости является многообразием степени W^{k-1} в прообразе. Действительно, такая плоскость задается $k-1$ линейными уравнениями в координатах $y_1, \dots, y_n$ в пространстве-образе и после подстановки $y_i = f_i$ мы получаем $k-1$ уравнений степени W для $\tilde{f}^{-1}(\mathbb{CP}^{n-k})$. Поэтому число точек пересечения равно

$$\deg f^{-1}(\mathbb{CP}^{n-k}) \cdot \deg \tilde{V} = W^{k-1} \deg \tilde{V},$$

и равенство (10) доказано. Мы можем выбрать $(n-k)$ -мерную плоскость в образе так, чтобы она не проходила через образы точек вырождения отображения $\tilde{f}$, лежащих в V . Все прообразы каждой точки пересечения такой плоскости с $\tilde{f}(V)$ имеют кратность 1, и поэтому их число в точности равно степени отображения.

Теперь мы можем подсчитать степень замыкания примитивного страта в пространстве $\widehat{\mathcal{P}}$, зная кратность ограничения отображения ЛЛ на примитивный страт в пространстве $\mathcal{P}$ (разд. 3.2). Фиксируем разбиение I подмножества множества индексов, отвечающее вырожденному разбиению X , и обозначим соответствующий примитивный страт через $\widehat{\Sigma}_I$. Аналогичный смысл имеют обозначения $T(I)$ и μ_X (в качестве индекса указано разбиение, а не паспорт). Замыкание страта $\widehat{\Sigma}_I \subset \widehat{\mathcal{P}}$ будем обозначать через $\text{cl}(\widehat{\Sigma}_I)$.

Коммутативность квадрата (7) для примитивного страта $\widehat{\Sigma}_I \subset \widehat{\mathcal{P}}$ дает

$$\begin{aligned} \mu_X(\widehat{\text{LL}}) &= \frac{\mu_X(\alpha) \mu_X(\text{LL})}{\mu_{T(X)}(\tau)} \\ &= \frac{(n+1)(n-A(X))! \# \text{Aut}(X) \cdot (n+1)^{c-1} \frac{1}{\# \text{Aut}(X)} \frac{(n-A(X))!}{s(X)!}}{(n-A(X))!} \\ &= (n+1)^c \frac{(n-A(X))!}{s(X)!}, \end{aligned}$$

откуда в силу леммы 4.4

$$\deg \text{cl}(\widehat{\Sigma}_I) = \frac{(n-A(X))!}{s(X)!}.$$

4.4. Степени стратов. Пусть I — произвольный набор непересекающихся подмножеств множества индексов $\{1, \dots, n\}$. Сопоставим такому набору *стандартную* плоскость $\Pi_I \subset \mathcal{P}$, заданную набором уравнений $a_i = a_j$ для всех пар i, j , принадлежащих одному подмножеству набора I .

ТЕОРЕМА 4.5. *Ограничение отображения $\widehat{\text{LL}}$ на плоскость Π_I невырожденно в дополнении к пересечению этой плоскости другими стандартными плоскостями, не содержащими плоскости Π_I , и плоскостью $a = 0$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим совпадающие на плоскости Π_I критические точки через $b_0, b_1, \dots, b_m$, и пусть β_i — число критических точек, слившихся в точке b_i , т. е. $\beta_0 b_0 + \dots + \beta_m b_m = 0$. Положим

$$f_I(x) = (n+1)(x-b_0)^{\beta_0} \dots (x-b_m)^{\beta_m}.$$

Тогда ограничение отображения $\widehat{\text{LL}}$ на плоскость Π_I покоординатно имеет вид

$$\widehat{\text{LL}}_i: (b_0, b_1, \dots, b_m; a) \mapsto \int_0^{b_i} \Phi_I(\xi) d\xi + a^{n+1}.$$

Для $i = 0, 1, \dots, m$ зафиксируем на прямой полиномиальные 1-формы

$$\omega_i = -\beta_i \frac{\Phi_I(x) dx}{(x - b_i)}.$$

Классы когомологий этих форм в пространстве относительных когомологий $H^1(\mathbb{C}^1, \{b_0, \dots, b_m\})$ удовлетворяют линейному соотношению $\omega_0 + \dots + \omega_m = d\Phi_I(x) \equiv 0$. Если все b_i попарно различны, то других соотношений между 1-формами нет. Действительно, если 1-форма $\omega = \lambda_0\omega_0 + \dots + \lambda_m\omega_m$ задает нулевой класс относительных когомологий, то многочлен $\int_{b_0}^x \omega$ имеет ту же степень и те же кратности нулей в точках b_i , что и многочлен $\Phi_I(x)$, и поэтому пропорционален последнему. Следовательно, классы этих 1-форм порождают все пространство относительных когомологий.

Если теперь в матрице Якоби $(\partial \widehat{\text{LL}}_j / \partial b_i)$ вычесть из всех строк строчку, отвечающую компоненте $\widehat{\text{LL}}_0$, то мы получим $(m+1) \times (m+2)$ -матрицу

$$\begin{pmatrix} \int_0^{b_0} \omega_0 & \dots & \int_0^{b_0} \omega_m & (n+1)a^n \\ \int_{b_0}^{b_1} \omega_0 & \dots & \int_{b_0}^{b_1} \omega_m & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \int_{b_0}^{b_m} \omega_0 & \dots & \int_{b_0}^{b_m} \omega_m & 0 \end{pmatrix}.$$

В силу того что классы 1-форм ω_j порождают все пространство когомологий, ранг этой матрицы равен $m+1$ в точках, где все b_i различны и $a \neq 0$. Теорема доказана.

Фиксируем теперь паспорт $\mathbf{X} = \{X_1, \dots, X_c\}$ и соответствующее ему разбиение $\mathbf{I} = \{I_1, \dots, I_c\}$ множества индексов. Назовем индекс i *существенным* (для разбиения $\mathbf{I}$), если число подмножеств в содержащем его наборе индексов $I_k \in \mathbf{I}$ больше единицы. Отвечающие этому индексу критическую точку и критическое значение также будем называть существенными. Из теоремы 4.5 вытекает следующее утверждение, завершающее доказательство теоремы 1.1.

СЛЕДСТВИЕ 4.6. *Замыкание $\text{cl}(\widehat{\Sigma}_{\mathbf{I}})$ страта $\widehat{\Sigma}_{\mathbf{I}}$ является пересечением замыканий $\text{cl}(\widehat{\Sigma}_{I_i})$ примитивных стратов $\widehat{\Sigma}_{I_i}$, причем пересечение трансверсально почти во всех точках многообразия $\text{cl}(\widehat{\Sigma}_{\mathbf{I}})$, т. е. всюду за исключением, быть может, подмногообразия коразмерности 1, состоящего из точек, где существенная критическая точка сливается с другой критической точкой. В частности, $\text{cl}(\widehat{\Sigma}_{\mathbf{I}})$ является гладким всюду, за исключением указанного подмногообразия, и*

$$\deg \text{cl}(\widehat{\Sigma}_{\mathbf{I}}) = \prod_{i=1}^c \deg \text{cl}(\widehat{\Sigma}_{I_i}) = \prod_{i=1}^c \frac{(n - A(X_i))!}{s(X_i)!}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сопоставим разбиению $\mathbf{I}$ множества индексов на наборы подмножеств разбиение $I = I(\mathbf{I})$, $I = I_1 \cup \dots \cup I_k$ множества индексов на подмножества, опустив промежуточный уровень иерархии разбиения; пусть, как

и выше, b_i обозначают совокупности попарно совпадающих на стандартной плоскости Π_I критических точек. Страт $\widehat{\Sigma}_I$ лежит в плоскости Π_I . Ограничение отображения $\widehat{LL}$ на эту плоскость невырожденно почти всюду; поэтому страт $\widehat{\Sigma}_I$, который локально является прообразом плоскости, оказывается гладким в окрестности любой своей точки, где $b_i \neq b_j$. При слиянии двух несущественных критических точек гладкость замыкания страта не нарушается.

Трансверсальность пересечения примитивных стратов в общей точке также вытекает из предыдущей теоремы. Действительно, согласно приведенному рассуждению, каждый из примитивных стратов $\widehat{\Sigma}_{I_i}$ гладкий в той точке его пересечения с плоскостью Π_I , где его существенные критические точки не совпадают с другими критическими точками. Образы стратов $\widehat{\Sigma}_{I_i}$ при отображении $\widehat{LL}$ являются трансверсально пересекающимися плоскостями, и в силу невырожденности отображения сами страты тоже пересекаются трансверсально.

Согласно комплексному варианту леммы Ролля, при слиянии двух критических точек с одинаковым критическим значением с ними сливается и (по крайней мере одна) критическая точка с другим критическим значением. Поэтому образ множества точек замыкания страта $\widehat{\Sigma}_I$, отвечающих слившимся критическим точкам, имеет коразмерность 1 в образе всего замыкания. В силу собственности отображения $\widehat{LL}$ и само это множество имеет коразмерность 1 в замыкании страта.

Следствие 4.6, а значит, и основная теорема доказаны.

ЛИТЕРАТУРА

1. Арнольд В. И. Топологическая классификация тригонометрических многочленов и комбинаторика графов с равным числом вершин и ребер. Функц. анализ и его прил., **30**, вып. 1, 1–17 (1996).
2. Арнольд В. И. Критические точки функций и классификация каустик. УМН, **29**, вып. 3, 243–244 (1974).
3. Арнольд В. И., Варченко А. Н., Гусейн-Заде С. М. Особенности дифференцируемых отображений. т. 1, М., Наука, 1982.
4. El Marraki M., Hanusse N., Zipperer J., Zvonkin A. Cacti, braids and complex polynomials. Sémin. Lotharing. de Combin., **37** (1997), <http://cartan.u-strasbg.fr/~slc>.
5. Goulden I. P., Jackson D. M. Transitive factorisation into transpositions and holomorphic mappings on the sphere. Proc. Amer. Math. Soc., **125**, No. 1, 51–60 (1997).
6. Goulden I. P., Jackson D. M. The combinatorial relationship between trees, cacti and certain connection coefficients for the symmetric group. European J. Combin., **13**, 357–365 (1992).
7. Khovansky A. G., Zdravkovska S. Branched covers of S^2 and braid groups. J. Knot Theory Ramifications, **5**, No. 1, 55–75 (1996).
8. Looijenga E. The complement of the bifurcation variety of a Simple Singularity. Inv. Math., **23**, 105–116 (1974).
9. Здравковска С. Топологическая классификация полиномиальных отображений. УМН, **25**, No. 4, 179–180 (1970).
10. Zvonkine D. Multiplicities of the Lyashko–Looijenga map on its strata. C. R. Acad. Sci Sér. I Math., **324**, 1349–1353 (1997).