Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. М. Щепочкина, Пять простых исключительных супералгебр Ли векторных полей, *Функц. анализ и его прил.*, 1999, том 33, выпуск 3, 59–72

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa366>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.92.164.108

26 апреля 2023 г., 15:51:14

УДК 519.46

Пять простых исключительных супералгебр Ли векторных полей*

© 1999. И. М. Щепочкина

В. Кац [3] классифицировал простые конечномерные супералгебры Ли над $\mathbb{C}$. Он также предположил, что в классе бесконечномерных фильтрованных супералгебр Ли векторных полей полиномиального роста простыми являются лишь прямые аналоги четырех картановских серий $\mathbf{vect}(n)$, $\mathbf{svect}(n)$, $\mathfrak{h}(2n)$ и $\mathfrak{k}(2n+1)$ всех, бездивергентных, гамильтоновых и контактных векторных полей соответственно.

Вскоре, однако, были найдены [6] и не прямые аналоги — четыре серии: $\mathfrak{m}$ и $\mathfrak{sm}$ — «нечетные» аналоги серии $\mathfrak{k}$, $\mathfrak{le}$ и $\mathfrak{slc}$ — «нечетные» аналоги серии $\mathfrak{h}$, а также некоторые их деформации [4, 5, 7, 8]. Кроме того, были получены нестандартные реализации всех этих серий [1], т. е. другие фильтрованные супералгебры Ли, изоморфные указанным выше как абстрактные супералгебры.

Наконец, в [10, 11] приведены краткие описания четырех простых исключительных супералгебр Ли векторных полей, а препринт [9] посвящен изучению одной из них. Целью настоящей работы является более детальное описание этих алгебр и определение наиболее замечательной пятой простой исключительной супералгебры. Связанные с ней конструкции для струнных супералгебр Ли см. в [2].

Автор выражает глубокую благодарность Д. Лейтесу за постановку задачи и внимание к работе, Г. Посту и П. Грозману за неоценимую помощь в компьютерных вычислениях и университетам Стокгольма и Твенте за гостеприимство.

§1. Основные обозначения и предварительные сведения

Всюду в дальнейшем основное поле — поле $\mathbb{C}$.

1.1. Пусть $x = (u_1, \dots, u_n, \theta_1, \dots, \theta_m)$, где u_i — четные переменные, а θ_j — нечетные. Через $\mathbf{vect}(n|m)$ мы обозначаем супералгебру Ли $\det \mathbb{C}[x]$ всех векторных полей от x с полиномиальными коэффициентами. Естественная $\mathbb{Z}$ -градуировка в многочленах $\deg u_i = \deg \theta_j = 1$ порождает $\mathbb{Z}$ -градуировку в $\mathbf{vect}(n|m)$.

Дивергенцией векторного поля $D = \sum_i f_i \partial/\partial u_i + \sum_j g_j \partial/\partial \theta_j$ называется функция

$$\operatorname{div} D = \sum_i \frac{\partial f_i}{\partial u_i} + \sum_j (-1)^{p(g_j)} \frac{\partial g_j}{\partial \theta_j}.$$

Супералгебра Ли специальных, или бездивергентных векторных полей $\mathbf{svect}(n|m) = \{D \in \mathbf{vect}(n|m) : \operatorname{div} D = 0\}$ состоит из полей, сохраняющих форму объема vol_x с постоянными коэффициентами в координатах x .

* Работа выполнена при частичной поддержке Международной ассоциации INTAS (грант 96-0538).

Пусть $u = (t, p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n)$, $\theta = (\xi_1, \dots, \xi_r, \eta_1, \dots, \eta_r)$ и

$$\alpha_1 = dt + \sum_{1 \leq i \leq n} (p_i dq_i - q_i dp_i) + \sum_{1 \leq j \leq r} (\xi_j d\eta_j + \eta_j d\xi_j), \quad \omega_0 = d\alpha_1.$$

Супералгебра Ли, сохраняющая уравнение Пфаффа $\alpha_1 = 0$,

$$\mathfrak{k}(2n+1|2r) = \{D \in \mathbf{vect}(2n+1|2r) : L_D \alpha_1 = f_D \alpha_1, f_D \in \mathbb{C}[t, p, q, \xi, \eta]\},$$

называется контактной супералгеброй Ли, а супералгебра Ли, сохраняющая саму форму α_1 ,

$$\mathfrak{po}(2n|2r) = \{D \in \mathfrak{k}(2n+1|2r) : L_D \alpha_1 = 0\}$$

называется пуассоновской. (Отметим, что, вообще говоря, число нечетных переменных θ_i не обязано быть четным. Однако в интересующих нас примерах оно четно; поэтому мы приводим формулы лишь для этого случая.)

«Нечетные» аналоги этих супералгебр Ли получаются, если

$$u = q = (q_1, \dots, q_n), \quad \theta = (\xi_1, \dots, \xi_n; \tau)$$

и

$$\alpha_0 = d\tau + \sum_i (\xi_i dq_i + q_i d\xi_i), \quad \omega_1 = d\alpha_0.$$

Супералгебра Ли, сохраняющая уравнение Пфаффа $\alpha_0 = 0$,

$$\mathfrak{m}(n) = \{D \in \mathbf{vect}(n|n+1) : L_D \alpha_0 = f_D \alpha_0\}, \quad \text{где } f_D \in \mathbb{C}[q, \xi, \tau],$$

называется нечетной контактной, а супералгебра Ли, сохраняющая α_0 ,

$$\mathfrak{b}(n) = \{D \in \mathfrak{m}(n) : L_D \alpha_0 = 0\},$$

называется бютановской.

В отличие от четного случая, супералгебры Ли $\mathfrak{m}(n)$ и $\mathfrak{b}(n)$ не сохраняют форму объема. Поэтому определены их специальные подалгебры

$$\mathfrak{sm}(n) = \{D \in \mathfrak{m}(n) : \operatorname{div} D = 0\}, \quad \mathfrak{sb}(n) = \{D \in \mathfrak{b}(n) : \operatorname{div} D = 0\}.$$

Супералгебры Ли $\mathfrak{k}$, $\mathfrak{m}$ и их подалгебры удобно описывать с помощью производящих функций. Пусть $E = \sum_i y_i \partial / \partial y_i$, где y — это все координаты, кроме t (в случае $\mathfrak{k}$) или τ (в случае $\mathfrak{m}$), а $\nabla(f) = 2f - E(f)$. Тогда в случае формы α_1 для $f \in \mathbb{C}[t, p, q, \xi, \eta]$ положим

$$K_f = \nabla(f) \frac{\partial}{\partial t} + H_f + \frac{\partial f}{\partial t} E,$$

где

$$H_f = \sum_{i \leq n} \left(\frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial}{\partial q_i} - \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial}{\partial p_i} \right) - (-1)^{p(f)} \sum_{j \leq k} \left(\frac{\partial f}{\partial \xi_j} \frac{\partial}{\partial \eta_j} + \frac{\partial f}{\partial \eta_j} \frac{\partial}{\partial \xi_j} \right).$$

Если $f \in \mathbb{C}[p, q, \xi, \eta]$, т.е. f не зависит от t , то H_f — гамильтоново векторное поле, сохраняющее форму ω_0 .

В случае формы α_0 для $f \in \mathbb{C}[q, \xi, \tau]$ положим

$$M_f = \nabla(f) \frac{\partial}{\partial \tau} + \operatorname{Le}_f - (-1)^{p(f)} \frac{\partial f}{\partial \tau} E,$$

где

$$\operatorname{Le}_f = \sum_{i \leq n} \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial}{\partial \xi_i} + (-1)^{p(f)} \frac{\partial f}{\partial \xi_i} \frac{\partial}{\partial q_i} \right).$$

Отметим, что $p(\text{Le}_f) = p(M_f) = p(f) + \bar{1}$, и если $f \in \mathbb{C}[q, \xi]$, т.е. f не зависит от τ , то Le_f — поле, сохраняющее ω_1 .

Нетрудно проверить, что

$$L_{K_f}(\alpha_1) = 2(\partial f / \partial t) \alpha_1, \quad L_{M_f}(\alpha_0) = -(-1)^{p(f)} 2(\partial f / \partial \tau) \alpha_0.$$

Поэтому $K_f \in \mathfrak{k}(2n+1|2r)$, а $M_f \in \mathfrak{m}(n)$.

Коммутаторам векторных полей $[K_f, K_g]$ и $[M_f, M_g]$ соответствуют контактные скобки производящих функций: $[K_f, K_g] = K_{\{f, g\}_{\text{k.b.}}}$, $[M_f, M_g] = M_{\{f, g\}_{\text{m.b.}}}$, где

$$\begin{aligned} \{f, g\}_{\text{k.b.}} &= \nabla(f) \frac{\partial g}{\partial t} - \frac{\partial f}{\partial t} \nabla(g) + \{f, g\}_{\text{P.b.}}, \\ \{f, g\}_{\text{m.b.}} &= \nabla(f) \frac{\partial g}{\partial \tau} + (-1)^{p(f)} \frac{\partial f}{\partial \tau} \nabla(g) + \{f, g\}_{\text{B.b.}}, \end{aligned}$$

а скобки Пуассона $\{\cdot, \cdot\}_{\text{P.b.}}$ и Бютан $\{\cdot, \cdot\}_{\text{B.b.}}$ имеют вид

$$\begin{aligned} \{f, g\}_{\text{P.b.}} &= \sum_{i \leq n} \left(\frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} - \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} \right) - (-1)^{p(f)} \sum_{j \leq r} \left(\frac{\partial f}{\partial \xi_j} \frac{\partial g}{\partial \eta_j} + \frac{\partial f}{\partial \eta_j} \frac{\partial g}{\partial \xi_j} \right), \\ \{f, g\}_{\text{B.b.}} &= \sum_{i \leq n} \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial \xi_i} + (-1)^{p(f)} \frac{\partial f}{\partial \xi_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} \right). \end{aligned}$$

На языке производящих функций супералгебра $\mathfrak{b}(n)$ выделяется в $\mathfrak{m}(n)$ уравнением $\partial f / \partial \tau = 0$, а супералгебра $\mathfrak{sm}(n)$ — уравнением $\text{div } M_f = 0$. Оказывается, что любая линейная комбинация этих уравнений задает некоторую (почти всегда простую) подалгебру в $\mathfrak{m}(n)$. Положим

$$\mathfrak{b}_{a,b}(n) = \{M_f \in \mathfrak{m}(n) : a \text{ div } M_f = (-1)^{p(f)} 2(a - bn) \partial f / \partial \tau\}.$$

Заметим, что супералгебры Ли $\mathfrak{po}$ и $\mathfrak{b}$ содержат одномерные центры, факторы по которым образуют гамильтоновы (четную и нечетную соответственно) супералгебры Ли $\mathfrak{h}$ и $\mathfrak{le}$,

$$\mathfrak{h}(2n|2m) \cong \text{Span}(H_f : f \in \mathbb{C}[p, q, \xi, \eta]), \quad \mathfrak{le}(n) \cong \text{Span}(\text{Le}_f : f \in \mathbb{C}[q, \xi]).$$

Специальные подалгебры $\mathfrak{sl}\mathfrak{e}(n) = \mathfrak{le}(n) \cap \mathfrak{vect}(n|n)$ и $\mathfrak{sb}(n) = \mathfrak{b}(n) \cap \mathfrak{sm}(n)$ выделяются в производящих функциях уравнением $\Delta(f) = 0$, где $\Delta = \sum_{i \leq n} \partial^2 / \partial q_i \partial \xi_i$ — нечетный аналог оператора Лапласа.

Супералгебры Ли $\mathfrak{sl}\mathfrak{e}(n)$ и $\mathfrak{sb}(n)$ содержат идеалы $\mathfrak{sl}\mathfrak{e}^\circ(n)$ и $\mathfrak{sb}^\circ(n)$ коразмерности 1, определяемые точными последовательностями

$$\begin{aligned} 0 &\longrightarrow \mathfrak{sl}\mathfrak{e}^\circ(n) \longrightarrow \mathfrak{sl}\mathfrak{e}(n) \longrightarrow \mathbb{C} \cdot \text{Le}_{\xi_1 \dots \xi_n} \longrightarrow 0, \\ 0 &\longrightarrow \mathfrak{sb}^\circ(n) \longrightarrow \mathfrak{sb}(n) \longrightarrow \mathbb{C} \cdot M_{\xi_1 \dots \xi_n} \longrightarrow 0. \end{aligned}$$

В терминах производящих функций $\mathbb{Z}$ -градуировка gr в супералгебрах $\mathfrak{k}$ и $\mathfrak{m}$ определяется условиями $\deg y_i = 1$, $\deg t = \deg \tau = 2$, $\text{gr}(f) = \deg f - 2$.

1.2. Производящие функции для $\mathfrak{sb}^\circ(n)$ составляют образ нечетного оператора Лапласа Δ . Пусть $f \in \mathfrak{sb}^\circ(n)$ — произвольная однородная по q и ξ гармоническая функция, а $\Phi = \sum q_i \xi_i$. Тогда

$$\Delta(\Phi f) = (\Delta \Phi) f - \Phi \Delta f - \{\Phi, f\} = (n + \deg_q f - \deg_\xi f) f.$$

Определим правый обратный к оператору Δ по формуле

$$\Delta^{-1}f = \frac{1}{\nu(f)}(\Phi f), \quad \text{где } \nu(f) = n + \deg_q f - \deg_\xi f. \quad (1.1)$$

Если считать, что мы реализуем супералгебру $\mathfrak{le}(n)$ производящими функциями f , $f(0) = 0$, то оператор Δ^{-1} будет определен и на $\mathfrak{sl}^\circ(n)$. В обоих случаях будет выполнено равенство $\Delta(\Delta^{-1}f) = f$.

1.3. В отличие от алгебр Ли, все описанные супералгебры Ли допускают несколько реализаций в виде векторных полей. Нас будет интересовать одна нестандартная реализация супералгебр Ли $\mathfrak{b}_{a,b}(n)$, $\mathfrak{le}(n)$ и $\mathfrak{sl}^\circ(n)$.

Реализуем $\mathfrak{g} = \mathfrak{b}_{a,b}(n)$ производящими функциями от $\tau, q_1, \dots, q_n, \xi_1, \dots, \xi_n$, а $\mathfrak{g} = \mathfrak{le}(n)$ или $\mathfrak{sl}^\circ(n)$ производящими функциями от $q_1, \dots, q_n, \xi_1, \dots, \xi_n$ и введем новую $\mathbb{Z}$ -градуировку $\text{gr } f = \deg f - 1$, где $\deg \tau = \deg q_i = 1$, $\deg \xi_i = 0$. Результат этой переградуировки обозначим через $R(\mathfrak{g})$. Тогда $R(\mathfrak{g}) = \bigoplus_{i \geq -1} (R(\mathfrak{g}))_i$ и, значит, $R(\mathfrak{g})$ реализуется как подалгебра супералгебры Ли $\mathbf{vect}(N|M)$ с некоторыми новыми N и M . Мы используем для $R(\mathfrak{g})$ обозначения $\mathfrak{b}_{a,b}(n;n)$, $\mathfrak{le}(n;n)$ и $\mathfrak{sl}^\circ(n;n)$ соответственно.

Для $R(\mathfrak{g}) = \mathfrak{le}(n;n)$ имеем $(R(\mathfrak{g}))_{-1} = (\Pi(\Lambda(n))/\mathbb{C} \cdot 1)$, где Π — оператор изменения четности, $(R(\mathfrak{g}))_0 = \mathbf{vect}(0|n)$ и действие $(R(\mathfrak{g}))_0$ на $(R(\mathfrak{g}))_{-1}$ — это естественное действие векторных полей на функции.

Для $R(\mathfrak{g}) = \mathfrak{sl}^\circ(n;n)$ имеем $(R(\mathfrak{g}))_{-1} = (\Pi(\tilde{\Lambda}(n))/\mathbb{C} \cdot 1)$, где $\tilde{\Lambda}(n) = \{f \in \Lambda(n) \mid \int f \text{ vol} = 0\}$, а $(R(\mathfrak{g}))_0 = \mathbf{svect}(0|n)$. При этом естественное действие специальных векторных полей на функциях сохраняет невырожденную суперкосимметрическую форму ω , $\omega(f, g) = \int f g \text{ vol}$.

Наконец, для $R(\mathfrak{g}) = \mathfrak{b}_{a,b}(n;n)$ имеем $(R(\mathfrak{g}))_{-1} = \Pi(\Lambda(n))$, $(R(\mathfrak{g}))_0 = \mathbf{vect}(0|n)$. Однако действие $(R(\mathfrak{g}))_0$ на $(R(\mathfrak{g}))_{-1}$ имеет вид

$$[D, f] = Df + \lambda \text{div } D, \quad \text{где } f \in \Lambda(n), D \in \mathbf{vect}(0|n), \lambda = \frac{2a}{n(a-b)},$$

т. е. как $(R(\mathfrak{g}))_0$ -модуль пространство $(R(\mathfrak{g}))_{-1}$ является пространством λ -плотностей. Поэтому мы используем также обозначения $(R(\mathfrak{g}))_{-1} = \Pi(\Lambda_\lambda(n))$ и $R(\mathfrak{g}) = \mathfrak{b}_\lambda(n;n)$.

1.4. Пусть $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}^\circ(3)$. В стандартной $\mathbb{Z}$ -градуировке $\dim \mathfrak{g}_{-1} = (3, 3)$, $\mathfrak{g}_0 \cong \mathbf{spe}(3)$. Для переградуированной супералгебры Ли $R(\mathfrak{g}) = \mathfrak{sl}^\circ(3; 3)$ имеем $\dim(R(\mathfrak{g}))_{-1} = (3, 3)$, $(R(\mathfrak{g}))_0 = \mathbf{svect}(0|3) \cong \mathbf{spe}(3)$. Следовательно, переградуировка R определяет нетривиальный автоморфизм супералгебры Ли $\mathfrak{sl}^\circ(3)$. В терминах производящих функций оператор R задается следующими формулами:

- 1) если $\deg_\xi(f) = 0$, то $R(f) = \Delta(f\xi_1\xi_2\xi_3)$;
- 2) если $\deg_\xi(f) = 1$, то $R(f) = f$;
- 3) если $\deg_\xi(f) = 2$, то $R(f) = \partial^3(\Delta^{-1}f)/\partial\xi_1\partial\xi_2\partial\xi_3$.

При этом $R^2 = \text{sign}$, где $\text{sign}(f) = (-1)^{p(f)+1}f$.

Супералгебра Ли $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}^\circ(3)$ обладает $(0|2)$ -мерным центральным расширением $\mathfrak{sl}^\circ(3)$: элемент M_1 степени -2 относительно стандартной $\mathbb{Z}$ -градуировки в $\mathfrak{sl}^\circ(3)$ расширяет $\mathfrak{sl}^\circ(3)$ до $\mathfrak{sb}^\circ(3)$, а элемент z степени -2 относительно градуировки в $\mathfrak{sl}^\circ(3; 3)$ задает расширение с помощью инвариантной формы ω .

Переградуировка R переставляет эти центральные элементы и задает нетривиальный автоморфизм супералгебры Ли $\mathfrak{esle}^\circ(3)$.

1.5. Основной конструкцией, используемой при построении исключительных супералгебр Ли векторных полей, является конструкция картановского продолжения [12] и ее обобщения [10]. Пусть $\mathfrak{g}$ — супералгебра Ли, V есть $(n|m)$ -мерный $\mathfrak{g}$ -модуль и S^i — оператор i -й суперсимметрической степени. Положим $\mathfrak{g}_{-1} = V$, $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{g}$ и определим i -е картановское продолжение для $i > 0$ как

$$\begin{aligned}\mathfrak{g}_i &= \{X \in \text{Hom}(\mathfrak{g}_{-1}, \mathfrak{g}_{i-1}) : X(w_0)(w_1, \dots, w_i) \\ &= (-1)^{p(w_0)p(w_1)} X(w_1)(w_0, \dots, w_i) \text{ для любых } w_0, w_1 \in \mathfrak{g}_{-1}\} \\ &= (S^i(\mathfrak{g}_{-1})^* \otimes \mathfrak{g}_0) \cap (S^{i+1}(\mathfrak{g}_{-1})^* \otimes \mathfrak{g}_{-1}).\end{aligned}$$

(В последнем выражении мы рассматриваем $\mathfrak{g}_0$ как подпространство в $\mathfrak{g}_{-1}^* \otimes \mathfrak{g}_{-1}$; поэтому пересечение корректно определено.)

Алгебра $(\mathfrak{g}_{-1}, \mathfrak{g}_0)_* = \bigoplus_{i \geq -1} \mathfrak{g}_i$ называется картановским продолжением пары $(V, \mathfrak{g})$. Ясно, что если $\mathfrak{g}_0$ -модуль $\mathfrak{g}_{-1}$ точен, то $(\mathfrak{g}_{-1}, \mathfrak{g}_0)_* \subset \text{vect}(n|m) = \text{der } \mathbb{C}[x]$,

$$\mathfrak{g}_i = \{D \in \text{vect}(n|m) : \deg D = i, [D, X] \in \mathfrak{g}_{i-1} \text{ для всех } X \in \mathfrak{g}_{-1}\}$$

и $(\mathfrak{g}_{-1}, \mathfrak{g}_0)_*$ является максимальной подалгеброй в $\text{vect}(n|m)$ с данной неположительной частью. При этом $D = \sum_i f_i \partial / \partial x_i \in (\mathfrak{g}_{-1}, \mathfrak{g}_0)_*$ тогда и только тогда, когда матрица $P(D) = (P_{i,j})$, где $P_{i,j} = (-1)^{p(D)p(x_j)} \partial f_i / \partial x_j$ принадлежит $\mathfrak{g}_0 \otimes \mathbb{C}[x]$. Другими словами, картановское продолжение всегда выделяется системой линейных дифференциальных уравнений в частных производных.

Нам потребуются следующие равенства:

$$\begin{aligned}((\Pi(\Lambda(n))/\mathbb{C} \cdot 1), \text{vect}(0|n))_* &= \mathfrak{le}(n; n), \\ ((\Pi(\tilde{\Lambda}(n))/\mathbb{C} \cdot 1), \text{svect}(0|n))_* &= \mathfrak{sle}^\circ(n; n), \\ (\Pi(\Lambda_\lambda(n)), \text{vect}(0|n))_* &= \mathfrak{b}_\lambda(n; n).\end{aligned}$$

1.6. Опишем теперь конструкцию, обобщающую картановское продолжение. Пусть $\mathfrak{g}_- = \bigoplus_{-d \leq i \leq -1} \mathfrak{g}_i$ есть нильпотентная $\mathbb{Z}$ -градуированная супералгебра Ли и $\mathfrak{g}_0 \subset \text{der } \mathfrak{g}_-$ — некоторая подалгебра супералгебры Ли дифференцированных супералгебры $\mathfrak{g}_-$, сохраняющих $\mathbb{Z}$ -градуировку. Для $i > 0$ определим i -е продолжение пары $(\mathfrak{g}_-, \mathfrak{g}_0)$ как

$$\mathfrak{g}_i = ((S^i(\mathfrak{g}_-)^* \otimes \mathfrak{g}_0) \cap (S^{i+1}(\mathfrak{g}_-)^* \otimes \mathfrak{g}_-))_i,$$

где индекс i в правой части означает компоненту степени i , а S^* есть сумма всех S^j . Положим $(\mathfrak{g}_-, \mathfrak{g}_0)_* = \bigoplus_{i \geq -d} \mathfrak{g}_i$.

Нас будут особо интересовать два случая. Пусть W есть $(2n|m)$ -мерное суперпространство, снабженное четной невырожденной суперкососимметрической билинейной формой ω , а $\mathbb{C}z$ есть $(1|0)$ -мерное пространство с базисным элементом z . На $\mathfrak{g}_- = W \oplus \mathbb{C}z$ определим скобку: z — центральный элемент, а $[v, w] = \omega(v, w)z$ для любых $v, w \in W$. Тогда $\mathfrak{g}_-$ превращается в супералгебру Гейзенберга $\mathfrak{hei}(2n|m)$. Зададим $\mathbb{Z}$ -градуировку на $\mathfrak{g}_-$ условием

$\mathfrak{g}_{-1} = W, \mathfrak{g}_{-2} = \mathbb{C}z$. Тогда $\det_0 \mathfrak{g}_- = \mathfrak{c}(\mathfrak{osp}(m|2n))$, где $\mathfrak{c}(\mathfrak{g})$ означает тривиальное центральное расширение, а $(\mathfrak{hei}(2n|m), \mathfrak{c}(\mathfrak{osp}(m|2n)))_* = \mathfrak{k}(2n+1|m)$. Нетрудно проверить, что если $\mathfrak{g}_0 \subset \mathfrak{c}(\mathfrak{osp}(m|2n))$, то продолжение $(\mathfrak{hei}(2n|m), \mathfrak{g}_0)_*$ содержится в $\mathfrak{k}(2n+1|m)$ и является максимальной подалгеброй с данной неположительной частью.

Аналогичная процедура для $(n|n)$ -мерного суперпространства W , снабженного нечетной невырожденной суперкососимметрической билинейной формой ω , приводит к антискобочной супералгебре $\mathfrak{g}_- = \mathfrak{ab}(n)$, $\det_0 \mathfrak{g}_- = \mathfrak{c}(\mathfrak{pe}(n))$ и $(\mathfrak{ab}(n), \mathfrak{c}(\mathfrak{pe}(n)))_* = \mathfrak{m}(n)$. Если $\mathfrak{g}_0 \subset \mathfrak{c}(\mathfrak{pe}(n))$, то продолжение $(\mathfrak{ab}(n), \mathfrak{g}_0)_*$ содержится в $\mathfrak{m}(n)$ и является максимальной подалгеброй с данной неположительной частью.

Если $\mathfrak{g}_-$ есть $\mathfrak{hei}(2n|m)$ или $\mathfrak{ab}(n)$, мы вместо $(\mathfrak{g}_-, \mathfrak{g}_0)_*$ используем символ $(\mathfrak{g}_-, \mathfrak{g}_0)^{\mathfrak{m}\mathfrak{k}}$, подчеркивая, что само продолжение является подалгеброй в $\mathfrak{k}$ или $\mathfrak{m}$.

1.7. Наконец, последняя конструкция, которую мы используем, — это конструкция картановского продолжения с элементов степени ≤ 1 .

Пусть $\mathfrak{g} = \bigoplus_{i \geq -d} \mathfrak{g}_i$ есть $\mathbb{Z}$ -градуированная супералгебра Ли, такая, что $\mathfrak{g}_{-1}$ порождает всю $\mathfrak{g}_-$. Возьмем $\mathfrak{g}_0$ -подмодуль $\mathfrak{h}_1$ в $\mathfrak{g}_1$. Определим второе продолжение пары $(\bigoplus_{i \leq 0} \mathfrak{g}_i, \mathfrak{h}_1)$ как $\mathfrak{h}_2 = \{D \in \mathfrak{g}_2 : [D, \mathfrak{g}_{-1}] \subset \mathfrak{h}_1\}$. Члены $\mathfrak{h}_i$ для $i > 2$ определим аналогично: $\mathfrak{h}_i = \{D \in \mathfrak{g}_i : [D, \mathfrak{g}_{-1}] \subset \mathfrak{h}_{i-1}\}$. Положим $\mathfrak{h}_i = \mathfrak{g}_i$ для $i \leq 0$ и $\mathfrak{h}_* = \bigoplus \mathfrak{h}_i$. Нетрудно проверить, что, во-первых, $\mathfrak{h}_*$ является под-супералгеброй Ли в $\mathfrak{g}$ и, во-вторых, она максимальна среди всех подалгебр с заданной суммой компонент степени не выше 1.

§ 2. Исключительная супералгебра Ли $\mathfrak{bas}(4|4)$

Пусть ω есть нечетная невырожденная суперкососимметрическая билинейная форма на $(n|n)$ -мерном суперпространстве V с матрицей $\begin{pmatrix} 0 & 1_n \\ 1_n & 0 \end{pmatrix}$. Линейные преобразования, сохраняющие ω , образуют супералгебру Ли $\mathfrak{pe}(n)$ и задаются (в действии на строки) матрицами вида $\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a^t \end{pmatrix}$, где $b = b^t$, $c = -c^t$. Супералгебра Ли $\mathfrak{spe}(n)$ выделяется условием $\mathrm{tr} a = 0$. Полагая

$$\deg \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix} \right) = -1, \quad \deg \left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -a^t \end{pmatrix} \right) = 0, \quad \deg \left(\begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) = 1, \quad (2.1)$$

мы задаем $\mathbb{Z}$ -градуировку на $\mathfrak{pe}(n)$. Известно [3], что $\mathfrak{spe}(n) = \mathfrak{pe}(n) \cap \mathfrak{sl}(n|n)$ является простой супералгеброй Ли при $n \geq 3$.

А. Н. Сергеев доказал, что лишь в одном случае, а именно при $n = 4$, супералгебра Ли $\mathfrak{spe}(n)$ обладает нетривиальным центральным расширением, которое мы обозначаем $\mathfrak{as}$. Представим произвольный элемент $A \in \mathfrak{as}$ в виде пары $A = x + dz$, где $x \in \mathfrak{spe}(4)$, $d \in \mathbb{C}$, а z — центральный элемент.

Супералгебра Ли $\mathfrak{as}$ может быть описана с помощью спинорного представления. Пусть $\mathfrak{po}(0|6)$ есть супералгебра Ли функций $\Lambda(\xi, \eta)$ от нечетных переменных $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \eta_1, \eta_2, \eta_3$ со скобкой Пуассона, а $\mathfrak{h}(0|6) = \mathrm{Span}(H_f : f \in \Lambda(\xi, \eta))$. В естественной $\mathbb{Z}$ -градуировке $\mathfrak{h}(0|6) = \bigoplus_{i=-1}^4 \mathfrak{h}(0|6)_i$ нулевая компонента $\mathfrak{h}(0|6)_0$ равна $\mathfrak{o}(6) \cong \mathfrak{sl}(4) \cong \mathfrak{spe}(4)_0$, а (-1) -е компоненты $\mathfrak{h}(0|6)_{-1}$ и $\mathfrak{spe}(4)_{-1}$ являются изоморфными шестимерными модулями. В силу универсальности картановского продолжения $\mathfrak{spe}(4)_1$ вкладывается в $\mathfrak{h}(0|6)_1$. Расширение

Сергеева $\mathfrak{as}$ является результатом ограничения на $\mathfrak{spe}(4) \subset \mathfrak{h}(0|6)$ коцикла, превращающего $\mathfrak{h}(0|6)$ в $\mathfrak{po}(0|6)$. Ясно, что $\deg z = -2$ относительно градуировки (2.1).

Квантование деформирует $\mathfrak{po}(0|6)$ в $\mathfrak{gl}(\Lambda(\xi))$, а сквозное отображение

$$T_\lambda: \mathfrak{as} \rightarrow \mathfrak{po}(0|6) \rightarrow \mathfrak{gl}(\Lambda(\xi))$$

задает семейство представлений $\mathfrak{spin}_\lambda$ супералгебры Ли $\mathfrak{as}$ в $(4|4)$ -мерном пространстве. Точные формулы для T_λ таковы:

$$T_\lambda: \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a^t \end{pmatrix} + dz \mapsto \begin{pmatrix} a & b - \lambda \tilde{c} \\ c & -a^t \end{pmatrix} + \lambda d \cdot 1_{4|4}, \quad (2.2)$$

где $1_{4|4}$ есть единичная матрица, а для кососимметрической матрицы $c_{ij} = E_{ij} - E_{ji}$ мы полагаем $\tilde{c}_{ij} = c_{kl}$ для четной подстановки $(1234) \mapsto (ijkl)$. Ясно, что все T_λ являются неприводимыми.

ТЕОРЕМА 2.1. 1) Для всех $\lambda \neq 0$ картановское продолжение $\mathfrak{f}^\lambda = (\mathfrak{spin}_\lambda, \mathfrak{as})_*$ является бесконечномерной и простой супералгеброй.

2) $\mathfrak{f}^\lambda \cong \mathfrak{f}^\mu$, если $\lambda\mu \neq 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Формула (2.2) определяет естественное вложение $\mathfrak{f}^\lambda$ в $\mathfrak{vect}(4|4)$, такое, что $\mathfrak{f}_{-1}^\lambda = \mathfrak{g}_{-1}$. Пусть $q_1, q_2, q_3, q_4, \xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$ — координаты, в функциях от которых действует $\mathfrak{g}$. Тогда для любого $k \geq 0$ элемент $q_i^{k+1} \partial \xi_i$ принадлежит $\mathfrak{f}_k^\lambda$ и, значит, $\dim \mathfrak{f}^\lambda = \infty$.

Предположим, что $\mathfrak{f}^\lambda$ не проста и $\mathfrak{i} = \bigoplus_{k \geq -1} \mathfrak{i}_k$ является нетривиальным идеалом в $\mathfrak{f}^\lambda$. Пусть $x \in \mathfrak{i}_k, x \neq 0$. Тогда $(\text{ad } \mathfrak{f}_{-1}^\lambda)^{k+1} x$ является ненулевым подпространством в $\mathfrak{f}_{-1}^\lambda$. Неприводимость T_λ означает, что $\mathfrak{i}_{-1} = \mathfrak{f}_{-1}^\lambda$. В силу тождества Якоби $[\mathfrak{i}_{-1}, \mathfrak{f}_1^\lambda] \subset \mathfrak{i}_0$ есть идеал в $\mathfrak{f}_0^\lambda$. Но единственным нетривиальным идеалом в $\mathfrak{f}_0^\lambda = \mathfrak{as}$ является центр. Значит, из включения $q_i \partial \xi_i \in [\mathfrak{i}_{-1}, \mathfrak{h}_1] = [\mathfrak{h}_{-1}, \mathfrak{h}_1]$ следует равенство $\mathfrak{i}_0 = \mathfrak{h}_0$. В частности, $\mathfrak{i}_0$ содержит элемент $T_\lambda(z) = -\lambda \sum (q_i \partial q_i + \xi_i \partial \xi_i)$. Но $[T_\lambda(z), h] = -\lambda k h$ для всех $h \in \mathfrak{f}_k^\lambda$. Следовательно, $\mathfrak{i} = \mathfrak{f}^\lambda$ и $\mathfrak{f}^\lambda$ проста.

Пункт 2) вытекает из изоморфизма неположительных частей. $\square$

Мы будем обозначать изоморфные простые супералгебры Ли $\mathfrak{f}^\lambda$ через $\mathfrak{vas}(4|4)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.2. Так как $\mathfrak{as} \subset \mathfrak{sl}(4|4)$, то $\mathfrak{vas}(4|4) \subset \mathfrak{svect}(4|4)$.

Любое векторное поле $D \in \mathfrak{vect}(4|4)$ представляется в виде

$$D = \sum_{i \leq 4} (P_i \partial \xi_i + Q_i \partial q_i), \quad \text{где } P_i, Q_i \in \mathbb{C}[q, \xi].$$

Тогда система уравнений, описанная в п. 1.5 и выделяющая $\mathfrak{f}^\lambda$ в $\mathfrak{vect}(4|4)$, будет иметь вид

$$\frac{\partial Q_i}{\partial q_j} + (-1)^{p(D)} \frac{\partial P_j}{\partial \xi_i} = 0 \quad \text{для любых } i \neq j, \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial Q_i}{\partial q_i} + (-1)^{p(D)} \frac{\partial P_i}{\partial \xi_i} = \frac{1}{2} \sum_{1 \leq j \leq 4} \frac{\partial Q_j}{\partial q_j} \quad \text{для } i = 1, 2, 3, 4, \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial Q_i}{\partial \xi_j} + \frac{\partial Q_j}{\partial \xi_i} = 0 \quad \text{для любых } i, j, \quad (2.5)$$

$$\frac{\partial P_i}{\partial q_j} - \frac{\partial P_j}{\partial q_i} = (-1)^{p(D)} \lambda \left(\frac{\partial Q_k}{\partial \xi_l} - \frac{\partial Q_l}{\partial \xi_k} \right) \quad \text{для любой четной подстановки } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ i & j & k & l \end{pmatrix}. \quad (2.6)$$

Система (2.3)–(2.6) стандартными методами может быть решена явно. В результате мы получаем следующую теорему.

ТЕОРЕМА 2.3. *Любое векторное поле $D \in \mathfrak{f}^\lambda$ может быть представлено в виде*

$$D = D_f + cZ,$$

где $c \in \mathbb{C}$, $Z = \sum_{i \leq 4} (q_i \partial q_i + \xi_i \partial \xi_i)$, $f \in \mathfrak{sl}^\circ(4)$ и

$$D_f = \text{Le}_f + \lambda \left(-\text{Le}_{\hat{f}} + 2 \sum_{1 \leq i \leq 4; (i,j,k,l) \in A_4} \frac{\partial^3(\Delta^{-1}(f))}{\partial \xi_j \partial \xi_k \partial \xi_l} \partial \xi_i \right),$$

$$\hat{f} = 4\Delta^{-1} \left(\frac{\partial^4(\Delta^{-1}(f))}{\partial \xi_1 \partial \xi_2 \partial \xi_3 \partial \xi_4} \right)$$

(через $A_4 \subset S_4$ мы обозначаем подгруппу четных подстановок, а Δ^{-1} определен в п. 1.2).

СЛЕДСТВИЕ 2.4. 1) *Супералгебра Ли $\mathfrak{f}^\lambda$ является деформацией супералгебры Ли $\mathfrak{sl}^\circ(4) \oplus \mathbb{C}Z$.*

2) *Если $\deg_\xi f \leq 1$, то $D_f = \text{Le}_f$ и, следовательно, подалгебра $\mathfrak{h} = \{cZ + D_f : \deg_\xi f \leq 1, c \in \mathbb{C}\}$ остается жесткой относительно этой деформации.*

3) *Пусть $\Omega = dq_1 \wedge dq_2 \wedge dq_3 \wedge dq_4$ есть форма объема на подстилающем многообразии супермногообразия $\mathcal{C}^{4|4}$. Как мы уже отмечали, элемент объема $\text{vol}(q, \xi)$ во всем суперпространстве $\mathcal{C}^{4|4}$ инвариантен относительно действия $\mathfrak{f}^\lambda$, чего нельзя сказать о форме Ω . Однако она инвариантна относительно жесткой подалгебры $\mathfrak{h}$.*

4) *Пусть $D \in \mathfrak{f}^\lambda$, L_D есть производная Ли вдоль D , а ω^{-1} — бивектор, двойственный к ω . Тогда уравнения (2.3)–(2.6) можно переписать в виде*

$$L_D \omega = \frac{1}{2} \left(\sum \frac{\partial Q_i}{\partial q_i} \right) \omega + \lambda \omega^{-1}(L_D \Omega). \quad (2.7)$$

Заменяя коэффициент при ω в правой части формулы (2.7) на произвольную функцию Ψ_D , но добавив условие $\text{div } D = 0$, автоматически получим, что $\Psi(u, \xi) = \frac{1}{2} \sum \partial Q_i / \partial u_i$. Поэтому супералгебра Ли $\mathfrak{f}^\lambda$ может быть выделена системой уравнений

$$\begin{cases} L_D \omega = \Psi \omega + \lambda \omega^{-1}(L_D \Omega), \\ \text{div } D = 0. \end{cases}$$

§3. Исключительная простая супералгебра Ли $\mathfrak{fas}$ — подалгебра в $\mathfrak{t}(1|6)$

Реализуем контактную супералгебру Ли $\mathfrak{g} = \bigoplus_{i \geq -2} \mathfrak{g}_i = \mathfrak{t}(1|2n)$ производящими функциями из $\mathbb{C}[t, \xi, \eta]$, где $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$, $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_n)$. Непосредственно проверяется, что компонента $\mathfrak{g}_1$ градуировки 1 порождает всю подалгебру $\mathfrak{g}_+ \subset \mathfrak{g}$ элементов положительной градуировки. При этом сама $\mathfrak{g}_1$ как $\mathfrak{g}_0$ -модуль является прямой суммой двух подмодулей $\mathfrak{g}_{\xi\eta} = \Lambda^3(\xi, \eta)$ и $\mathfrak{g}_t = t\Lambda^1(\xi, \eta)$.

Продолжения, порожденные этими подмодулями, хорошо известны:

$$\begin{aligned} (\mathfrak{g}_- \oplus \mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_{\xi\eta})_*^{\text{mt}} &\cong \mathfrak{po}(0|2n) \oplus \mathbb{C}K_t \cong \mathfrak{der}(\mathfrak{po}(0|2n)), \\ (\mathfrak{g}_- \oplus \mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_t)_*^{\text{mt}} &= \mathfrak{g}_{-2} \oplus \mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_t \oplus \mathbb{C}K_{t^2} \cong \mathfrak{osp}(2n|2). \end{aligned} \quad (3.1)$$

Заметим, что подмодуль $\mathfrak{g}_t$ всегда неприводим, а подмодуль $\mathfrak{g}_{\xi\eta}$ тривиален при $n = 1$ и неприводим при всех $n > 1$ и $n \neq 3$. И только в случае $\mathfrak{t}(1|6)$ он разлагается в сумму двух неприводимых подмодулей, которые мы обозначим $\mathfrak{g}_\xi$ и $\mathfrak{g}_\eta$. В этом случае $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{o}(6) \cong \mathfrak{sl}(4)$. Как $\mathfrak{sl}(4)$ -модули, $\mathfrak{g}_\xi$ и $\mathfrak{g}_\eta$ являются симметрическими квадратами $S^2(\text{id})$ и $S^2(\text{id}^*)$ тождественного 4-мерного представления и двойственного к нему соответственно. В реализации производящими функциями $\mathfrak{g}_\xi$ и $\mathfrak{g}_\eta$ получаются друг из друга заменой ξ на η .

ТЕОРЕМА 3.1. 1) *Картановское продолжение $\mathfrak{h}^\xi = (\mathfrak{g}_- \oplus \mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_\xi \oplus \mathfrak{g}_t)_*^{\text{mt}}$ бесконечномерно и просто. Оно изоморфно $\mathfrak{h}^\eta = (\mathfrak{g}_- \oplus \mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_\eta \oplus \mathfrak{g}_t)_*^{\text{mt}}$.*

2) $(\mathfrak{g}_- \oplus \mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_\xi)_*^{\text{mt}} \cong (\mathfrak{g}_- \oplus \mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_\eta)_*^{\text{mt}} \cong \mathfrak{as} \oplus \mathbb{C}K_t \cong \mathfrak{der}(\mathfrak{as})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пункт 2) проверяется непосредственно; простота в п. 1) доказывается аналогично теореме 2.1. Чтобы убедиться в бесконечномерности супералгебры Ли $\mathfrak{h}^\xi$, заметим, что $K_{t^2} \in \mathfrak{h}^\xi$ и

$$\text{ad } K_{t^2} = 2t(t \partial_t + E - 2), \quad \text{где } E = \sum \left(\xi_i \frac{\partial}{\partial \xi_i} + \eta_i \frac{\partial}{\partial \eta_i} \right). \quad (3.2)$$

Следовательно, $\text{Ker}(\text{ad } K_{t^2})$ в $\mathfrak{t}(1|6)$ состоит из полей с такими производящими функциями f , что $\deg_t f + \deg_\xi f + \deg_\eta f - 2 = 0$, т. е. $\text{Ker}(\text{ad } K_{t^2}) \cong \mathfrak{sl}(4) \oplus \mathfrak{g}_t \oplus \mathbb{C}K_{t^2}$. Значит, $\text{ad } K_{t^2}$ задает вложения $\mathfrak{sl}(4)$ -модулей: $\mathfrak{g}_\xi$ в $\mathfrak{h}_3^\xi$ и $\mathfrak{h}_k^\xi$ в $\mathfrak{h}_{k+2}^\xi$ при $k > 1$. $\square$

Мы обозначаем простую исключительную супералгебру Ли, описанную в п. 1) теоремы 3.1, через $\mathfrak{fas}$.

ЗАМЕЧАНИЯ 3.2. 1) Поскольку при $k > 4$ производящие функции всех полей из $\mathfrak{t}(1|6)_k$ делятся на t , из (3.2) следует, что при $k > 2$ оператор $\text{ad } K_{t^2}$ задает изоморфизм компонент $\mathfrak{t}(1|6)_k$ и $\mathfrak{t}(1|6)_{k+2}$. Непосредственно проверяется, что $\mathfrak{h}_k^\xi \oplus \mathfrak{h}_k^\eta = \mathfrak{t}(1|6)_k$ при $k = 3, 4$. Действие $\text{ad } K_{t^2}$ продолжает это равенство на все $k \geq 3$. Таким образом, $\mathfrak{t}(1|6) = \mathfrak{h}^\xi + \mathfrak{h}^\eta$ и в силу (3.1) $\mathfrak{h}^\xi \cap \mathfrak{h}^\eta = \mathfrak{osp}(6|2)$.

2) Как $\mathfrak{sl}(4)$ -модули компоненты $\mathfrak{fas}_k$ при $k \geq 0$ имеют вид $\mathfrak{fas}_{2k} = \text{ad} \oplus \mathbb{C}$, $\mathfrak{fas}_{2k+1} = S^2(\text{id}) \oplus \Lambda^2(\text{id})$.

3) Компонента $\mathfrak{fas}_1$ порождает всю подалгебру $\bigoplus_{k \geq 1} \mathfrak{fas}_k$ компонент положительной градуировки.

§ 4. Исключительное картановское продолжение $\mathfrak{sl}(4|3)$

В этом и следующем параграфах мы используем обозначение $\mathfrak{sg}$ для тривиального центрального расширения супералгебры Ли $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{dg}$ для супералгебры Ли, получающейся из $\mathfrak{g}$ добавлением некоторого оператора внешнего дифференцирования.

Пусть $\mathfrak{u} = \mathfrak{vect}(m|n)$, а $\mathfrak{g} = (\mathfrak{u}_{-1}, \mathfrak{g}_0)_*$ — простая подсупералгебра Ли в $\mathfrak{u}$. Пусть, кроме того, существует элемент $D \in \mathfrak{u}_0$, задающий внешнее дифференцирование на $\mathfrak{g}$ и не имеющий ядра на $\mathfrak{u}_+ = \bigoplus_{i>0} \mathfrak{u}_i$. Нас будет интересовать продолжение $\tilde{\mathfrak{g}} = (\mathfrak{g}_{-1}, \mathfrak{g}_0 \oplus \mathbb{C}D)_*$.

ЛЕММА 4.1. 1) Либо продолжение $\tilde{\mathfrak{g}}$ просто, либо $\tilde{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g} \oplus \mathbb{C}D$.

2) Если $\tilde{\mathfrak{g}}$ просто, то для любого $v \in \mathfrak{g}_{-1}$ найдется такой элемент $F \in \tilde{\mathfrak{g}}_1$, что $[v, F] = D + g$, где $g \in \mathfrak{g}_0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательство п. 1) аналогично доказательству теоремы 2.1. Для доказательства п. 2) достаточно заметить, что отображение $F \mapsto \alpha_F \in \mathfrak{g}_{-1}^*$, определенное соотношением $[v, F] = \alpha_F(v)D + g$, где $g \in \mathfrak{g}_0$, $v \in \mathfrak{g}_{-1}$, $F \in \tilde{\mathfrak{g}}_1$, задает гомоморфизм $\mathfrak{g}_0$ -модулей. $\square$

Пусть $\mathfrak{u} = \mathfrak{vect}(2^{n-1}|2^{n-1} - 1)$. Реализуем $\mathfrak{u}_{-1}$ как $\Pi(\Lambda(\xi_1, \dots, \xi_n)/\mathbb{C} \cdot 1)$. Как мы отмечали в п. 1.5, простая супералгебра Ли $\mathfrak{le}(n; n)$ является картановским продолжением $(\Pi(\Lambda(\xi_1, \dots, \xi_n)/\mathbb{C} \cdot 1), \mathfrak{vect}(0|n))_*$. В качестве D возьмем градуирующий оператор в $\mathfrak{u}$. Тогда $\mathfrak{g}_0 \oplus \mathbb{C}D \cong \mathfrak{vect}(0|n)$.

ПРИМЕР 4.2. При $n = 2$ имеем $\dim \mathfrak{g}_{-1} = 2|1$, $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{vect}(0|2) \cong \mathfrak{sl}(2|1)$ и $(\mathfrak{g}_{-1}, \mathfrak{g}_0)_* = \mathfrak{le}(2; 2) \cong \mathfrak{svect}(2|1)$. Тогда $\mathfrak{c}(\mathfrak{g}_0) = \mathfrak{gl}(2|1)$ и $\tilde{\mathfrak{g}} = \mathfrak{vect}(2|1)$.

ТЕОРЕМА 4.3. 1) Продолжение $\tilde{\mathfrak{g}} = (\Pi(\Lambda(3)/\mathbb{C} \cdot 1), \mathfrak{vect}(0|3))_*$ является простой бесконечномерной подсупералгеброй в $\mathfrak{vect}(4|3)$.

2) $\tilde{\mathfrak{g}} = (\Pi(\Lambda(\xi_1, \dots, \xi_n)/\mathbb{C} \cdot 1), \mathfrak{vect}(0|n))_* \cong \mathfrak{d}(\mathfrak{le}(n; n))$ при $n > 3$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пункт 1) в силу п. 1) леммы 4.1 следует из явного описания векторных полей из $\tilde{\mathfrak{g}}$, которое мы приведем в теореме 4.4. Пункт 2) докажем от противного. Пусть $\tilde{\mathfrak{g}}$ проста. Возьмем $v = \xi_1 \dots \xi_n$ и F_v , как в п. 2) леммы 4.1. Тогда $[F, v_1](v) = (-1)^{p(v)p(v_1)}[F, v](v_1) = -v_1 + gv_1$ для любого $v_1 \in \mathfrak{g}_{-1}$ и некоторого $g \in \mathfrak{g}_0$. В рассматриваемом $\tilde{\mathfrak{g}}_0$ -модуле $\mathfrak{g}_{-1}$ элемент v может отображаться только в функции степени $\geq n - 1$. Следовательно, для всех функций $v_1 \in \mathfrak{g}_{-1}$ степени $< n - 1$ имеем $gv_1 = v_1 + \varphi(v_1)$, где $\deg \varphi(v_1) \geq n - 1$. Но если $n - 2 \geq 2$, то таких операторов в $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{vect}(0|n)$ просто нет. Полученное противоречие означает, что при $n > 3$ супералгебра Ли $\tilde{\mathfrak{g}}$ не проста. $\square$

Исключительную простую супералгебру Ли $(\Pi(\Lambda(3)/\mathbb{C} \cdot 1), \mathfrak{vect}(0|3))_*$ мы будем обозначать через $\mathfrak{sl}(4|3)$. Опишем ее более подробно. Переобозначим базис в $\mathfrak{sl}(4|3)_{-1} = \Pi(\Lambda(\eta_1, \eta_2, \eta_3))$, полагая

$$\Pi(\xi_1 \xi_2 \xi_3) \mapsto -\partial y, \quad \Pi(\xi_i) \mapsto -\partial q_i, \quad \Pi\left(\frac{\partial \xi_1 \xi_2 \xi_3}{\partial \xi_i}\right) \mapsto -\partial \xi_i.$$

Каждый элемент $D \in \mathfrak{vect}(4|3)$ имеет вид $D = \sum_{i \leq 3} (P_i \partial \xi_i + Q_i \partial q_i) + Y \partial y$, где $P_i, Q_i, Y \in \mathbb{C}[y, q, \xi]$. В соответствии с п. 1.5 картановское продолжение $\mathfrak{sl}(4|3)$ может быть выделено в $\mathfrak{vect}(4|3)$ системой линейных дифференциальных уравнений.

ТЕОРЕМА 4.4. 1) Однородное (относительно четности) векторное поле $D \in \mathbf{vect}(4|3)$ принадлежит $\mathbf{vle}(4|3)$ тогда и только тогда, когда оно удовлетворяет следующей системе уравнений:

$$\frac{\partial Q_i}{\partial q_j} + (-1)^{p(D)} \frac{\partial P_j}{\partial \xi_i} = 0 \quad \text{для любых } i \neq j, \quad (4.1)$$

$$\frac{\partial Q_i}{\partial q_i} + (-1)^{p(D)} \frac{\partial P_i}{\partial \xi_i} = \frac{1}{2} \left(\sum_{1 \leq j \leq 3} \frac{\partial Q_j}{\partial q_j} + \frac{\partial Y}{\partial y} \right) \quad \text{для } i = 1, 2, 3, \quad (4.2)$$

$$\frac{\partial Q_i}{\partial \xi_j} + \frac{\partial Q_j}{\partial \xi_i} = 0 \quad \text{для любых } i, j, \quad \text{в частности, } \frac{\partial Q_i}{\partial \xi_i} = 0, \quad (4.3)$$

$$\frac{\partial P_i}{\partial q_j} - \frac{\partial P_j}{\partial q_i} = -(-1)^{p(D)} \frac{\partial Y}{\partial \xi_k} \quad \text{для любой четной подстановки } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ i & j & k \end{pmatrix}, \quad (4.4)$$

$$\frac{\partial Q_i}{\partial y} = 0 \quad \text{для } i = 1, 2, 3, \quad (4.5)$$

$$\frac{\partial P_k}{\partial y} = (-1)^{p(D)} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial Q_i}{\partial \xi_j} - \frac{\partial Q_j}{\partial \xi_i} \right) \quad \text{для любой четной подстановки } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ i & j & k \end{pmatrix}. \quad (4.6)$$

2) Каждое решение системы (4.1)–(4.6) имеет вид

$$\begin{aligned} D = & \text{Le}_f + yB_f - (-1)^{p(f)} \left(y\Delta(f) + y^2 \frac{\partial^3 f}{\partial \xi_1 \partial \xi_2 \partial \xi_3} \right) \partial y \\ & + B_g - (-1)^{p(g)} \left(\Delta(g) + 2y \frac{\partial^3 g}{\partial \xi_1 \partial \xi_2 \partial \xi_3} \right) \partial y, \end{aligned} \quad (4.7)$$

где $f, g \in \mathbb{C}[q, \xi]$ и оператор B_f задается формулой

$$B_f = \frac{\partial^2 f}{\partial \xi_2 \partial \xi_3} \frac{\partial}{\partial \xi_1} + \frac{\partial^2 f}{\partial \xi_3 \partial \xi_1} \frac{\partial}{\partial \xi_2} + \frac{\partial^2 f}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} \frac{\partial}{\partial \xi_3}. \quad (4.8)$$

Доказательство чисто техническое и совершенно стандартное.

Заметим, что по построению у нас есть вложение $i_1: \mathfrak{le}(3; 3) \rightarrow \mathbf{vle}(4|3)$, сохраняющее градуировку супералгебры $\mathfrak{le}(3; 3)$. Формулы (4.7), (4.8) позволяют описать его явно:

$$i_1(\text{Le}_{f(q)}) = \text{Le}_{\sum (\partial f / \partial q_i) \xi_j \xi_k - yf},$$

где y рассматривается как параметр, а (i, j, k) — четная подстановка,

$$i_1(\text{Le}_{\sum f_i(q) \xi_i}) = \text{Le}_f - \varphi(q) \sum \xi_i \partial \xi_i + (-\varphi(q)y + \Delta(\varphi(q) \xi_1 \xi_2 \xi_3)) \partial y,$$

где $\varphi(q) = \Delta(f)$,

$$i_1(\text{Le}_{\sum_{1 \leq i \leq 3, (i,j,k) \in A_3} \psi_i(q) \xi_k \xi_l}) = B_f - \Delta(f) \partial y, \quad i_1(\text{Le}_{\psi(q) \xi_1 \xi_2 \xi_3}) = -\psi(q) \partial y.$$

Кроме того, из (4.7), (4.8) видно, что у нас есть и второе вложение $i_2: \mathfrak{le}(3) \rightarrow \mathbf{vle}(4|3)$, сохраняющее градуировку супералгебры $\mathfrak{le}(3)$:

$$i_2(\text{Le}_f) = \text{Le}_f + yB_f - (-1)^{p(f)} \left(y\Delta(f) + y^2 \frac{\partial^3 f}{\partial \xi_1 \partial \xi_2 \partial \xi_3} \right) \partial y.$$

При этом $i_1(\mathfrak{le}(3; 3)) + i_2(\mathfrak{le}(3)) = \mathfrak{vle}(4|3)$, а $i_1(\mathfrak{le}(3; 3)) \cap i_2(\mathfrak{le}(3)) = \mathfrak{sl}^\circ(3; 3) \cong \mathfrak{sl}^\circ(3)$. Отображение φ , определяемое формулами

$$\varphi|_{i_1(\mathfrak{le}(3; 3))} = \text{sign} \circ i_2 i_1^{-1}, \quad \varphi|_{i_2(\mathfrak{le}(3))} = i_1 i_2^{-1},$$

задает нетривиальный автоморфизм супералгебры Ли $\mathfrak{vle}(4|3)$, ограничение которого на $\mathfrak{sl}^\circ(3)$ есть R (см. п. 1.3). Из формул (4.7), (4.8) видно также, что этот автоморфизм может быть описан во внутренних терминах супералгебры Ли $\mathfrak{vect}(4|3)$ как переградуировка: $\deg y = -1$, $\deg \xi_i = 0$, $\deg q_i = 1$. Конечно, на всей супералгебре $\mathfrak{vect}(4|3)$ эта переградуировка нарушает как условие конечномерности однородных компонент, так и условие конечности глубины. Однако на $\mathfrak{vle}(4|3)$ она удовлетворяет обоим этим условиям.

§5. Исключительные простые супералгебры Ли глубины 2 $\mathfrak{mb}(4|5)$ и $\mathfrak{ksle}(9|6)$

5.1. Две последние простые исключительные супералгебры Ли строятся с помощью конструкции $\mathfrak{m}\mathfrak{k}$ -продолжения.

Пусть $\mathfrak{u} = \bigoplus_{i \geq -2} \mathfrak{u}_i$ есть либо $\mathfrak{m}(n)$, либо $\mathfrak{k}(2m+1|n)$; пусть $\mathfrak{g} = (\mathfrak{u}_-, \mathfrak{g}_0)^{\mathfrak{m}\mathfrak{k}}$ — такая подалгебра в $\mathfrak{u}$, для которой подпространство $\mathfrak{u}_{-2}$ является центром в $\mathfrak{g}$, а факторалгебра $\mathfrak{g}/\mathfrak{u}_{-2}$ проста. Пусть, кроме того, $D \in \mathfrak{u}_0$ задает внешнее дифференцирование на $\mathfrak{g}$ и не имеет ядра на $\mathfrak{u}_{-2} \oplus \mathfrak{u}_+$, где $\mathfrak{u}_+ = \bigoplus_{i > 0} \mathfrak{u}_i$. Нас будет интересовать $\mathfrak{m}\mathfrak{k}$ -продолжение $\tilde{\mathfrak{g}} = (\mathfrak{g}_-, \mathfrak{g}_0 \oplus \mathbb{C}D)_*^{\mathfrak{m}\mathfrak{k}}$.

ЛЕММА 5.1. *Либо $\tilde{\mathfrak{g}}$ проста, либо $\tilde{\mathfrak{g}} \cong \mathfrak{d}\mathfrak{g}$*

Эта лемма аналогична лемме 4.1 для картановского продолжения, и ее доказательство стандартно.

5.2. Описание $\mathfrak{mb}(4|5)$. Пусть $\hat{\mathfrak{g}} = \mathfrak{b}_{1/2}(n; n)$ (см. п. 1.3). Тогда действие $\hat{\mathfrak{g}}_0$ на $\hat{\mathfrak{g}}_{-1}$ сохраняет невырожденную суперкососимметрическую форму

$$\omega(\varphi\sqrt{\text{vol}}, \psi\sqrt{\text{vol}}) = \int \varphi\psi \text{vol}, \quad p(\omega) \equiv n \pmod{2}. \quad (5.1)$$

Поэтому мы можем рассмотреть нетривиальное центральное расширение $\mathfrak{g} = \tilde{\mathfrak{c}}(\mathfrak{b}_{1/2}(n; n))$ супералгебры Ли $\hat{\mathfrak{g}}$ глубины 2, задаваемое с помощью формы ω . Это центральное расширение естественным образом вкладывается в

$$\mathfrak{u} = \begin{cases} \mathfrak{m}(2^{n-1}) & \text{для нечетных } n, \\ \mathfrak{k}(1 + 2^{n-1}|2^{n-1}) & \text{для четных } n. \end{cases}$$

В качестве оператора D , участвующего в лемме 5.1, возьмем градуирующий оператор из $\mathfrak{u}_0$, т.е. $\mathfrak{g}_0 \oplus \mathbb{C}D \cong \mathfrak{c}(\mathfrak{g}_0)$.

ПРИМЕР 5.2. Пусть $n = 2$. Тогда $\mathfrak{g}_- = \mathfrak{hei}(2|2)$ и $\mathfrak{c}(\mathfrak{g}_0) = \mathfrak{cvect}(0|2) \cong \mathfrak{cosp}(2|2)$, а $(\mathfrak{hei}(2|2), \mathfrak{cvect}(0|2))_* \cong \mathfrak{k}(3|2)$. Положим

$$\mathfrak{g}_- = \begin{cases} \mathfrak{ab}(2^{n-1}) & \text{для нечетных } n, \\ \mathfrak{hei}(2^{n-1}|2^{n-1}) & \text{для четных } n. \end{cases}$$

ТЕОРЕМА 5.3. 1) $(\mathfrak{ab}(4), \mathfrak{cvect}(0|3))_*^{\mathfrak{m}\mathfrak{k}}$ является простой супералгеброй Ли.

2) $(\mathfrak{g}_-, \mathfrak{cvect}(0|n))_*^{\mathfrak{m}\mathfrak{k}} \cong \mathfrak{d}(\mathfrak{g}_-, \mathfrak{vect}(0|n))_*^{\mathfrak{m}\mathfrak{k}}$ для $n > 3$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу леммы 5.1 в п. 1) нам достаточно просто проверить, что в компоненте $\mathfrak{m}(4)_1$ есть элемент, все коммутаторы которого с $\mathfrak{m}(4)_{-1}$

попадают в $\mathbf{svect}(0|3) \subset \mathbf{m}(4)_0$, но не все в $\mathbf{vect}(0|3)$. Это проверяется непосредственным вычислением. Пункт 2) доказывается аналогично теореме 4.3. $\square$

Исключительную простую супералгебру Ли, указанную в п. 1) теоремы 5.3, мы будем обозначать $\mathbf{mb}(4|5)$. Опишем ее строение. Для этого рассмотрим две супералгебры Ли, изоморфные (изоморфизм осуществляется с помощью R , см. п. 1.3) друг другу как абстрактные, но не как $\mathbb{Z}$ -градуированные супералгебры, $\mathfrak{g} = \tilde{\mathfrak{c}}(\mathfrak{b}_{1/2}(3;3))$ и $\mathfrak{h} = \tilde{\mathfrak{c}}(\mathfrak{b}_{-3,1}(3))$. По построению у нас есть вложение $i_1: \mathfrak{g} \rightarrow \mathbf{mb}(4|5)$, сохраняющее $\mathbb{Z}$ -градуировку супералгебры $\mathfrak{g}$. Кроме того, $\mathfrak{g} \supset \mathfrak{esle}^\circ(3;3)$ (см. п. 1.4). Тогда $i_2 = i_1 R|_{\mathfrak{esle}^\circ(3;3)}$ задает вложение, сохраняющее градуировку в $\mathfrak{esle}^\circ(3)$. Неположительные части супералгебр $\mathfrak{h}$ и $\mathfrak{esle}^\circ(3)$ отличаются лишь одним элементом $z = M_- \sum q_i \xi_i - 3\tau$. Непосредственным вычислением проверяется, что действие z на $\mathfrak{h}_{-1}$ совпадает с действием элемента $-3D - \frac{1}{2}i_1 R(z)$ на $i_2(\mathfrak{h}_{-1})$. Таким образом, вложение i_2 продолжается до вложения неположительной части супералгебры $\mathfrak{h}$, а в силу универсальности $\mathbf{m}^\mathfrak{k}$ -продолжения и до вложения всей $\mathfrak{h}$. При этом $i_1(\tilde{\mathfrak{c}}(\mathfrak{b}_{1/2}(3;3))) + i_2(\tilde{\mathfrak{c}}(\mathfrak{b}_{-3,1}(3))) = \mathbf{mb}(4|5)$, а $i_1(\tilde{\mathfrak{c}}(\mathfrak{b}_{-1/2}(3;3))) \cap i_2(\tilde{\mathfrak{c}}(\mathfrak{b}_{-3,1}(3))) = \mathfrak{esle}^\circ(3)$. Отображение φ , такое, что

$$\varphi|_{i_1(\tilde{\mathfrak{c}}(\mathfrak{b}_{1/2}(3;3)))} = \text{sign} \circ i_2 i_1^{-1}, \quad \varphi|_{i_2(\tilde{\mathfrak{c}}(\mathfrak{b}_{-3,1}(3)))} = i_1 i_2^{-1}$$

задает нетривиальный автоморфизм супералгебры $\mathbf{mb}(4|5)$, ограничение которого на $\mathfrak{esle}^\circ(3)$ есть R .

Введем координаты $u_0, u_1, u_2, u_3, \eta_0, \eta_1, \eta_2, \eta_3$ на $\mathbf{m}(4)$ (в реализации производящими функциями) по формулам $u_0 = i_1(1)$, $\eta_0 = i_1(\xi_1 \xi_2 \xi_3)$, $\eta_k = i_1(\xi_k)$, $u_k = i_1(\partial(\xi_1 \xi_2 \xi_3)/\partial \xi_k)$ при $k > 0$. Тогда автоморфизм φ может быть описан во внутренних терминах алгебры $\mathbf{m}(4)$ как переградуировка: $\text{gr } f = \deg f - 1$ и $\deg u_0 = -1$, $\deg \eta_k = 0$, $\deg u_k = \deg \tau = 1$, $\deg \eta_0 = 2$. Как и в случае $\mathbf{vle}(4|3)$, эта переградуировка действует очень плохо на всей алгебре $\mathbf{m}(4)$.

5.3. Описание $\mathfrak{tsle}(9|6)$. Определим нетривиальное центральное расширение $\mathfrak{g} = \tilde{\mathfrak{c}}(\mathfrak{sl}^\circ(n;n))$ глубины 2 супералгебры Ли $\mathfrak{sl}^\circ(n;n)$. Имеем $\mathfrak{g}_0 = \mathbf{svect}(0|n)$, $\mathfrak{g}_{-1} = \Pi(\tilde{\Lambda}(n)/\mathbb{C} \cdot 1)$. Центральное расширение строится с помощью суперкососимметрической $\mathfrak{g}_0$ -инвариантной формы ω , определенной на $\mathfrak{g}_{-1}$:

$$\omega(f, g) = \int f g \text{vol}(\xi).$$

Тогда

$$\mathfrak{g}_- = \begin{cases} \mathfrak{ab}(2^{n-1} - 1) & \text{для нечетных } n, \\ \mathfrak{h}\mathfrak{ei}(2^{n-1}|2^{n-1} - 2) & \text{для четных } n. \end{cases}$$

Это означает, что $\mathbf{m}^\mathfrak{k}$ -продолжение $(\mathfrak{g}_{-1}, \mathfrak{g}_0)_*^{\mathbf{m}^\mathfrak{k}}$ может быть вложено в $\mathfrak{u} = \mathfrak{m}(2^{n-1} - 1)$ при нечетных n и в $\mathfrak{u} = \mathfrak{k}(1 + 2^{n-1}|2^{n-1} - 2)$ при четных n .

Пусть $x = \sum \xi_i \partial \xi_i$ — оператор стандартной $\mathbb{Z}$ -градуировки в $\mathbf{svect}(0|n)$, а $z = M_\tau$ или $z = K_t$ — оператор $\mathbb{Z}$ -градуировки в $\mathfrak{u}$. Тогда для любых $a, b \in \mathbb{C}$ элемент $ax + bz$ задает внешнее дифференцирование $\mathfrak{g}_0$. Положим $\mathbf{svect}_{a,b}(n) = \mathbf{svect}(0|n) \oplus \mathbb{C}(ax + bz)$. Нас будет интересовать $\mathbf{m}^\mathfrak{k}$ -продолжение $(\mathfrak{g}_-, \mathbf{svect}_{a,b}(n))_*^{\mathbf{m}^\mathfrak{k}}$.

ПРИМЕР 5.4. Пусть $n = 3$. Тогда $\mathfrak{g}_{-1} = \Pi(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_1 \xi_2, \xi_1 \xi_3, \xi_2 \xi_3)$ и $\mathfrak{g}_- \cong (\mathfrak{b}_\lambda(3))_- = \mathfrak{ab}(3)$ для любых a, b , а $\mathfrak{g}_0 = \mathbf{svect}(0|3) \cong \mathfrak{spe}(3)$. Поэтому $\mathfrak{g}_0 \oplus \mathbb{C}(ax + bz) \cong (\mathfrak{b}_\lambda(3))_0$ для $\lambda = -b/3a$ и $(\mathfrak{ab}(3), \mathbf{svect}_{a,b}(3))_*^{\mathbf{m}^\mathfrak{k}} \cong \mathfrak{b}_\lambda(3)$. В частности,

$$(\mathfrak{ab}(3), \mathbf{svect}_{1,3}(3))_*^{\mathbf{m}^\mathfrak{k}} \cong \mathfrak{sm}(3) \quad \text{и} \quad (\mathfrak{ab}(3), \mathbf{svect}_{1,0}(3))_*^{\mathbf{m}^\mathfrak{k}} \cong \mathfrak{b}(3).$$

ТЕОРЕМА 5.5. 1) $(\mathfrak{hei}(8|6), \mathfrak{svect}_{3,4}(4))_*^{\mathfrak{m}\mathfrak{t}}$ является простой супералгеброй Ли.
 2) При $n > 4$, а также при $(a, b) \notin \mathbb{C}(3, 4)$ и $n = 4$ имеем изоморфизм $(\mathfrak{g}_-, \mathfrak{svect}_{a,b}(n))_*^{\mathfrak{m}\mathfrak{t}} \cong \mathfrak{d}(\mathfrak{g}_-, \mathfrak{svect}(0|n))_*^{\mathfrak{m}\mathfrak{t}}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пункт 1) получается с помощью леммы 5.1 прямыми вычислениями. Пункт 2) доказывается аналогично теореме 4.3. $\square$

Мы будем обозначать простую исключительную супералгебру Ли из п. 1) через $\mathfrak{fsle}(9|6)$.

Для описания ее строения заметим, что у нас уже есть вложение $i_1: \mathfrak{g} = \tilde{\mathfrak{c}}(\mathfrak{sl}^\circ(n; n)) \rightarrow \mathfrak{fsle}(9|6)$. Кроме того, $\mathfrak{g} \supset \mathfrak{as}$, причем это вложение сохраняет $\mathbb{Z}$ -градуировку (2.1):

$$\begin{aligned} \mathfrak{as}_{-2} &= \mathfrak{g}_{-2}, & \mathfrak{as}_{-1} &= (\mathfrak{g}_{-1})_{\bar{1}} = \Pi(\Lambda^2(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)), \\ \mathfrak{as}_0 &= \mathfrak{sl}(4) \subset \mathfrak{g}_0 = \mathfrak{svect}(0|4), & \mathfrak{as}_1 &= \Pi(S^2(q_1, q_2, q_3, q_4)) \subset \mathfrak{g}_1. \end{aligned}$$

Из теоремы 3.1 следует, что $\mathfrak{as} \subset \mathfrak{fas}$, причем неположительные части этих супералгебр отличаются друг от друга лишь одним элементом K_t . Переводя K_t в элемент $-(3x + 4z)/2$, получим вложение неположительной части супералгебры $\mathfrak{fas}$ в $\mathfrak{fsle}(9|6)$, продолжающееся до вложения $i_2: \mathfrak{fas} \rightarrow \mathfrak{fsle}(9|6)$. При этом $i_1(\tilde{\mathfrak{c}}(\mathfrak{sl}^\circ(4; 4))) \cap i_2(\mathfrak{fas}) = \mathfrak{as}$. Однако $i_1(\tilde{\mathfrak{c}}(\mathfrak{sl}^\circ(4; 4))) + i_2(\mathfrak{fas}) \neq \mathfrak{fsle}(9|6)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Алексеевский Д. В., Лейтес Д. А., Щепочкина И. М. Примеры простых бесконечномерных супералгебр Ли векторных полей. С. R. Acad. Bulgare Sci., **34**, №9, 1187–1190 (1980).
2. Grozman P., Leites D., Shchepochkina I. Lie superalgebras of string theories. Preprint hep-th 9702121.
3. Kac V. G. Lie superalgebras. Adv. Math., **26**, 8–96 (1977).
4. Kotchetkoff Yu. Déformations de superalgèbres de Buttin et quantification. С. R. Acad. Sci. Paris Sér. I, **299**, No. 14, 643–645 (1984).
5. Кочетков Ю. Ю. Деформации супералгебр Ли. Деп. ВИНТИ, М., 384–85 (1985).
6. Лейтес Д. А. Новые супералгебры Ли и механика. ДАН СССР, **18**, №5, 1277–1280 (1977).
7. Лейтес Д. А. Супералгебры Ли. В кн.: Современные проблемы математики, т. 25, ВИНТИ, М., 1984, с. 3–49.
8. Leites D. Quantization. Supplement 3. In: Berezin F., Shubin M. Schrödinger equation. Kluwer, Dordrecht, 1991, pp. 483–522.
9. Post G., Shchepochkina I. Explicit bracket in an exceptional simple Lie superalgebra. Принято в Internat. J. Algebra Comput. (physics 9703022).
10. Щепочкина И. М. Исключительные простые бесконечномерные супералгебры Ли. С. R. Bulgare Sci., **36**, No. 3, 313–314 (1983).
11. Shchepochkina I. Maximal subalgebras of simple Lie superalgebras. In: Seminar on Supermanifolds (Leites D., ed.), No. 32, Reports of Stockholm University, 1992, pp. 1–43 (hep-th 9702120).
12. Стернберг С. Лекции по дифференциальной геометрии. Мир, М., 1970.