Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Васильев, Об одной задаче М. Э. Казаряна, *Функци. анализ и его прил.*, 1999, том 33, выпуск 3, 73–75

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa367>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.12

26 апреля 2023 г., 10:24:32

Об одной задаче М. Э. Казаряна*

© 1999. В. А. ВАСИЛЬЕВ

Мы доказываем, что группа симметрий ростка функции с нулевой 2-струей и изолированной особенностью не имеет компактных подгрупп положительной размерности.

Обозначим через $\text{Diff}_0(\mathbb{C}^n)$ и $\text{Diff}_0(\mathbb{R}^n)$ соответственно группы ростков диффеоморфизмов $(\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^n, 0)$ и $(\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$.

ТЕОРЕМА 1_С. *Допустим, что $f: (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ — росток голоморфной функции с изолированной особенностью в 0 и его 2-струя j^2f равна 0. Пусть G — некоторая компактная группа Ли его симметрий, т.е. подгруппа в $\text{Diff}_0(\mathbb{C}^n)$, такая, что $f \circ g \equiv f$ для любого $g \in G$. Тогда G дискретна.*

ТЕОРЕМА 1_Р. *Допустим, что $f: (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$ — росток C^∞ -гладкой функции с конечным числом Милнора и его 2-струя j^2f равна 0. Пусть $G \subset \text{Diff}_0(\mathbb{R}^n)$ — некоторая компактная группа его симметрий. Тогда G дискретна.*

Последнее утверждение было высказано М. Э. Казаряном в качестве гипотезы в связи с его работами по эквивариантной теории гомологий (см. [3] и его же приложение к русскому переводу книги [5]). А именно, согласно этим работам, наша теорема 1_Р завершает доказательство следующего утверждения:

Группы когомологий введенного в [5] универсального комплекса классов стабильной правой эквивалентности ростков функций изоморфны (по модулю кручения или с коэффициентами в поле нулевой характеристики) группе когомологий стабильного лагранжева грассманиана. В частности, все целочисленные лагранжевы характеристические классы задаются как классы, двойственные по Пуанкаре к подходящим циклам лагранжевых особенностей.

Доказательства. Пусть G — компактная положительномерная группа симметрий вещественной или комплексной функции f с конечным числом Милнора.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1 (А. Картан, С. Бохнер, см., например [4]). *Голоморфное (соответственно C^∞ -гладкое) действие компактной группы Ли на комплексном (соответственно вещественном) гладком многообразии вблизи своей неподвижной точки голоморфно (соответственно C^∞ -) эквивалентно линейному.*

Итак, мы можем считать, что наша группа G является подгруппой группы $GL(\mathbb{C}^n)$ (соответственно $GL(\mathbb{R}^n)$). Тогда в силу теоремы о достаточной струе (см., например [2]) она также является группой симметрий некоторой полиномиальной функции с конечным числом Милнора, а именно любого достаточно высокого тейлоровского приближения ростка f в 0. Поэтому мы можем считать, что f — полином. Если f — вещественная функция, то очевидное продолжение действия группы G в комплексную область сохраняет очевидную комплексификацию полинома f ; поэтому теорема 1_Р сводится к теореме 1_С.

Наконец, мы можем считать, что $G = S^1$. Действительно, любая недискретная компактная группа Ли содержит такую подгруппу. отождествим ее с еди-

*Выполнено при поддержке Миллеровского института фундаментальных научных исследований, INTAS (проект 96-713) и РФФИ (проект 98-01-00555).

ничной окружностью в $\mathbb{C}^1$, так что координата t на S^1 — это комплексное число, такое, что $|t| = 1$.

Из леммы Шура и теоремы Петера–Вейля немедленно следует, что любое представление абелевой компактной группы Ли в $\mathbb{C}^n$ распадается в прямую сумму одномерных представлений.

В случае группы S^1 это означает, что найдутся целые числа $a_1, \dots, a_n$, такие, что в подходящих линейных координатах $z_1, \dots, z_n$ на $\mathbb{C}^n$ это действие имеет следующий вид:

$$G_t: (z_1, \dots, z_n) \mapsto (t^{a_1} z_1, \dots, t^{a_n} z_n).$$

Рассмотрим тейлоровское разложение функции f в этой системе координат: $f = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}_+^n} f_\alpha z^\alpha$, где $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ — мультииндексы, f_α — коэффициенты, а $z^\alpha \equiv z_1^{\alpha_1} \dots z_n^{\alpha_n}$.

Поскольку мы предполагаем, что действие группы S^1 нетривиально, по меньшей мере одно из чисел a_i отлично от нуля. Поэтому все мультииндексы α , соответствующие ненулевым коэффициентам f_α , лежат в гиперплоскости $L(a)$, заданной условием $a_1 \alpha_1 + \dots + a_n \alpha_n = 0$.

Рассмотрим пересечение этой гиперплоскости с симплексом в $\mathbb{R}_+^n$, выделенным уравнением $\sum \alpha_i = 3$.

Этот симплекс содержит n меньших симплексов $\Delta_1, \dots, \Delta_n$, гомотетичных ему и расположенных при всех его вершинах, а именно, Δ_i — выпуклая оболочка точки $(0, \dots, 0, 3, 0, \dots, 0)$ (3 на i -м месте) и $n - 1$ точек, получающихся из нее заменой 3 на 2 и одного из нулей на 1.

Теперь теорема 1 $_{\mathbb{C}}$ вытекает из следующих двух предложений.

Рассмотрим выпуклую оболочку объединения всех точек $\alpha \in \mathbb{Z}^n$, таких, что $f_\alpha \neq 0$, и начала координат в $\mathbb{Z}^n$. Очевидно, эта выпуклая оболочка лежит в плоскости $L(a)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Если f имеет изолированную особенность в 0 и $j^2 f = 0$, то эта выпуклая оболочка должна пересекаться со всеми n симплексами Δ_i .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Гиперплоскость в $\mathbb{R}^n$, проходящая через начало координат, не может пересекать все n симплексов Δ_i одновременно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 2. Полином f определяет изолированную особенность; поэтому для любого i он содержит моном $f_\alpha z^\alpha$, $f_\alpha \neq 0$, показатель α которого лежит на расстоянии не более 1 от i -й координатной оси (см. например [1, 2]). Но если $\deg \alpha \geq 3$, то отрезок, соединяющий такую точку α и 0, пересекает симплекс Δ_i . $\square$

Предложение 3 эквивалентно следующему утверждению: знак определителя любых векторов $v_1, \dots, v_n$, $v_i \in \Delta_i$, не зависит от выбора этих n векторов.

Чтобы доказать это утверждение, введем норму $\sum |a_i|$ в $\mathbb{R}^n$. Тогда матрица, образованная координатными разложениями наших n векторов v_i , равна $2I + A$, где I — единичная матрица, а $\|A\| \leq 1$. Определитель любой такой матрицы всегда положителен, и наше предложение доказано.

Я очень благодарен В. В. Сергановой и М. Э. Казаряну за полезные беседы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Арнольд В. И. УМН, **29**, вып. 2, 9–49 (1974).
2. Арнольд В. И., Варченко А. Н., Гусейн-Заде С. М. Особенности дифференцируемых отображений. Т. 1, Наука, М., 1982.
3. Казарян М. Э. УМН, **50**, вып. 4, 45–70 (1995).
4. Кушниренко А. Г. Функциональный анализ и его прил., **1**, вып. 1, 103–104 (1967).
5. Vassiliev V. A. Lagrange and Legendre

Characteristic Classes, 2-d ed., Gordon & Breach Science Publ., New York a.o., 1993.
 Русский перевод: Васильев В. А., Лагранжевы и лежандровы характеристические классы. Изд-во МЦНМО, 1999.

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН

Поступило в редакцию
 27 апреля 1999 г.

УДК 517.9

Об одном представлении для решения Йоста обыкновенных дифференциальных уравнений

© 1999. И. М. Гусейнов

В 1955 г. Б. Я. Левин [1] ввел «треугольное» представление для решения дифференциального уравнения второго порядка, сохраняющего асимптотику в бесконечности, т.е. для решения Йоста. Это представление играло важную роль при решении обратных задач теории рассеяния (см., например, [2]). Для дифференциальных уравнений высокого порядка с аналитическими коэффициентами подобная задача решена в работах [3–5]. Вопрос о необходимости условия аналитичности коэффициентов изучен в [6].

В настоящей работе получены интегральные представления для решения Йоста дифференциальных уравнений высокого порядка, коэффициенты которых могут быть также и неаналитическими функциями. Для описания свойств ядра представления оказалось естественным использование операторов дробного интегрирования и дробного дифференцирования Римана–Лиувилля

$$I_t^\alpha \varphi(x, t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \varphi(x, s) ds, \quad D_t^\alpha \varphi(x, t) = \frac{\partial}{\partial t} I_t^{1-\alpha} \varphi(x, t),$$

$0 < \alpha < 1$.

Несмотря на нетреугольность этих представлений, свойства ядра, в частности, его связь с коэффициентами уравнения, показывают, что их можно использовать в теории обратных задач.

Рассмотрим дифференциальное уравнение ($n > 2$)

$$y^{(n)} + \sum_{j=0}^{n-2} p_j(x) y^{(j)} = \lambda^n y, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (1)$$

где функции $p_j(x)$ принадлежат $C^j(\mathbb{R})$ и удовлетворяют условиям

$$\int_{-\infty}^{\infty} (1+|x|)^{n-1-j+s} |p_j^{(s)}(x)| dx < +\infty, \quad 0 \leq s \leq j \leq n-2. \quad (2)$$

Введем следующие обозначения:

$$q_j(t) = \sum_{m=j}^{n-2} (-1)^m C_m^j p_m^{(m-j)}(t),$$

$$(J\psi)(x) = \int_{-\infty}^x \psi(t) dt, \quad \sigma(x) = \sum_{j=0}^{n-2} (J^{n-j} |q_j|)(x).$$