Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. Ю. Выборнов, Соответствие Дринфельда–Коно и квантовое тождество Якоби, *Функц. анализ и его прил.*, 1998, том 32, выпуск 4, 75–78

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa368>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.205.225.156

26 апреля 2023 г., 13:56:00

УДК 517.9

Соответствие Дринфельда–Коно и квантовое тождество Якоби

© 1998. М. Ю. ВЫБОРНОВ

В данной заметке мы предлагаем вариант квантовой антисимметрии и квантового тождества Якоби.

1. Введение. Понятие «квантовой алгебры» Ли, связанное с понятием квантовой группы, разрабатывалось в последнее время многими исследователями (см. [1]). Однако многие важные проблемы представляются пока открытыми. Наша цель в этой области состоит в том, чтобы представить категорию $\mathcal{E}$ конечно порожденных представлений квантовой группы, соответствующей комплексной полупростой алгебре Ли $\mathfrak{g}$ как категорию модулей над квантовой алгеброй Ли. В качестве первого шага к этой цели мы предлагаем вариант тождеств, которые можно назвать квантовой антисимметрией и квантовым тождеством Якоби, для любой комплексной полупростой алгебры Ли $\mathfrak{g}$. В случае $\mathfrak{g} = sl(2, \mathbb{C})$ мы получаем более простое тождество Якоби.

2. Обозначения. В данной заметке 1 — это тождественный морфизм какого-нибудь объекта. В каждом конкретном случае либо ясно, какой объект мы подразумеваем, либо мы указываем этот объект явно. Пусть $\mathfrak{g}$ — комплексная полупростая алгебра Ли, и пусть задан инвариантный симметричный тензор $t \in \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$, соответствующий форме Киллинга на $\mathfrak{g}$. Мы понимаем соответствие Дринфельда–Коно так, как оно представлено в [7] Кажданом и Люстигом. Следуя их обозначениям и терминологии, мы обозначаем через $\mathcal{D}$ и $\mathcal{E}$ категории Дринфельда, связанные с $\mathfrak{g}$ (см. [2–5]). Заметим, что категория $\mathcal{D}$ имеет две структуры тензорной категории: тривиальную структуру $(\mathcal{D}, \otimes, \sigma, 1 \otimes 1 \otimes 1)$, где $\sigma: U \otimes W \rightarrow W \otimes U$ является простой перестановкой в $U \otimes W$, и нетривиальную структуру $(\mathcal{D}, \otimes, \check{R} = \sigma \circ R = \sigma \circ e^{\pi\sqrt{-1}ht}, \Phi = \Phi_{KZ}(t_{12}, t_{23}))$. Пусть задан функтор эквивалентности Каждана–Люстига $\mathbf{X}: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{E}$ (см. [7]). Для двух объектов U и W из $\mathcal{D}$ пусть $M_{U,W}: \mathbf{X}(U) \otimes \mathbf{X}(W) \rightarrow \mathbf{X}(U \otimes W)$ обозначает морфизм «естественного преобразования», определяющий тензорную структуру функтора $\mathbf{X}$ (см. п. 25.7 из [7]). Преобразуя тривиальную структуру в $\mathcal{D}$ функтором $\mathbf{X}$, мы получаем вторую структуру тензорной категории в $\mathcal{E}$. Обозначим соответствующий морфизм коммутативности через σ^h и соответствующий морфизм ассоциативности через Ψ . Мы изучим категорию $(\mathcal{E}, \otimes, \sigma^h, \Psi)$ подробнее.

В категории $\mathcal{D}$ существует выделенный объект $V = \mathfrak{g}[[h]]$ и выделенный морфизм $[\ , \] = T: V \otimes V \rightarrow V$, соответствующий скобке Ли на $\mathfrak{g}$, а также выделенный морфизм $\check{R}: V \otimes V \rightarrow V \otimes V$, $\check{R} = \sigma \circ R_{V,V}$, где $R_{V,V}$ обозначает представление в $V \otimes V$ универсальной R -матрицы $R = e^{\pi\sqrt{-1}ht}$. Морфизмы

t^h , T^h и $\check{R}^h$ в $\mathcal{E}$ определены формулами

$$t^h = M_{V,V}^{-1} \circ \mathbf{X}(t) \circ M_{\mathbb{C}[[h]], \mathbb{C}[[h]]}, \quad T^h = \mathbf{X}(T) \circ M_{V,V},$$

$$\check{R}^h = M_{V,V}^{-1} \circ \mathbf{X}(\check{R}) \circ M_{V,V},$$

где t — морфизм $\mathbb{C}[[h]] \otimes \mathbb{C}[[h]] \rightarrow V \otimes V$. Положим $V^h = \mathbf{X}(V)$ и

$$\Omega = -(T \otimes T) \circ (1_V \otimes t \otimes 1_V), \quad \Omega^h = M_{V,V}^{-1} \circ \mathbf{X}(\Omega) \circ M_{V,V},$$

$$\sigma^h = M_{V,V}^{-1} \circ \mathbf{X}(\sigma) \circ M_{V,V} = \check{R}^h \circ e^{-\pi\sqrt{-1}h\Omega^h},$$

где Ω рассматривается как морфизм $V \otimes V \rightarrow V \otimes V$ в $\mathcal{D}$, а $\Omega^h: V^h \otimes V^h \rightarrow V^h \otimes V^h$ рассматривается как морфизм в $\mathcal{E}$. (Мы отождествляем объекты V , $V \otimes \mathbb{C}[[h]]$ и $\mathbb{C}[[h]] \otimes V$ в $\mathcal{D}$, а также объекты V^h , $V^h \otimes \mathbf{X}(\mathbb{C}[[h]])$ и $\mathbf{X}(\mathbb{C}[[h]]) \otimes V^h$ в $\mathcal{E}$.)

3. Классическое тождество Якоби. По определению алгебры Ли для выделенного морфизма T выполняется условие антисимметрии $T \circ \sigma = -T$ и классическое тождество Якоби

$$T \circ (1_V \otimes T) = T \circ (T \otimes 1_V) \circ (1_V^{\otimes 3} - 1_V \otimes \sigma), \quad (3.1)$$

или

$$T \circ (T \otimes 1_V) = T \circ (1_V \otimes T) \circ (1_V^{\otimes 3} - \sigma \otimes 1_V). \quad (3.2)$$

Ясно, что морфизм σ удовлетворяет квантовому уравнению Янга–Бакстера: $\sigma_{12} \circ \sigma_{23} \circ \sigma_{12} = \sigma_{23} \circ \sigma_{12} \circ \sigma_{23}$.

4. Квантовое тождество Якоби. Применим теперь функтор Каждана–Люстига к выделенным морфизмам T и σ . Пусть

$$M = (M_{V,V \otimes V}) \circ (1_{V^h} \otimes M_{V,V}), \quad N = (M_{V \otimes V,V}) \circ (M_{V,V} \otimes 1_{V^h});$$

тогда $M, N: \mathbf{X}(V) \otimes \mathbf{X}(V) \otimes \mathbf{X}(V) \rightarrow \mathbf{X}(V \otimes V \otimes V)$ являются изоморфизмами в $\mathcal{E}$. Заметим, что по предложению 25.8 из [7] мы имеем

$$\mathbf{X}(\Phi) = M \circ N^{-1} = (M - N) \circ N^{-1} + 1, \quad (4.1)$$

где Φ рассматривается как морфизм $V \otimes V \otimes V \rightarrow V \otimes V \otimes V$ в $\mathcal{D}$. Положим

$$\Psi = M^{-1} \circ N = M^{-1} \circ (N - M) + 1. \quad (4.2)$$

ТЕОРЕМА 4.1. *Для морфизмов в $\mathcal{E}$ выполняются следующие тождества:*

$$T^h \circ \sigma^h = -T^h, \quad (\sigma^h)^2 = 1, \quad (4.3)$$

$$T^h \circ (T^h \otimes 1) = T^h \circ (1 \otimes T^h) \circ \Psi \circ (1^{\otimes 3} - \sigma^h \otimes 1),$$

$$T^h \circ (1 \otimes T^h) = T^h \circ (T^h \otimes 1) \circ \Psi^{-1} \circ (1^{\otimes 3} - 1 \otimes \sigma^h), \quad (4.4)$$

$$\Psi \circ \sigma_{12}^h \circ \Psi^{-1} \circ \sigma_{23}^h \circ \Psi \circ \sigma_{12}^h = \sigma_{23}^h \circ \Psi \circ \sigma_{12}^h \circ \Psi^{-1} \circ \sigma_{23}^h \circ \Psi. \quad (4.5)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует из определений, тождеств (3.1) и (3.2) и элементарного диаграммного поиска. Тождество (4.3) — это наш вариант квантовой антисимметрии, а тождество (4.4) — это наш вариант квантового тождества Якоби. $\square$

5. Ассоциатор Ψ . Хорошо известно (Ле, Мураками [8, 9]; мы используем изложение из книги [6]), что морфизм $\Phi: V \otimes V \otimes V \rightarrow V \otimes V \otimes V$ может быть представлен в виде

$$\Phi = 1 + \sum_{k=2}^{\infty} E_k(\Omega_{12}, \Omega_{23}) h^k, \quad (5.1)$$

где $E_k(\Omega_{12}, \Omega_{23})$ — однородный полином (степени k) от Ω_{12} и Ω_{23} . Явную форму полиномов E_k можно найти в литературе. Например,

$$E_2(\Omega_{12}, \Omega_{23}) = -\frac{\zeta(2)}{(2\pi\sqrt{-1})^2} [\Omega_{12}, \Omega_{23}] = \frac{1}{24} [\Omega_{12}, \Omega_{23}]. \quad (5.2)$$

Опишем некоторое формальное полиномиальное отображение. Пусть $\mathbb{C}[A, B]$ обозначает кольцо формальных полиномов от двух некоммутирующих переменных над $\mathbb{C}$. Мы построим отображение $\alpha: \mathbb{C}[A, B] \rightarrow \mathbb{C}[C, D, Z, Z^{-1}]$, $\alpha(1) = 1$, где C, D и Z также являются формальными попарно некоммутирующими переменными, $ZZ^{-1} = Z^{-1}Z = 1$, следующим образом:

$$\alpha: A^{n_1} B^{m_1} A^{n_2} B^{m_2} \dots A^{n_j} B^{m_j} \mapsto C^{n_1} Z^{-1} D^{m_1} Z \dots Z C^{n_j} Z^{-1} D^{m_j} Z,$$

где $n_i, m_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ для $1 \leq i \leq j$. Построим теперь полиномы G_k от переменных $\Omega_{12}^h, \Omega_{23}^h, \Psi$ и Ψ^{-1} таким образом: будем рассматривать $E_k(\Omega_{12}, \Omega_{23})$ как полином от $A = \Omega_{12}$ и $B = \Omega_{23}$, возьмем $\alpha(E_k)$ и подставим Ψ и Ψ^{-1} вместо Z и Z^{-1} , а также Ω_{12}^h и Ω_{23}^h вместо C и D (умножение — это композиция функторов). Наконец, $F_k = -\Psi \circ G_k$.

$$\text{ТЕОРЕМА 5.1. (a) } \Psi = 1 + \sum_{k=2}^{\infty} F_k(\Omega_{12}^h, \Omega_{23}^h, \Psi, \Psi^{-1}) h^k;$$

$$(b) \Psi^{-1} = 1 + \sum_{k=2}^{\infty} G_k(\Omega_{12}^h, \Omega_{23}^h, \Psi, \Psi^{-1}) h^k.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (a) Заметим, что $\Psi^{-1} - 1 = N^{-1} \circ (M - N)$. Диаграммный поиск показывает, что

$$\mathbf{X}(E_k(\Omega_{12}, \Omega_{23})) = -M \circ F_k(\Omega_{12}^h, \Omega_{23}^h, \Psi, \Psi^{-1}) \circ N^{-1}.$$

Это наблюдение и элементарные вычисления с использованием (4.1), (4.2) и (5.1) завершают доказательство. Часть (b) доказывается аналогично. $\square$

$$\text{ТЕОРЕМА 5.2. } \Psi, \Psi^{-1} \in \mathbb{C}[[h]][[\Omega_{12}^h, \Omega_{23}^h]].$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы докажем утверждение теоремы, показав, что $\Psi \bmod h^n \in \mathbb{C}[h]/(h^n)[[\Omega_{12}^h, \Omega_{23}^h]]$ и $\Psi^{-1} \bmod h^n \in \mathbb{C}[h]/(h^n)[[\Omega_{12}^h, \Omega_{23}^h]]$ для любого $n \in \mathbb{Z}_{>0}$. Это устанавливается индукцией по n . Действительно, $\Psi = 1 \bmod h^2$, $\Psi^{-1} = 1 \bmod h^2$, и, если $\Psi \bmod h^{n-2}$ и $\Psi^{-1} \bmod h^{n-2}$ являются полиномами от $\Omega_{12}^h, \Omega_{23}^h$, то

$$\Psi = 1 + \sum_{k=2}^{n-1} F_k(\Omega_{12}^h, \Omega_{23}^h, \Psi \bmod h^{n-2}, \Psi^{-1} \bmod h^{n-2}) h^k \bmod h^n,$$

$$\Psi^{-1} = 1 + \sum_{k=2}^{n-1} G_k(\Omega_{12}^h, \Omega_{23}^h, \Psi \bmod h^{n-2}, \Psi^{-1} \bmod h^{n-2}) h^k \bmod h^n$$

также являются полиномами от $\Omega_{12}^h, \Omega_{23}^h$. Следуя этому алгоритму, мы можем получить явные выражения для $\Psi \bmod h^n$ и $\Psi^{-1} \bmod h^n$ для любого $n \in \mathbb{Z}_{>0}$. $\square$

6. $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$. В этом случае $\text{rank}_{\mathbb{C}[[h]]} V^h = 3$. Морфизмы T^h и σ^h трудно вычислить явно в терминах $\{e, f, h\}$, порождающих V^h . Непосредственное вычисление показывает, что

$$\begin{aligned} cT^h \circ (1 \otimes T^h) &= T^h \circ (T^h \otimes 1) \circ (1^{\otimes 3} - 1 \otimes \sigma^h), \\ cT^h \circ (T^h \otimes 1) &= T^h \circ (1 \otimes T^h) \circ (1^{\otimes 3} - \sigma^h \otimes 1), \end{aligned} \quad (6.1)$$

где $c = 2 \frac{q^2 + q^{-2} - 1}{q^2 + q^{-2}}$ и $q = e^{\pi\sqrt{-1}h}$.

7. Я благодарен своему учителю Игорю Борисовичу Френкелю за постановку задачи и полезные обсуждения, а также С. Маджиду, С. Л. Вороновичу, П. Этингофу, Дж. Дингу и В. Процаку за многочисленные полезные обсуждения. Я хотел бы поблагодарить организаторов Программы по теории представлений и ее приложениям к математической физике в ESI за приглашение и возможность сделать доклад по данному вопросу. Я также благодарен ESI за гостеприимство и финансовую поддержку.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Delius G. W.* Quantum Lie algebras. Home page <http://www.mth.kcl.ac.uk/~delius>.
2. *Drinfeld V. G.* Quantum groups. Proc. Internat. Congr. Math. (Berkeley, 1986), Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1987, pp. 798–820.
3. *Дринфельд В. Г.* Алгебра и анализ, **1**, 30–46 (1989).
4. *Дринфельд В. Г.* Алгебра и анализ, **1**, 114–148 (1989).
5. *Дринфельд В. Г.* Алгебра и анализ, **2**, 149–181 (1990).
6. *Kassel C.* Quantum groups. Springer-Verlag, 1995.
7. *Kazhdan D., Lusztig G.* J. Amer. Math. Soc., **6**, 335–381 (1993).
8. *Le T. Q. T., Murakami J.* Nagoya Math. J., **142**, 39–65 (1996).
9. *Le T. Q. T., Murakami J.* Topology Appl., **62**, No. 2, 193–206 (1995).

Department of Mathematics, Yale University
e-mail: mv@math.yale.edu

Поступило в редакцию
9 октября 1997 г.

УДК 517.9

Объем Вейля–Петерссона пространств модулей кривых малого рода

© 1998. П. Г. ЗОГРАФ

Пространство модулей $\mathcal{M}_{g,n}$ гладких алгебраических кривых над $\mathbb{C}$ рода g с n отмеченными точками обладает канонической симплектической структурой, задаваемой кэлеровой формой ω_{WP} метрики Вейля–Петерссона. Хотя эта метрика и сингулярна на границе пространства модулей $\mathcal{M}_{g,n}$, его симплектический объем

$$\text{Vol}_{WP}(\mathcal{M}_{g,n}) = \frac{1}{n!(3g-3+n)!} \int_{\mathcal{M}_{g,n}} \omega_{WP}^{3g-3+n}$$