Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

П. Г. Зограф, Объем Вейля–Петерссона пространств модулей кривых малого рода, *Функци. анализ и его прил.*, 1998, том 32, выпуск 4, 78–81

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa369>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.12

26 апреля 2023 г., 12:38:37

также являются полиномами от $\Omega_{12}^h, \Omega_{23}^h$. Следуя этому алгоритму, мы можем получить явные выражения для $\Psi \bmod h^n$ и $\Psi^{-1} \bmod h^n$ для любого $n \in \mathbb{Z}_{>0}$. $\square$

6. $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$. В этом случае $\text{rank}_{\mathbb{C}[[h]]} V^h = 3$. Морфизмы T^h и σ^h трудно вычислить явно в терминах $\{e, f, h\}$, порождающих V^h . Непосредственное вычисление показывает, что

$$\begin{aligned} cT^h \circ (1 \otimes T^h) &= T^h \circ (T^h \otimes 1) \circ (1^{\otimes 3} - 1 \otimes \sigma^h), \\ cT^h \circ (T^h \otimes 1) &= T^h \circ (1 \otimes T^h) \circ (1^{\otimes 3} - \sigma^h \otimes 1), \end{aligned} \quad (6.1)$$

где $c = 2 \frac{q^2 + q^{-2} - 1}{q^2 + q^{-2}}$ и $q = e^{\pi\sqrt{-1}h}$.

7. Я благодарен своему учителю Игорю Борисовичу Френкелю за постановку задачи и полезные обсуждения, а также С. Маджиду, С. Л. Вороновичу, П. Этингофу, Дж. Дингу и В. Процаку за многочисленные полезные обсуждения. Я хотел бы поблагодарить организаторов Программы по теории представлений и ее приложениям к математической физике в ESI за приглашение и возможность сделать доклад по данному вопросу. Я также благодарен ESI за гостеприимство и финансовую поддержку.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Delius G. W.* Quantum Lie algebras. Home page <http://www.mth.kcl.ac.uk/~delius>.
2. *Drinfeld V. G.* Quantum groups. Proc. Internat. Congr. Math. (Berkeley, 1986), Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1987, pp. 798–820.
3. *Дринфельд В. Г.* Алгебра и анализ, **1**, 30–46 (1989).
4. *Дринфельд В. Г.* Алгебра и анализ, **1**, 114–148 (1989).
5. *Дринфельд В. Г.* Алгебра и анализ, **2**, 149–181 (1990).
6. *Kassel C.* Quantum groups. Springer-Verlag, 1995.
7. *Kazhdan D., Lusztig G.* J. Amer. Math. Soc., **6**, 335–381 (1993).
8. *Le T. Q. T., Murakami J.* Nagoya Math. J., **142**, 39–65 (1996).
9. *Le T. Q. T., Murakami J.* Topology Appl., **62**, No. 2, 193–206 (1995).

Department of Mathematics, Yale University
e-mail: mv@math.yale.edu

Поступило в редакцию
9 октября 1997 г.

УДК 517.9

Объем Вейля–Петерссона пространств модулей кривых малого рода

© 1998. П. Г. ЗОГРАФ

Пространство модулей $\mathcal{M}_{g,n}$ гладких алгебраических кривых над $\mathbb{C}$ рода g с n отмеченными точками обладает канонической симплектической структурой, задаваемой кэлеровой формой ω_{WP} метрики Вейля–Петерссона. Хотя эта метрика и сингулярна на границе пространства модулей $\mathcal{M}_{g,n}$, его симплектический объем

$$\text{Vol}_{WP}(\mathcal{M}_{g,n}) = \frac{1}{n!(3g-3+n)!} \int_{\mathcal{M}_{g,n}} \omega_{WP}^{3g-3+n}$$

конечен. Более того, кэлорова форма ω_{WP} продолжается как замкнутый поток на компактифицированное (по Делиню–Мамфорду) пространство модулей $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ и реализует вещественный класс когомологий $[\omega_{WP}] \in H^2(\overline{\mathcal{M}}_{g,n}, \mathbb{R})$ [5]. В действительности $\pi^{-2}[\omega_{WP}] = \varkappa_1$, где $\varkappa_1$ обозначает первый тавтологический класс Мамфорда на $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ [6]. Другими словами,

$$\text{Vol}_{WP}(\mathcal{M}_{g,n}) = \pi^{2(3g-3+n)} \frac{\langle \varkappa_1^{3g-3+n} \rangle}{n! (3g-3+n)!}.$$

Объем Вейля–Петерссона не только является симплектическим инвариантом пространств модулей, но возникает и в современной теоретической физике, — например, в двумерной топологической гравитации [4]. Как показано в [3], объемы Вейля–Петерссона служат нетривиальным примером когомологической квантовой теории поля, естественно обобщающей теорию квантовых когомологий. Это мотивировало вычисление «высших» объемов Вейля–Петерссона в [2] и привело к новым формулам для них, особенно явным в случае кривых рода 0. Цель этой заметки состоит в том, чтобы дать простые формулы, выражающие производящие функции объемов Вейля–Петерссона в роде 1 и 2 через достаточно явно описываемую производящую функцию в роде 0.

ОБОЗНАЧЕНИЕ. Для фиксированного $g \geq 0$ производящая функция объемов Вейля–Петерссона пространств модулей $\mathcal{M}_{g,n}$ задается рядом

$$\phi_g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{V_{g,n}}{n! (3g-3+n)!} x^n,$$

где $V_{g,n} = \langle \varkappa_1^{3g-3+n} \rangle$ (следует отметить, что $V_{0,0} = V_{0,1} = V_{0,2} = V_{1,0} = 0$ и $V_{0,3} = 1$).

Напомним основные свойства функции $\phi_0(x)$. Ее коэффициенты Тейлора в точке $x = 0$ даются рекуррентной формулой (см. [7])

$$V_{0,n} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-3} \frac{i(n-i-2)}{n-1} \binom{n}{i+1} \binom{n-4}{i-1} V_{0,i+2} V_{0,n-i}. \quad (1)$$

Дифференциальное уравнение

$$\left(\frac{1}{x} \left(\frac{\phi_0}{x} \right)' \right)' = \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\phi_0'}{x} \right)' \right)^2,$$

эквивалентное (1), было явное решено в [2]: функция $y(x) = \phi_0''(x)$ является обратной к функции Бесселя $x(y) = -\sqrt{y} J_0'(2\sqrt{y})$.

ОБОЗНАЧЕНИЕ. Положим $f = \phi_0'''$, т.е. $f(-(z/2) J_0'(z)) = 1/J_0(z)$.

ТЕОРЕМА 1. Для производящей функции ϕ_1 справедлива формула

$$\phi_1 = \frac{1}{24} \log f, \quad f = \phi_0'''. \quad (2)$$

Формула (2) следует из рекуррентного соотношения

$$V_{1,n} = \frac{n}{24} V_{0,n+2} + \sum_{i=1}^{n-1} (n-i) \binom{n}{i-1} \binom{n-1}{i} V_{1,i} V_{0,n-i+2}, \quad (3)$$

которое доказывается методами [7]. Отметим, что такая же формула связывает производящие функции для τ -корреляторов Виттена в роде 0 и 1 [4, (2.92)], причем она справедлива и для других чисел пересечений (см. [1]).

В роде 2 ситуация значительно усложняется, поскольку классы граничных дивизоров уже не порождают кольцо пересечений пространства $\overline{\mathcal{M}}_{2,n}$ при $n > 0$. Тем не менее функция ϕ_2 по-прежнему выражается через ϕ_0 .

ТЕОРЕМА 2. Для производящей функции ϕ_2 справедлива формула

$$\phi_2 = \frac{1}{1152} \frac{f'''}{f^2} - \frac{7}{1920} \frac{f'' f'}{f^3} + \frac{1}{360} \frac{f'^3}{f^4}, \quad f = \phi_0'''. \quad (4)$$

Ключевым моментом в выводе формулы (4) служит следующая формула для класса Вейля–Петерссона, или первого класса Мамфорда κ_1 , на $\overline{\mathcal{M}}_{2,n}$:

$$\kappa_1 = \frac{1}{3} \eta + \sum_{i=1}^{n-1} i \delta_{0i} + \left(\frac{1}{5} + \frac{n}{30} \right) \delta_{10} + \left(\frac{7}{5} + \frac{2n}{5} \right) \sum_{i=1}^{[n/2]+1} \delta_{1i}. \quad (5)$$

Здесь η обозначает класс дивизора, параметризующего такие кривые рода 2 с n отмеченными точками, у которых по крайней мере одна из отмеченных точек является точкой Вейерштрасса, δ_{0i} — граничный класс, параметризующий приводимые кривые с компонентами типа $(0, i+2)$ и $(2, n-i)$, δ_{10} — граничный класс, параметризующий неприводимые кривые типа $(1, n+2)$, и, наконец, δ_{1i} — граничный класс, параметризующий приводимые кривые с компонентами типа $(1, i)$ и $(1, n-i+2)$. Дивизор η распадается на n неприводимых компонент, каждая из которых бирационально эквивалентна 6-листному разветвленному накрытию пространства $\overline{\mathcal{M}}_{2,n-1}$. Кольцо пересечений каждой неприводимой компоненты дивизора η порождается классами граничных дивизоров, что позволяет воспользоваться методами [7] для рекуррентного вычисления объема дивизора η и, как следствие, пространства $\overline{\mathcal{M}}_{2,n}$. Решая соответствующее дифференциальное уравнение для ϕ_2 , приходим к формуле [4].

ЗАМЕЧАНИЕ 1. По существу формула (5) индуктивно описывает мультипликативную структуру кольца пересечений пространства модулей $\overline{\mathcal{M}}_{2,n}$ благодаря «хорошему» поведению класса Вейля–Петерссона относительно ограничений (названного *аддитивностью* в [3]). Точнее, это позволяет выразить самопересечения класса η и дивизоров границы пространства $\overline{\mathcal{M}}_{2,n}$ в терминах граничных стратов коразмерности 2.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. В конце 1994 г. в разговоре с автором К. Итциксон предположил, что объем Вейля–Петерссона должен иметь следующее асимптотическое поведение при больших значениях n :

$$\frac{V_{g,n}}{n! (3g-3+n)!} \sim C^n n^{-1+\frac{5}{2}(g-1)} \quad (6)$$

с не зависящей от рода g константой C . Для $g = 0$ это доказано в [2], а константа C выражена там через первый нуль функции Бесселя J_0 . Формулы (2), (4) показывают, что эта асимптотика справедлива и для $g = 1, 2$ с той же константой.

Асимптотическая формула (6) следовала бы из более сильного утверждения:

ГИПОТЕЗА. Для $g > 2$ производящая функция ϕ_g выражается через ϕ_0 формулой $\phi_g = D_g f$, $f = \phi_0'''$, где D_g представляет собой нелинейный дифференциальный оператор порядка $3g - 3$ вида

$$D_g f = \sum_{|m|=3g-3} c_m f^{1-g-\|m\|} \prod_{i=1}^{3g-3} \left(\frac{df}{dx^i} \right)^{m_i}. \quad (7)$$

Здесь $m = (m_1, \dots, m_{3g-3})$ — мультииндекс с $m_i \geq 0$,

$$|m| = \sum_{i=1}^{3g-3} i m_i \quad \text{и} \quad \|m\| = \sum_{i=1}^{3g-3} m_i.$$

Коэффициенты c_m должны быть в некотором смысле двойственны числам пересечений $\langle \kappa_1^{m_1} \kappa_2^{m_2} \dots \rangle$ на $\overline{\mathcal{M}}_g = \overline{\mathcal{M}}_{g,0}$.

Автор признателен Университету штата Нью-Йорк (Стони Брук) за гостеприимство и поддержку в 1996/97 академическом году.

Замечание при корректуре. Как заметил Э. Гетцлер (личное сообщение), формула (4) идентична соответствующей формуле для свободной энергии в роде 2 в топологической теории гравитации Виттена; см. Eguchi T., Yamada Y., Yang S.-K. Rev. Math. Phys., **7**, 279 (1995), Appendix D. Более того, теорема 1 этой работы утверждает, что для свободной энергии в роде g сформулированная выше гипотеза об объемах Вейля–Петерссона действительно выполняется (очевидно, с теми же коэффициентами c_m ; численное подтверждение этому получил К. Фабер, сосчитавший объемы Вейля–Петерссона пространств модулей $\mathcal{M}_{3,n}$ с $n \leq 12$ (личное сообщение)).

ЛИТЕРАТУРА

1. Kabanov A., Kimura T. Intersection numbers and rank one cohomological field theories in genus one. Preprint MPIM, Bonn, 1997.
2. Kaufmann R., Manin Yu., Zagier D. Commun. Math. Phys., **181**, 763–787 (1996).
3. Kontsevich M., Manin Yu. Invent. Math., **124**, 313–340 (1996).
4. Witten E. Surveys in Diff. Geom., **1**, 243–310 (1991).
5. Wolpert S. Amer. J. Math., **107**, 969–997 (1985).
6. Wolpert S. J. Diff. Geom., **31**, 417–472 (1990).
7. Zagier P. Contemp. Math., **150**, 367–372 (1993).

С.-Петербургское отделение Математического института им В. А. Стеклова РАН

Поступило в редакцию
12 января 1998 г.