Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. М. Гусейнов, Об одном представлении для решения Йоста обыкновенных дифференциальных уравнений, *Функци. анализ и его прил.*, 1999, том 33, выпуск 3, 75–77

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa370>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.91.87.62

26 апреля 2023 г., 13:28:42

Characteristic Classes, 2-d ed., Gordon & Breach Science Publ., New York a.o., 1993.
 Русский перевод: Васильев В. А., Лагранжевы и лежандровы характеристические классы. Изд-во МЦНМО, 1999.

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН

Поступило в редакцию
 27 апреля 1999 г.

УДК 517.9

Об одном представлении для решения Йоста обыкновенных дифференциальных уравнений

© 1999. И. М. Гусейнов

В 1955 г. Б. Я. Левин [1] ввел «треугольное» представление для решения дифференциального уравнения второго порядка, сохраняющего асимптотику в бесконечности, т.е. для решения Йоста. Это представление играло важную роль при решении обратных задач теории рассеяния (см., например, [2]). Для дифференциальных уравнений высокого порядка с аналитическими коэффициентами подобная задача решена в работах [3–5]. Вопрос о необходимости условия аналитичности коэффициентов изучен в [6].

В настоящей работе получены интегральные представления для решения Йоста дифференциальных уравнений высокого порядка, коэффициенты которых могут быть также и неаналитическими функциями. Для описания свойств ядра представления оказалось естественным использование операторов дробного интегрирования и дробного дифференцирования Римана–Лиувилля

$$I_t^\alpha \varphi(x, t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \varphi(x, s) ds, \quad D_t^\alpha \varphi(x, t) = \frac{\partial}{\partial t} I_t^{1-\alpha} \varphi(x, t),$$

$0 < \alpha < 1$.

Несмотря на нетреугольность этих представлений, свойства ядра, в частности, его связь с коэффициентами уравнения, показывают, что их можно использовать в теории обратных задач.

Рассмотрим дифференциальное уравнение ($n > 2$)

$$y^{(n)} + \sum_{j=0}^{n-2} p_j(x) y^{(j)} = \lambda^n y, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (1)$$

где функции $p_j(x)$ принадлежат $C^j(\mathbb{R})$ и удовлетворяют условиям

$$\int_{-\infty}^{\infty} (1+|x|)^{n-1-j+s} |p_j^{(s)}(x)| dx < +\infty, \quad 0 \leq s \leq j \leq n-2. \quad (2)$$

Введем следующие обозначения:

$$q_j(t) = \sum_{m=j}^{n-2} (-1)^m C_m^j p_m^{(m-j)}(t),$$

$$(J\psi)(x) = \int_{-\infty}^x \psi(t) dt, \quad \sigma(x) = \sum_{j=0}^{n-2} (J^{n-j} |q_j|)(x).$$

Под $\lambda^{n/2}$ будем понимать главную ветвь этой функции.

ТЕОРЕМА. Если выполнены условия (2), уравнение (1) для всех λ из замкнутого множества $\{\lambda : |\arg \lambda| \leq \pi/n\}$ имеет единственное решение $g(x, \lambda)$, удовлетворяющее условию $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x, \lambda) \exp\{-\lambda x\} = 1$ и представимое в виде

$$g(x, \lambda) = e^{\lambda x} \left(1 + \int_0^{+\infty} G(x, t) e^{-\lambda^{n/2} t} dt \right), \quad (3)$$

причем ядро $G(x, \cdot)$ принадлежит $L_1(0, \infty)$ и обладает следующими свойствами:

(1) $\int_0^{+\infty} |G(x, t)| dt \leq \exp\{C\sigma(x)\} - 1$, где C — некоторая положительная постоянная (см. следствие из леммы 1);

(2) на полуоси $(0, +\infty)$ существуют суммируемые по t производные

$$(D_t^{2/n})^l D_x^m G(x, t), \quad 1 \leq l + m \leq n - 1, \quad l, m = 0, 1, 2, \dots, n - 1,$$

причем

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \int_0^{+\infty} |(D_t^{2/n})^l D_x^m G(x, t)| dt = 0;$$

(3) функция $G(x, t)$ удовлетворяет уравнению

$$D_x \left(D_x^{n-1} + \sum_{l=1}^{n-1} C_n^l (D_t^{2/n})^l D_x^{n-l-1} \right) G(x, t) + \sum_{l=0}^{n-2} p_l(x) (D_t^{2/n} + D_x)^l G(x, t) = 0$$

и условиям

$$C_n^1 I_t^{(n-2)/n} D_x G(x, t)|_{t=0} + p_{n-2}(x) = 0,$$

$$\begin{aligned} & \sum_{l=0}^{k-1} C_n^{k-l} I_t^{(n-2)/n} (D_t^{2/n})^l D_x^{k-l} G(x, t)|_{t=0} + p_{n-k-1}(x) \\ & + \sum_{l=0}^{k-2} p_{n-k+l}(x) I_t^{(n-2)/n} (D_t^{2/n} + D_x)^l G(x, t)|_{t=0} = 0, \quad k = 2, \dots, n - 1. \end{aligned}$$

Приведем схему доказательства.

Рассмотрим интегральное уравнение для решения $g(x, \lambda)$:

$$g(x, \lambda) = e^{\lambda x} + \sum_{j=0}^{n-2} (-1)^{j+1} \int_{-\infty}^x \varphi_0^{(j)}(x - t, \lambda) q_j(t) g(t, \lambda) dt,$$

где

$$\varphi_0(x, \lambda) = \frac{1}{n\lambda^{n-1}} \sum_{m=1}^n \alpha^m e^{\alpha^m \lambda x}, \quad \alpha = e^{2\pi i/n}.$$

Подставляя здесь вместо $g(x, \lambda)$ его представление (3) и используя теоремы типа Винера–Пэли для угловых областей (см. [7]), получим следующее уравнение для ядра $G(x, t)$:

$$\begin{aligned} G(x, t) &= \sum_{j=0}^{n-2} (-1)^{j+1} \int_0^{+\infty} (J^{n-1-j} q_j)(x - s) \Psi_j(s, t) ds \\ &+ \sum_{j=0}^{n-2} (-1)^{j+1} \int_0^t d\eta \int_0^{+\infty} (J^{n-1-j} q_j G(\cdot, \eta))(x - s) \Psi_j(s, t - \eta) ds, \end{aligned}$$

где

$$\Psi_j(s, t) = \frac{1}{2\pi n} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ity} \sum_{m=1}^{n-1} (\alpha^m)^{j+1} (\alpha^m - 1)^{n-1-j} \times \exp[(\alpha^m - 1)|y|^{2/n} s \exp(i(\pi/n) \operatorname{sgn} y)] dy \quad \text{при } t > 0$$

и $\Psi_j(s, t) = 0$ при $t < 0$.

Достаточно доказать, что это уравнение имеет единственное решение $G(x, \cdot) \in L_1(0, \infty)$ со свойствами (1)–(3). Последнее устанавливается с помощью следующих лемм.

ЛЕММА 1. При всех $s > 0$, $t > 0$, $j = 0, 1, \dots, n-2$ справедливы оценки

$$|\Psi_j(s, t)| \leq C_0 \left(\frac{s^{n/(n-2)}}{t^{2/(n-2)}} \right)^{-2/n} \left[1 + \left(\frac{s^{n/(n-2)}}{t^{2/(n-2)}} \right)^{(3n-4)/(2n)} \right]^{-1} \left(\frac{s}{t} \right)^{n/(n-2)},$$

где C_0 — положительная постоянная, не зависящая от s , t , j .

СЛЕДСТВИЕ. $0 < C \equiv \max_j \sup_{s>0} \int_0^\infty |\Psi_j(s, t)| dt < +\infty$.

ЛЕММА 2. При $t > 0$ справедливы формулы

$$\Psi_j(s, t) = -\frac{1}{2\pi n} \sum_{m=1}^{n-1} (\alpha^m)^{j+1} (\alpha^m - 1)^{n-2-j} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi s} e_{n/2}(t; \lambda_m(\xi)) d\xi,$$

$j = 0, \dots, n-2$, где $e_\rho(t; \lambda) = t^{1/\rho-1} E_\rho(-\lambda t^{1/\rho}; 1/\rho)$, а $E_\rho(z; \mu) = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{z^m}{\Gamma(\mu+m/\rho)}$ — функция типа Миттаг-Леффлера [8].

ЛЕММА 3. $D_t^{2/n} e_{n/2}(t; \lambda) = -\lambda e_{n/2}(t; \lambda)$ и $I_t^{(n-2)/n} e_{n/2}(t; \lambda)|_{t=0} = 1$.

Заметим, что при $n = 2$ формула (3) совпадает с представлением Б. Я. Левина. При $n > 2$ для двучленного уравнения формула (3) с $G(x, \cdot) \in L_2(0, +\infty)$ получена в [9]. Там же найдены представления для решения полного уравнения (1), но они отличаются от (3).

В заключение отметим, что аналогичное представление имеет место для решения Йоста уравнения (1), сохраняющего асимптотику лишь в $+\infty$, а также для решения с начальными условиями.

ЛИТЕРАТУРА

1. Левин Б. Я. ДАН СССР, **106**, № 2, 187–190 (1956).
2. Марченко В. А. Операторы Штурма–Лиувилля и их приложения. Наукова думка, Киев, 1977.
3. Хачатрян И. Г. Изв. АН Арм. ССР, сер. матем., **14**, № 6, 424–445 (1979).
4. Гасымов М. Г. ДАН СССР, **266**, № 5, 1033–1036 (1982).
5. Хачатрян И. Г. Функц. анализ и его прил., **17**, вып. 1, 40–52 (1983).
6. Маламуд М. М. Функц. анализ и его прил., **16**, вып. 3, 74–75 (1982).
7. Джрбалян М. М., Мартиросян В. М. Изв. АН СССР, сер. матем., **41**, № 4, 868–894 (1977).
8. Джрбалян М. М. Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области. Наука, М., 1966.
9. Гусейнов И. М. Изв. АН Азерб. ССР, сер. физ.-тех. и матем. наук, № 2, 27–32 (1986).

Бакинский государственный университет

Поступило в редакцию
10 апреля 1997 г.